MATHEMATHISHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN
BAUMEISTER IN BERLIN.

IV. BAND

K—P.

BERLIN
VERLAG VON WIEGANDT UND HEMPEL
1864.

K.

Kalender ist Maafsstab für die bürgerliche Zeit und Zeitrechnung. Die Maafseinheit gibt uns die Natur unmittelbar, indem die Erde in constant bleibendem Zeitabstande um ihre Axe und in einem ebenfalls constant bleibenden Zeitabstande um die Sonne sich dreht. Beide Zeitmaafseinheiten sind allen Erdbewohnern ohne Ausnahme gleich zugänglich, daher man sie schon in dem grauesten Alterthum und auf allen Orten der Erdoberfläche als Maafseinheiten anerkannt findet, indem bei Jedermann das Bedürfnifs zur Zeitmessung mit seinem ganzen Leben verwebt ist.

Ungeachtet man nur nöthig hat, den scheinbaren Gang der Sonne zu beobachten um das Zeitmaafs zu erhalten, wird doch die Zeitmessung dadurch zusammengesetzt und schwierig, dafs es dem Schöpfer gefallen hat, beide Zeitabstände, den für die Drehung der Erde um ihre Axe und den für den Umlauf der Erde in der Ekliptik, nämlich die Zeit eines Tages und die Zeit eines Jahres mit einander incommensurabel zu machen. Beider bedürfen wir aber, denn wir haben täglich wiederkehrende und jährlich wiederkehrende Lebensverhältnisse, Verrichtungen, solche die nach Theilen des Tages und solche, die nach Theilen des Jahres abgemessen werden. Der Naturforscher zählt nach Secunden, der Geschichtsforscher nach Jahren und nach Perioden von Jahrhunderten.

Der künstliche Maafsstab für den Tag und die Theile des Tages ist die Uhr, der für das Jahr und die Theile des Jahres der Kalender, allein Uhrmacher und Kalendermacher haben nie Hand in Hand gehen können und sie können es heut noch nicht. Beide haben uns mit richtiger bürgerlicher Zeit zu versehen; der Uhrmacher kümmert sich aber nur um den constanten Tag und seine Theile, der Kalendermacher dagegen hat die bürgerliche Zeit mit der astronomischen in Eintracht zu bringen.

Man theilt den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden. Das tropische Jahr, welches unserer bürgerlichen Zeit zu Grunde liegt, wird durch die Zeit bestimmt, in welcher die Erde von dem Frühlingspunkt der Ekliptik ab fortgeht bis sie wiederum auf den Frühlingspunkt trifft. Da aber dieser Frühlingspunkt alle Jahr um 50,1 Bogensecunden der Erde entgegen kommt, so beschreibt die Erde nur einen Bogen von $360° - 50,1''$ und die Zeit, in der dies geschieht, beträgt 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und 51 Secunden, diese Secunden noch mit Decimalen.

Es ist möglich, dafs wenn man die Zeitsecunde in 60 Terzien, diese in 60 Quarten, diese in 60 Quinten u. s. w. eintheilt, das tropische Jahr mit dem Tage commensurabel wird; es ist jedoch zu erwägen, dafs das tropische Jahr durch Beobachtung mit Winkelinstrumenten ermittelt ist und dafs diese, so aufserordentlich scharf sie schon ausgeführt, wenn sie noch schärfer sollten hergestellt werden können, immer als Menschenwerk unvollkommen bleiben werden, so dafs man mit der eben angeführten Zeit des Jahres, als sehr nahe der wirklichen wird zufrieden bleiben müssen.

Die Geschichte des Kalenders ist weitläufig und ich will nur einige Perioden, die auf unseren heutigen Kalender influiren, kurz aufführen.

Im Alterthum suchte man den Mondlauf mit dem Sonnenlauf in Uebereln-

stimmung zu bringen; man hatte ein Jahr zu 12, das folgende zu 13 Monaten. Da aber der Mond unbekümmert um die Sonne seinen eigenen Gang geht, so entstand bald Verwirrung. Hierauf nahm man 50 Monate auf 4 Jahr; auch dies hielt nur eine Weile aus. Solon endlich fand sich veranlafst, die Sonne ganz zu ignoriren und nur nach Monden zu rechnen, von denen immer einer 29, der folgende 30 Tage hatte, was natürlich auch nicht lange Stich halten konnte. Ueber diese Verwirrung macht Oristophanes einen Witz: Diana, die Göttin des Mondes klagt, dafs die Menschen an ihr Erscheinen nicht mehr sich kehrten und die Götter, welche zu der Zeit sich versammelten, um die von den Athenern ihnen gebührenden Opfermahle einzunehmen, müfsten halb verhungert in den Olymp zurückkehren.

Nach manchen Abänderungen durch Schaltmonate, wie später auf Mosis Geheifs die Juden nur Mondenjahre haben durften, in welche zur Uebereinstimmung mit den Sonnenjahren Monate eingeschaltet wurden, erfand Meton, Athenischer Astronom, 400 Jahr v. Chr. die berühmte 19jährige Periode, in welcher 12 Jahre aus 12 Monaten und 7 Jahre aus 13 Monaten, also 19 Jahre aus 235 Monaten, 125 zu 30 und 110 zu 29 Tagen bestanden. Zu Ende solcher Periode von 19 Jahren geht der Sonnenlauf mit dem Mondlauf um noch nicht ganz 2 Stunden auseinander, und somit dauerte diese Zeitrechnung 102 Jahre, wo sie von Kalippus dahin verbessert wurde, dafs er 4 Meton'sche Perioden von 27760 Tagen um einen Tag verkürzte und sie auf 27759 Tage reducirte. Die Kalipp'sche Periode ist also der Meton'schen, was später der Gregorianische Kalender dem Julianschen wurde. Hierzu kommt, dafs mit Kalippus das Jahr 365 Tage 6 Stunden erhielt, dafs also 300 Jahre später die Kalippsche Zeitrechnung dem Julianschen Kalender die Norm gab.

Romulus hatte das Jahr auf nur 304 Tage festgesetzt und diese in 10 Monate, 6 zu 30 und 4 zu 31 Tagen getheilt. Den ersten Monat widmete er dem Mars, daher sein Name Martius, unser heutiger März; die letzten, October, November, December von den Zahlen octo, novem, decem. Der erste März war der Tag der Frühlingsnachtgleiche, an dem man anfing die Felder zu bestellen.

Dafs die im Jahr fehlenden 61 bis 62 Tage bald sich geltend machten ist klar, und schon sein Nachfolger Numa setzte 50, später noch einen Tag, also 51 Tage in 2 Monaten Januarius und Februarius hinzu, und hatte somit ein Jahr von 355 Tagen mit 12 Monaten geschaffen.

Die Folge von diesem Kalender war, dafs von Jahr zu Jahr die Nachtgleiche immer später kam als sie im Kalender stand, und dafs man endlich das Feld ohne Kalender bestellen mufste. 700 Jahre nach Erbauung Roms war ungeachtet noch vieler inzwischen geschehenen Einschaltungen von Tagen die Nachtgleiche bis in den Mai des Kalenders gerückt.

Julius Caesar, um die allgemein gefühlte Verwirrung zu beseitigen, berief den aegyptischen Astronom Sosigenes, die Kalippus'sche Periode wurde zu Grunde gelegt, nach welcher das Jahr 365¼ Tage hat, das Jahr 709 nach Erbauung Roms, 45 Jahr vor Chr. Geburt sollte mit dem Wintersolstitium (heut der 21te December) anfangen; allein 8 Tage später traf Neumond ein, auf welchen damals Gewicht gelegt wurde, das Neujahr fing daher mit dem 1ten Januar, 8 Tage später an, das Wintersolstitium blieb auf den 24ten December, die Frühlingsnachtgleiche fiel auf den 24ten März, und um dies möglich zu machen, erhielt das Jahr vorher zu der Numa'schen Zeit von 355 Tagen noch 90 Tage hinzu, im Ganzen also 445 Tage, woher es das Annus confusionis genannt wurde, besser aber, da alle Confusion mit ihm aufhörte, auch den Namen annus confusionis ultimus erhielt.

Das tropische Jahr hat aber nicht volle 365 Tage 6 Stunden, es fehlen noch 11 Minuten 9 Secunden daran; daher fiel etwa alle 120 Jahr die Frühlingsnachtgleiche wieder einen Tag vor die des Kalenders. Nun war aber zum Aerger der christlichen Geistlichen öfter passirt, dafs die Juden mit den Christen auf einerlei Tag das Osterfest feierten und die hohen Würdenträger der Kirche beriethen in einem Concilium zu Nicäa, im Jahr 325, also 370 Jahre nach Einführung des Kalenders wie dem Uebelstand abzuhelfen wäre.

Da nun das Osterfest mit der Nachtgleiche Zusammenhang hat, so mufste nothwendig zur Sprache kommen, dafs die Frühlings-Nachtgleiche schon am 21ten März, also 3 Tage vor der Kalendernachtgleiche eintrete. Es geschah nun zwar keine Reformation des Kalenders, aber seit dieser Zeit hat es ab und zu gegen denselben ernste Angriffe gegeben, bis im 16ten Jahrhundert Pabst Gregor XIII, der sich gar zu gern berühmt machen wollte, eine wirkliche Reformation des Kalenders veranstaltete.

Nun war aber Julius Cäsar ein Heide und dem christlichen Oberhirten war es nicht zuzumuthen, eine heidnische Zeitrechnung herzustellen, woher denn der Kalender eingeführt wurde, wie er im Jahre 325 des Nicäer Conciliums hätte sein sollen, und wir haben demnach heut die Frühlingsnachtgleiche nicht auf den 24ten sondern auf den 21ten März.

In dem Jahr 1582 nämlich, wo die wirkliche Nachtgleiche schon auf den 11ten März fiel, zählte man auf den 4ten October nicht den 5ten, sondern sogleich den 15ten October und machte das Jahr um 10 Tage kürzer.

Nach Julius Cäsar war jedes Jahr, dessen Zahl durch 4 ohne Rest theilbar ist, ein Schaltjahr, wie der Kalender noch heut in Rußland alten Styls derselbe ist. Nach Gregor aber fallen alle Jahre, deren Zahlen ein Vielfaches von 400 ausdrücken, wieder als Schaltjahre aus und sind Gemeinjahre, und so wird auch der Februar des Jahres 2000 nur 28 Tage haben.

Es werden demnach von 400 Jahren des Julianischen Kalenders 3 Tage fortgenommen und der Fehler, der hiermit wieder begangen wird, beträgt innerhalb 4000 Jahren einen Tag, der zu wenig fortgenommen ist, so daſs alle 4000 Jahre noch ein Tag, indem ein Schaltjahr zum Gemeinjahr gemacht wird, fortzunehmen ist.

Es hat demnach Jahrtausende gedauert, ehe wir die von dem Schöpfer uns vor Augen gelegten beiden Zeiteinheiten richtig zu würdigen verstanden und einen gestempelten richtigen Kalender erhalten haben.

Kalenderjahr. Das Jahr von 365 Tagen heiſst **Gemeinjahr**, das von 366 Tagen **Schaltjahr**. Julius Cäsar setzte unter Zuziehung des ägyptischen Mathematiker Sosigenes alle 4 Jahr diesen Schaltag ein, so daſs jedes Jahr durchschnittlich 365 Tage 6 Stunden hatte (Julianischer Kalender). Aber das Sonnenjahr, die Zeit von dem Stande der Sonne in dem Frühlingspunkt bis zum nächst folgenden Eintritt derselben in den Frühlingspunkt, besteht nicht aus 365 Tagen 6 Stunden, sondern es ist 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden = 365,242256944... Tage lang, also um 11 Minuten 9 Secunden kürzer. Daher beträgt der alle 4 Jahr eingeschaltete Tag zu viel und dies betrug von Julius Cäsar bis Gregor dem 13ten schon 13 Tage, oder vielmehr, da schon unter Augustus bei wahrgenommenem Irrthum eine Rectification von 3 Tagen erfolgt war, 10 Tage.

Gregor setzte nun auf das Gutachten und den Vorschlag des Astronom Aloys Lilius im Jahr 1582 statt des 5ten Octobers den 15ten October und verordnete daſs die Schalttage beibehalten würden, daſs auch das Jahr 1600 noch ein Schaltjahr sein solle, daſs aber die Jahre 1700, 1800, 1900 wieder Gemeinjahre würden, und daſs dieselbe Ordnung in jedem folgenden Cyclus von 400 auf einander folgenden Jahren statt fände. Unter der Voraussetzung also, daſs der bürgerliche Tag am 15ten October 1582 mit dem astronomischen Tag übereinstimmte, hat man alle 400 Jahre eine constante Differenz zwischen wahrer Zeit und Kalenderzeit gegen den vorhergegangenen Cyclus wiederholt.

Das 1te Säculum vom 15ten October 1582 bis zum 15ten October 1682 hatte

25 Schaltjahre zu 366 Tagen, sind	9150 Tg.	
75 Gemeinjahre zu 365 Tagen, sind	27375 „	
Summa die ersten 100 Jahr	36525 Tg.	
Nach wahrer mittlerer Zeit gerechnet 100 Jahre zu 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden	36524 Tg.	5 St. 25 Min.
Differenz in den ersten 100 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit		18 St. 35 Min.

Dem Kalender nach waren, während die Sonne 100mal ihre Bahn vollständig durchlaufen hatte 36525 Tage zu 24 Stunden verflossen. In Wahrheit aber hatte die Sonne 18 Stunden 35 Minuten weniger dazu gebraucht, sie war also 18 Stunden 35 Minuten weiter vorgerückt und das Kalenderjahr 1682 war mithin gegen das astronomische Jahr um 18 Stunden 35 Minuten zurückgeblieben.

2 Säcula, vom 15ten October 1582 bis zum 15ten

October 1782 enthielten 49 Schaltjahre und 151 Gemeinjahre mit	73049 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 200×365 Tg. 5 St. 48 Mn. 51 Sc.	73048 Tg. 10 St. 50 Min.
Differenz in den ersten 200 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	13 St. 10 Min.

Die Kalenderzeit hatte in den zweiten 100 Jahren die wahre Zeit wieder um 5 Stunden 25 Minuten eingeholt und das Kalenderjahr 1782 war nur um 13 Stunden 10 Minuten gegen das astronomische Jahr zurückgeblieben.

3 Säcula vom 15ten October 1582 bis zum 15ten October 1882 enthalten 73 Schaltjahre und 227 Gemeinjahre mit	109573 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 300×365 Tg. 5 St. 49 Mn. 51 Sc. =	109572 Tg. 16 St. 15 Min.
Differenz in 300 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	7 St. 45 Min.

Die Kalenderzeit wird also im Jahre 1882 der wahren Sonnenzeit abermals um 5 St. 15 Min. sich nähern und das Jahr 1882 nur noch um 7 St. 45 Min. zurück sein.

4 Säcula endlich bis zum 15ten October 1982 enthalten 97 Schaltjahre und 303 Gemeinjahre mit	146007 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 400×365 Tg. 5 St. 48 Mn. 51 Sc.	146096 Tg. 21 St. 40 Min.
Differenz in 400 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	2 St. 20 Min.

Das letzte der 400 Jahre bleibt also gegen das 400te astronomirte Jahr nur um 2 Stunden 20 Minuten zurück.
In dem folgenden Cyclus von 400 Jahren werden die Differenzen zwischen wahrer Zeit und Kalenderzeit um diese 2 St. 20 Min. größer:

Das Jahr 2082 ist gegen wahre Zeit an Kalenderzeit zurück:

	18	St.	35	Min.	+ 2	St.	20	Min.	= 20	St.	55	Min.
Das Jahr 2182	13	„	10	„	+ 2	„	20	„	= 15	„	30	„
Das Jahr 2282	7	„	45	„	+ 2	„	20	„	= 10	„	5	„
Das Jahr 2382	2	„	20	„	+ 2	„	20	„	= 4	„	40	„

400 Kalenderjahre enthalten 146094 Tage, mithin das Kalenderjahr im Mittel 365,2425 Tage zu 24 Stunden = 365 Tg. 5 St. 49 Min. 12 Sec.

Es ist mithin gegen das tropische Sonnenjahr um 21 Secunden zu groſs.
In Betreff des Cyclus von 4 auf einander folgenden Jahren hat man:

Am 15ten Oct. 1583 waren vergangen . . .	365 Tg.
Das astronomische Jahr hatte	365 Tg. 5 St. 48 Min. 51 Sec.
Das Jahr 1583 war also voraus um	5 St. 48 Min. 51 Sec.
Am 15ten Oct. 1584 waren vergangen . .	731 Tg.
2 astronomische Jahre betrugen	730 Tg. 11 St. 37 Min. 42 Sec.
Das Jahr 1584 war also zurück um	12 St. 22 Min. 18 Sec.
Am 15ten Oct. 1585 waren vergangen . .	1096 Tg.
3 astronomische Jahre betrugen	1095 Tg. 17 St. 26 Min. 33 Sec.
Das Jahr 1585 war also zurück um	6 St. 33 Min. 27 Sec.
Am 15ten Oct. 1586 waren vergangen . .	1461 Tg.
4 astronomische Jahre betrugen	1460 Tg. 23 St. 15 Min. 24 Sec.
Das Jahr 1586 war also nur noch zurück um .	44 Min. 36 Sec.

Die Differenz zwischen den Jahren	1583	und	1584	betrug	18 St.	11 Min.	9 Sec.
„ „ „ „ „	1584	„	1585	„	5 „	48 „	51 „
„ „ „ „ „	1585	„	1586	„	5 „	48 „	51 „

Um von den 15ten Octobern auf die ersten Januare zu kommen, hat man bei der constanten Differenz von 2 auf einander folgenden 4jährigen Cykeln mit 44 Min. 36 Sec., da das Jahr 1600 ein Schaltjahr und das Jahr 1700 ein Gemeinjahr gewesen ist.

Vom 15ten October 1582 bis zum 15ten Oct. 1698, 29 Cyclus zu 44 Min. 36 Sec. Differenz. Das Jahr 1698 war also zurück um 29 · (44 Min. 36 Sec.) =		21 St. 33 Min. 24 Sec.
Vom 15ten Oct. 1698 bis 1ten Januar 1701 sind 2 Jahr 77 Tage, sind 807 Tage, nach dem Kalender zu 24 Stunden, nach wahrer Zeit = $2\frac{77}{365} \times$ (365 Tg. 5 St. 48 Min. 51 Sec.) also voraus $2\frac{77}{365}$ (5 St. 48 Min. 51 Sec.)		12 St. 45 Min. 4 Sec.
Mithin war der erste Januar 1701 zurück um		8 St. 48 Min. 20 Sec.
Vom 1ten Januar 1701 bis zum 1. Jan. 1861 sind, da das Jahr 1800 ein Gemeinjahr war, 39 Schaltjahre zu 366 Tagen . . 14274 Tg. 125 Gemeinjahre zu 365 Tagen . . 45625 „		
164 Jahre zusammen mit	59899 Tg.	
Die astronomische Zeit beträgt 164 Jahre zu 365 Tg. 5 Std. 48 Min. 51 Sec.	58890 Tg.	17 St. 31 Min. 24 Sec.
Der 1te Januar 1861 wird also um den 1ten Januar 1701 voraus sein an Kalenderzeit gegen die astronomische Zeit um		17 St. 31 Min. 24 Sec.
Der 1te Januar 1701 war an Kalenderzeit gegen die astronomische Zeit zurück um		8 St. 48 Min. 20 Sec.
Folglich ist der 1te Januar 1861 an Kalenderzeit gegen astronomische Zeit voraus um . . .		8 St. 43 Min. 4 Sec.

Aus der obigen Berechnung, dafs nach je 400 Jahren das Kalenderjahr gegen das astronomische Jahr um 2 Stunden 20 Minuten zurückbleibt, geht hervor, dafs zur Differenz beider Jahre von einem Tage $\frac{24}{2\frac{1}{4}} \times 400 = 4100$ Jahre gehören. Nach 4000 Jahren also muss ein neues Schaltjahr zum Gemeinjahr werden.

Kalotte, s. „Calotte".

Kalte Zonen sind die beiden Theile der Erdoberfläche als Calotten von den Wendekreisen ab, in deren Scheitel die Pole liegen; so genannt wegen der dort herrschenden kältesten Temperatur gegen die anderen Zonen der Erde. Bedeutet Fig. 267, Bd. II., pag. 2: *AB* den Aequator, *EF* einen Polarkreis, *D* den Pol, so ist die Calotte *EDF* eine der beiden kalten Zonen.

Von der Abplattung der Erde an den Polen abgesehen ist eine kalte Zone $= 2\pi \cdot CD \cdot DH$.

Es ist $DH = CD\,(1 - \cos \angle DCF)$

Mithin die Zone $2\pi\, CD^2 \times (1 - \cos \angle DCF)$

Nun ist $\angle DCF = 23\frac{1}{2}$ Grad

Daher die Zone $= 2 \cdot 0{,}08294 \cdot \pi\, CD^2$

Mithin verhält sich eine kalte Zone zur Erdoberfläche wie 0,08294 : 2 = 1 : 24 so dafs beide kalte Zonen etwa den 12ten Theil der gesammten Erdoberfläche ausmachen.

Kammlinie. Hierunter versteht man die Linien, nach welchen die Räderkämme geformt werden. Es sind diese die Cycloide, die Epicycloide und die Hypocycloide. Erstere gibt die vortheilhafteste Form für Kämme, wenn ein Stirnrad in eine gezahnte Stange greift. Die zweite für Kämme, wenn Kammrad und Getriebe zusammen greifen und für Kämme der gewöhnlichen aufserhalb in einander greifenden Stirnräder; letztere für die selten in Anwendung kommenden Stirnräder, von denen das eine innerhalb des Kranzes gezahnt ist. Der Vortheil in jedem einzelnen Fall besteht darin, dafs je zwei zusammengreifenden

Kämme in jeder noch so kleinen Zeit gleich grofse Wege zurückiegen.

Kanalwaage, s. „Canalwaage."

Kanten (Stereom und Kryst.) sind die Durchschnittslinien zweier Flächen; beim Krystall sind diese Flächen immer Ebenen, die Kanten also gerade Linien.

Die Kanten werden unterschieden 1, nach der Gröfse des Neigungswinkels beider die Kante bildenden Flächen, Kantenwinkel genannt. Kanten heifsen nämlich stumpf, wenn deren Kantenwinkel stumpf; scharf, wenn deren Kantenwinkel spitz (scharf) sind. Kanten in demselben Krystall heifsen gleich, wenn deren Kantenwinkel gleich sind, sonst ungleich.

Die Kanten eines Krystalls werden 2, unterschieden nach deren Lage: Kanten heifsen Scheitelkanten, wenn sie in einem Endpunkt der Normalaxe des Krystalls endigen, wenn sie also von zwei Scheitelflächen gebildet werden; Randkanten, wenn sie von einer Scheitelfläche und einer Seitenfläche oder von einer Endfläche und einer Seitenfläche gebildet werden.

Kantenwinkel sind die Neigungswinkel zweier in einer geraden Linie, einer Kante sich schneidenden Ebenen mit einander.

Kardioide (*καρδία* Herz) eine herzförmigz Linie der 4ten Ordnung also eine Curve der 3ten Klasse, weil sie durch eine Gleichung vom 4ten Grade bestimmt wird. Die Construction der Linie ist einfach:

Man nehme einen beliebigen Kreis, den Grundkreis *ADH* vom Halbmesser *AC*, ziehe von dem Endpunkt *A* desselben lauter Sehnen, wie *AD*, verlängere diese zu beiden Seiten, trage vom zweiten Endpunkt *D* der Sehne auf derselben nach beiden Seiten hin Stücke *DB*, *DF*, so sind *B*, *F* Punkte der Kardioide. In dem verlängerten Durchmesser sind *K* in Entfernung von 2 Kreisdurchmessern *AJ* von *A* und der Punkt *A* selbst die Curvenpunkte, *AK* die Mittellinie, und von dieser aus die Curve zu beiden Seiten congruente Hälften.

Fig. 725.

2. Um die rechtwinklige Coordinatengleichung zu erhalten, fälle die Normale *BE*, ziehe die Sehne *DJ*,

so ist $\triangle ADJ \backsim \triangle AEB$

Daher $AJ : AD = AB : AE$

Setzt man nun den Halbmesser *AC* des Grundkreises $= r$, für den Curvenpunkt *B* die Abscisse $AF = x$, die Ordinate $BE = y$, so hat man

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2};\; AD = \sqrt{x^2 + y^2} - 2r$$

also $2r : \sqrt{x^2 + y^2} - 2r = \sqrt{x^2 + y^2} : x$

woraus die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Punkt *B*, dessen Radiusvector *AB* durch den Grundkreis liegt.

$$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0 \quad (1)$$

3. Für den Punkt *F* hat man, wenn *AF* der Radiusvector, *FG* die Ordinate, *AG* die Abscisse ist

$$AJ : AD = AF : AG$$

Hier $AG = x_{,}$; $FG = y_{,}$ gesetzt

$$AF = \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2};\; AD = DF - AF = 2r - \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2}$$

Mithin $2r : 2r - \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2} = \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2} : x$

woraus die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Curvenpunkt *F*, dessen Radiusvector *AF* aufserhalb des Grundkreises liegt:

$$y_{,}^4 + 2(-2r^2 + 2rx_{,} + x_{,}^2)y_{,}^2 + 4rx_{,}^3 + x_{,}^4 = 0 \quad (2)$$

Zu dieser Gleichung kommt man auch, wenn man $-2r$ für $2r$ in die erste Coordinatengleichung setzt.

Zieht man durch den Punkt *A* eine Linie *LM* normal dem Durchmesser *AF*, so gilt die erste Coordinatengleichung für die Kardioidenpunkte, welche unterhalb *LM*, die zweite für die Punkte, welche oberhalb *LM* liegen.

4. Für die Kardioide gibt es eine ein-

fache Polargleichung. Nimmt man den $\angle EAB = \varphi$ zur Polarabscisse, so ist der Radiusvector

$$AB = AD + DB = AJ \cos\varphi + DB = 2r\cos\varphi + 2r$$
$$= 2r(1 + \cos\varphi) = s \qquad (3)$$

und $$AF = DF - AD = 2r(1 - \cos\varphi) = s, \qquad (4)$$

Für $x = 0$ wird $s = 4r$ (AK); $s_1 = 0$

Für $x = 90^0$ wird $e = 2r$; $s_1 = 2r$ (AM und AL)

Um zu erfahren, unter welchem Winkel x der Kardioidenpunkt über LM dieser Linie am entferntesten, ist hat man dessen Höhe über LM

$$= h = s_1 \times \sin(90^0 - \varphi) = 2r(1 - \cos\varphi)\cos\varphi \qquad (5)$$

h wird also ein Maximum für $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ also $h = \frac{1}{2}r \qquad (6)$

Die Ordinate y (wagrechte Entfernung von AK ist $= 2r(1 - \cos\varphi)\sin\varphi = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ (7)

5. Um die obigen Coordinatengleichungen mit den Polargleichungen in Vergleichung zu bringen hat man

$$x = s\cos\varphi = 2r(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$$
$$x_1 = s_1\cos\varphi = 2r(1 - \cos\varphi)\cos\varphi$$
$$y = s\sin\varphi = 2r(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$$
$$y_1 = s_1\sin\varphi = 2r(1 - \cos\varphi)\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{r + 2x}{r}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{r - 2x_1}{r}}\right)$$

Aus Gleichung 6 ersieht man, dafs x_1 im Maximo $= \frac{1}{2}r$ ist.

$$\cos^4\varphi + 2\cos^3\varphi - 2\cos\varphi - \frac{4r^2 - y^2}{4r^2} = 0$$

6. Nach dem Art. Curvenlehre pag. 186 mit Fig. 537 hat man

$$Subtangente\ CJ = \frac{s^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)}$$

Also für einen Punkt unter LM:

$$Subtg = \frac{4r^2(1 + \cos\varphi)^2}{-2r\sin\varphi} = -4r\cot\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Subtg = \frac{4r^2(1 - \cos\varphi)^2}{2r\sin\varphi} = +4r\,tg\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$Tangente\ BJ = \frac{s}{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)}\sqrt{s^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Also für einen Punkt unter LM:

$$Tg = \frac{2r(1 + \cos\varphi)}{-2r\sin\varphi}\sqrt{4r^2(1 + \cos\varphi)^2 + 4r^2\sin^2\varphi} = -4r\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Tg = \frac{2r(1 - \cos\varphi)}{2r\sin\varphi}\sqrt{4r^2\cdot(1 - \cos\varphi)^2 + 4r^2\sin^2\varphi} = 4r\sin\frac{\varphi}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}$$

$$Subnormale\ CN = \frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

Für einen Punkt unter LM:

$$Subn = -2r\sin\varphi$$

Für einen Punkt über LM:

$$Subn = 2r\sin\varphi$$

$$Normale\ BN = \sqrt{s^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Für einen Punkt unter LM:

$$Norm = \sqrt{4r^2(1 + \cos\varphi)^2 + 4r^2\sin^2\varphi} = 2r\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} = 4r\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Norm = \sqrt{4r^2(1 - \cos\varphi)^2 + 4r^2\sin^2\varphi} = 2r\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = 4r\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$$

Katadioptrisch ist jedes Vergröfserungswerkzeug, es mag die Eigenschaft der Vergröfserung durch Brechung der Lichtstrahlen (dioptrisch) oder durch Zurückwerfung derselben (katoptrisch) erlangt haben.

Katakaustische Linie, s. den Art. „Brennlinie" mit Fig. 251.

Kathete ist in jedem rechtwinkligen (geradlinigen und sphärischen) jede der beiden den rechten Winkel einschliefsenden Seiten. In einem sphärischen Dreieck mit 2 rechten Winkeln ist jede der 3 Seiten eine Kathete und 2 Seiten sind zugleich Hypotenusen; in einem sphärischen Dreieck mit 3 rechten Winkeln ist jede Seite Kathete und zugleich Hypotenuse.

Katoptrik ist die Disciplin der optischen Wissenschaften, welche mit der Zurückwerfung der Lichtstrahlen durch Spiegel sich beschäftigt.

Kaustische Linie, s. v. w. „Brennlinie".

Kegel ist ein Körper, der begrenzt ist von einer Kreisebene und einer Fläche, die so beschaffen ist, dafs sich in ihr ein Punkt befindet, welcher mit jedem anderen Punkt derselben und einem Punkte des Kreisumfangs immer in einer und derselben geraden Linie liegt. Dieser Punkt heifst die Spitze des Kegels, jeder Kreis die Grundfläche oder der Grundkreis; die zweite begrenzende Fläche der Kegelmantel, die gerade Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt des Grundkreises die Axe des Kegels; eine gerade Linie, welche die Spitze des Kegels mit einem Punkt des Grundkreises verbindet eine Seite des Kegels und der Abstand der Spitze von der Grundfläche die Höhe des Kegels. In Figur 726 ist *ABDE* der Grundkreis, *C* die Spitze, die geraden Linien *CA*, *CB*, *CD*, *CE* sind Seiten des Kegels.

2. Aus der Erklärung des Kegels geht hervor, dafs jede aus der Spitze nach dem Kreisumfang gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten in dem Kegelmantel liegt. Hieraus folgt, dafs jede von der Spitze aus durch den Kegel gelegte Ebene wie *FG* den Kegel in einem geradlinigen Dreieck *CAB* durchschneidet.

3. Eine Ebene *HJ*, welche durch die Spitze *C* eines Kegels und durch eine Tangente *JK* seiner Grundfläche gelegt wird, hat nur eine einzige gerade Linie, nämlich die gerade Verbindungslinie der Spitze *C* mit dem Berührungspunkt *L*

726.

zwischen Tangente und Kreisumfang mit dem Kegel gemein; alle übrigen Punkte der Ebene, wie z. B. *M* liegen aufserhalb des Kegels.

Schneidet eine dem Grundkreis parallele Ebene den Mantel eines Kegels, so ist die Durchschnittslinie eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt. Sein Umfang verhält sich zum Umfang des Grundkreises, wie der Abstand der Spitze von der Durchschnittsebene zu dem Abstand der Spitze von der Grundfläche; die Flächen dieser Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Es sei Fig. 727 *ABD* der Kegel, *C* der Mittelpunkt seines Grundkreises, also *AC* seine Axe; *bedf* sei die von dem Kegel-

Fig. 727.

mantel mit der ∥ der Grundfläche durch den Kegel gelegten Ebene gebildete Durchschnittslinie und *c* der Durchschnittspunkt

dieser Ebene mit der Axe AC. Ziehe von der Spitze C zwei Linien AB, AE nach den Umfangspunkten B und E des Grundkreises: b, e seien die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Durchschnittslinie $bedf$. Lege durch die Linien AB, AC, AE und AC zwei Ebenen; bc, ec seien deren Durchschnittslinien mit der durchgelegten Ebene,

so ist $bc \parallel BC$ und $ec \parallel EC$ (s. „Ebene" No. 29 mit Fig. 589)

folglich ist $\triangle Abc \sim \triangle ABC$

und $\triangle Aec \sim \triangle AEC$

Hieraus $bc : BC = Ac : AC$

und $ec : EC = Ac : AC$

folglich $bc : BC = ec : EC$

Da aber C der Mittelpunkt des Grundkreises ist, so sind BC und EC als Radien einander gleich, folglich ist auch $bc = ec$. Da nun b und e beliebige Punkte sind, so folgt daraus, dafs auch alle übrigen Punkte des Umfangs $bedf$ gleichen Abstand von c haben, dafs daher $bedf$ eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt c ist.

Man fälle aus der Spitze A auf die Grundfläche das Loth AF, und dies treffe die durchgelegte Ebene in den Punkt f. Zieht man nun die Linien CF und cf, so liegen diese in der Ebene ACF, sind parallel, verhalten sich wie $AF : Af$ und zugleich wie $EC : ec = BC : bc$. Die Kreisumfänge verhalten sich aber wie die ihnen zugehörigen Halbmesser, folglich verhalten sich die Kreisumfänge $bed : BED$ wie die ihnen zugehörigen Höhen $bf : BF$, und die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser, also wie die Quadrate der zugehörigen Kegelhöhen.

5. Ein Kegel, dessen Axe senkrecht auf der Grundfläche steht, heifst ein gerader Kegel, oder auch weil seine sämmtlichen Seiten einander gleich sind, ein gleichseitiger Kegel. Ein Kegel, dessen Axe schief auf der Grundfläche steht (Fig. 727) heifst ein schiefer Kegel oder auch ein ungleichseitiger Kegel. Aehnliche Kegel, s. n. „Aehnlich". Die Namen stumpfwinklige, spitzwinklige, rechtwinklige Kegel erhalten die Kegel von der Beschaffenheit ihres Winkels an der Spitze.

6. Ist der Kegel ein schiefer Kegel, so gibt es aufser dem System der mit dem Grundkreise parallelen Durchschnittskreise noch ein zweites System von parallelen Durchschnittsebenen, welche auch Kreise sind und Wechselschnitte des Kegels heifsen. Deren Durchmesser in dem normal auf der Grundfläche befindlichen Axendurchschnitt sind antiparallel.

Durch einen beliebigen Punkt H in dem Durchmesser BD einer der Grundfläche parallelen Durchschnittsebene BED, wenn $\triangle ABD$ der normale Axendurchschnitt des Kegels ist, ziehe die Linie KL antiparallel mit BD, so dafs also $\angle AKL = \angle ADB$ und $\angle ALK = \angle ABD$, und lege durch KL eine der Axe AC normale Ebene $KGLJ$, so ist diese Ebene eine Kreisebene und die Durchschnittslinie GJ beider Ebenen steht auf dem Axendreieck ABD normal, folglich auch normal auf den beiden im Axendreieck ABD befindlichen Linien BD und KL in dem allen dreien Linien gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt H.

Da nun $BJDG$ ein Kreis ist, so hat man

$$GH^2 = BH \times DH$$

Nun ist $\angle DLH = \angle KBH$

hierzu $\angle DHL = \angle BHK$

daher $\triangle DHL \sim \triangle KHB$

woraus $DH : LH = KH : BH$

oder $LH \times KH = BH \times DH$

mithin $LH \times KH = GH^2$

Mithin ist, weil der Punkt H ein in dem Durchmesser BD ganz willkührlich angenommener Punkt ist die Ebene $KGLJ$ ein dem Kreise $BEDJ$ congruenter Kreis.

7. Der Mantel eines geraden Kegels ist so grofs als ein Dreieck, dessen Grundlinie dem Umfang des Grundkreises und dessen Höhe der Seite des Kegels ist.

Man beschreibe in und um den Grundkreis des Kegels zwei einander ähnliche Vielecke, die Seiten des inneren Vielecks einzeln $\parallel$ den Seiten des äufseren Vielecks. Erstere sind Sehnen im Grundkreise, letztere Tangenten an dem Grundkreise. Nun bilde man an diesen Seiten als Grundlinien Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze die Spitze des Kegels ist, so fallen alle Dreiecke über dem inneren Polygon innerhalb, alle Dreiecke über dem äufseren Polygon aufserhalb des Kegelmantels; die inneren Dreiecke unter sich und die äufseren Dreiecke unter sich sind congruent und gleichschenklig. Das Loth aus der Spitze auf jede der inneren Grundlinien gefällt, d. h. die Höhe jedes der inneren Dreiecke, sei h, das Loth auf die äufseren Grundlinien ist die Seite l des Kegels, die Seiten selbst seien a und A so hat man die Summe der inneren Dreiecke $= \frac{1}{2}nah$, die der äufseren $= \frac{1}{2}nAl$. Zwischen beiden Flächenräumen ist offenbar der von ihnen

eingeschlossene Kegelmantel begriffen. Ist dieser $= M$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\, nah < M < \tfrac{1}{2}\, nAl$$

Ist ferner U der Umfang des Grundkreises, so hat man, da dieser von beiden Polygonen eingeschlossen ist

$$na < U < nA$$

und da $h < l$, so hat man hieraus

$$\tfrac{1}{2}\, nah < \tfrac{1}{2}\, Ul < \tfrac{1}{2}\, nAl$$

Mit dem beliebigen Wachsthum von n kommen die Polygonumfänge dem Kreisumfang und die Höhe h der Seite l immer näher, mithin kommen beide Dreieckssummen $\frac{1}{2} nah$ und $\frac{1}{2} nAl$ sowohl dem Kegelmantel m als auch der Fläche $\frac{1}{2} Ul$ beliebig nahe und sowohl M als $\frac{1}{2} Ul$ sind deren Grenzwerthe und einander gleich.

Da nun $\frac{1}{2} Ul$ der Inhalt eines Dreiecks ist, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Seite des Kegels ist, so ist der Kegelmantel diesem Dreiecke gleich.

8. Wenn man durch einen Kegel eine mit der Grundfläche parallele Ebene führt und den oberen Theil fortnimmt, so heifst der zurückgebliebene mit zwei Endflächen versehene Theil des Kegels **abgekürzter** oder **abgestumpfter Kegel**. Ist die durchgeführte Ebene $\parallel$ der Grundfläche so ist der Kegel **gerade abgekürzt**, ist sie der Grundfläche nicht $\parallel$, **schief abgekürzt**.

Der Mantel eines geraden und gerade abgekürzten Kegels ist gleich einem Trapez, dessen parallele Seiten den Umfängen der beiden Endkreise gleich sind und welches das zwischen den beiden Endkreisen begriffene Stück der Seite des Kegels zur Höhe hat.

An der Seite CA des ganzen geraden Kegels errichte in A die Normale $AF =$ dem Umfange des Grundkreises AB, ziehe die gerade Linie CF, so ist $\triangle CFA =$ dem ganzen Kegelmantel. Ziehe $DG \parallel AF$,

Fig. 728.

so hat man, wenn CJ die Axe des Kegels ist, und H der Punkt, in welchem sie die obere Endfläche DE schneidet,

$$\text{Umfang } AB : \text{Umfang } DE = AC : CD$$

aber auch $AC : CD = AF : DG$

folglich $\text{Umfang } AB : \text{Umfang } DE = AF : DG$

Da nun $AF = \text{Umfang } AC$

so ist $DG = \text{Umfang } DE$

daher $\triangle CDG = \text{Kegelmantel } CDE$

folglich ist das Trapez $ADGF =$ dem Kegelmantel $ABDE$.

10. Der Mantel eines gerade abgekürzten geraden Kegels ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des in der Mitte beider Endkreise ihnen $\parallel$ durchgelegten Kreises und dessen Höhe die Seite des abgekürzten Kegels ist.

Durch die Mitte K der Seite AD führe den Durchschnitt $KM \parallel$ beiden Endkreisen AB und DE und errichte in K die Normale KL auf AC, so ist (nach Satz 9) $KL =$ dem Umfange des Kreises KM.

Nun ist aber das Rechteck von der Grundlinie KL und der Höhe $AD =$ dem Trapez $ADFG$, folglich ist der Satz erwiesen.

11. Der Mantel eines geraden Kegels ist gleich dem Mantel eines Cylinders, der den halben Durchmesser der Kegelgrundfläche zum Durchmesser und die Seite des Kegels zur Höhe hat.

Ist (Fig. 728) $CH = \frac{1}{2} CJ$, so ist auch $DE = \frac{1}{2} AB$ und $\text{Umfang } DE = \frac{1}{2} \text{Umfang } AB$. Da nun der Kegelmantel nach No. 9 $= \frac{1}{2} \cdot \text{Umfang } AB$ mal AC, so ist der Kegelmantel auch $= \text{Umfang } DE$ mal AC also $=$ dem Mantel eines Cylinders von dem Durchmesser DE und der Höhe AC.

12. Der Mantel eines geraden Kegels CAB ist gleich dem Mantel eines Cylinders dessen Höhe die Höhe CJ des Kegels ist und dessen Grundfläche die in der Mitte D der Seite auf derselben bis zur Axe CJ errichtete Normale DO zum Halbmesser hat.

Es sei, Fig. 729, CAB der Axenquerschnitt eines geraden Kegels, CJ die Höhe, $CH = \frac{1}{2} CJ$, $DE \parallel AB$. Ziehe DO normal AC,

so ist $\triangle CAJ \sim \triangle DOH$

weil deren Seiten gegenseitig auf einander normal stehen.

Hieraus folgt $CA : DO = CJ : DH$

und wenn man DH und DO als Halbmesser von Kreisen ansieht,

$$CA : \text{Umf. } DO = CJ : \text{Umf. } DH$$

woraus $CA \times \text{Umf. } DH = CJ \times \text{Umf. } DO$

Fig. 729.

Nun ist aber $CA \times$ Umf. DH (nach Satz 11) gleich dem Kegelmantel und $CJ \times$ Umfang DO ist gleich dem Cylindermantel vom Halbmesser DO des Grundkreises und der Höhe CJ des Kegels.

13. Der Mantel eines gerade abgekürzten geraden Kegels ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Höhe die Seite des abgekürzten Kegels und dessen Grundfläche gleich der in der Mitte der Höhe genommenen mit den Endflächen parallelen Durchschnittsfläche ist.

Der Satz ist mit dem Satz 10 erwiesen.

14. Der Mantel eines gerade abgekürzten geraden Kegels ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders von einerlei Höhe mit dem abgekürzten Kegel, dessen Grundkreis aber die in der Mitte der Höhe auf der Kegelseite bis in die Axe errichtete Normale zum Halbmesser hat.

Ist (Fig. 721) $DEAB$ der abgekürzte Kegel, KM in der Mitte zwischen AB und DE parallel, P deren Durchschnittspunkt mit der Axe, KO normal AC, so fälle das Loth DN und man hat wie No. 12

$$\triangle DAN \sim \triangle KOP$$

daher $DN : KP = AD : KO$

Oder $HJ : KP = AD : KO$

also auch HJ : Umf. $KP = AD$: Umf. KO

oder $HJ \times$ Umf. $KO = AD \times$ Umf. KP

Da nun (nach No. 10) $AD \times$ Umfang KP = dem abgekürzten Kegelmantel und $HJ \times$ Umfang KO der im Satz bezeichnete Cylindermantel ist, so sind beide Mäntel einander gleich.

15. Die Oberflächen gerader schief abgestumpfter und schiefer Kegel sind nur durch höhere Analysis zu finden möglich, die Endformeln sind nur durch Reihen zu integriren.

16. Ist der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels $= R$, seine Höhe H seine Seite L

so ist die Grundfläche $= \pi R^2$

der Umfang derselben $= 2\pi R$

der Inhalt des Kegelmantels $= \pi RL$

die Seite $L = \sqrt{H^2 + R^2}$

also der Inhalt des Kegelmantels auch

$$= \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$$

Ist der Halbmesser der zweiten Endfläche eines gerade abgestumpften geraden Kegels $= r$, seine Seite l, seine Höhe h, so ist

der Umfang des oberen Endkreises $= 2\pi r$

der Mantel $= \pi (R + r) l$

die Seite $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

der Mantel auch $= \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

17. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist so grofs als eine Pyramide von gleich grofser Grundfläche und Höhe.

Man beschreibe in und um den Grundkreis zwei ähnliche reguläre Vielecke, betrachte diese als Grundebenen von Pyramiden, die ihre Spitze in der Kegelspitze haben, so ist der Kegel zwischen beiden Pyramiden begriffen. Eine Pyramide, deren Grundfläche gleich grofs ist mit dem Grundkreis des Kegels und die mit demselben einerlei Höhe hat, ist ebenfalls zwischen jenen beiden Pyramiden begriffen.

Nun aber ist der Unterschied der inneren und der äufseren Pyramide gleich der Pyramide von derselben Höhe, die den Unterschied der Grundflächen jener beiden zur Grundfläche hat. Der Unterschied dieser Grundflächen kann aber durch Vermehrung der Seitenzahl beider Polygone beliebig klein werden, also auch der Unterschied der Pyramiden, und daher müssen die zwischen ihnen begriffenen Körper, der gegebene Kegel und die Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe mit ihm gleich grofs sein.

18. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist = dem dritten Theil eines Cylinders von derselben Grundfläche und derselben Höhe.

Es sei CAB der gegebene Kegel im Axenquerschnitt, AB der Durchmesser $= 2AD = 2R$ der Grundfläche, CD seine Höhe H. Theile diese Höhe von der Spitze C herab in m gleiche Theile, wie CE, EF, FG ..., bezeichne diese Höhen mit h so ist $mh = H$. Führe durch jeden Theilpunkt eine Ebene $\#$ der Grundfläche und construire in und um den Kegel Cylinder von der Höhe h. Der

Fig. 730.

erste äufsere Cylinder von der Höhe $CE = h$ hat die Grundfläche vom Durchmesser aa, und die Höhe $EC = h$, der zweite äufsere Cylinder die Grundfläche vom Durchmesser cc und die Höhe $FE = h$, der $m$te äufsere Cylinder hat die Grundfläche von Durchmesser AB und die Höhe $Ay = h$.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche aa mit r, die Grundfläche selbst also mit πr^2, so ist die Grundfläche $cc = 4\pi r^2$, die folgende $9\pi r^2$, u. s. w. Die $m$te $AB = m^2\pi r^2$. Sämmtliche Cylinder umschliefsen den Kegel und deren Summe

$$\pi r^2h + 4\pi r^2h + 9\pi r^2h + \ldots m^2\pi r^2h = \tfrac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\pi r^2h$$

ist gröfser als der Kegel.

Der erste innere Cylinder besteht in der Axe CE und ist $= 0$, der zweite hat die Grundfläche aa, der dritte die Grundfläche $cc \ldots$, der $m$te die Grundfläche xx, sämmtliche Cylinder haben die Höhe h, sie werden von dem Kegel eingeschlossen, und deren Summe

$$\pi r^2h + 4\pi r^2h + 9\pi r^2h + \ldots, (m-1)^2\pi n^2h = \tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1)\pi r^2h$$

ist kleiner als der Kegel. Hieraus hat man

$$\tfrac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\pi r^2h > \text{Kegel} > \tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1)\pi r^2h$$

Bei beliebigem Wachsthum vom m verschwindet die Einheit immer mehr und mehr gegen m und beide den Kegel einschliefsenden Gröfsen nähern sich beliebig dem Körper

$$\tfrac{1}{6}m \cdot m \cdot 2m \cdot \pi r^2h = \tfrac{1}{3}m^3\pi r^2h$$

Nun ist nach Voraussetzung $mr = AD = R$, also $m^2\pi r^2 = \pi R^2$, und $mh = CD = H$.

Demnach ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi R^2 H$. D. h. = dem dritten Theil eines Cylinders von der Grundfläche und der Höhe des Kegels.

Durch Integralrechnung erhält man das Resultat einfacher:

Nimmt man CD zur Abscissenlinie, C zum Anfangspunkt der Abscissen, setzt $CF = x$, $Fc = y$, so hat man

$$CF : Fc = CD : DB$$

oder

$$x : y = H : R$$

woraus

$$y = \frac{R}{H}x$$

Nun ist die Cubaturformel für Umdrehungskörper, indem nämlich das $\triangle CDB$ um CD sich umdrehend den Kegelraum beschreibt:

$$Fx = \text{Kegel } Ccc = \pi \int y^2 \partial x + C = \pi \cdot \int \frac{R^2}{H^2} x^2 \partial x + C = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} x^3 + C$$

Für $x = 0$ fällt der Kegel in die Spitze C zusammen, wird $= 0$ und folglich wird auch $C = 0$. Mithin ist

$$\text{der Kegel } Ccc = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^3$$

Setzt man für CF die Höhe CD, also H für x, so erhält man

$$\text{den Kegel } CAB = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} H^3 = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H$$

19. Der körperliche Inhalt eines gerade abgekürzten geraden Kegels ist gleich dreien vollständigen Kegeln von einerlei Höhe mit dem abgekürzten, deren Grundflächen der Reihe nach der untere, der obere und das Mittel beider Endkreise sind.

Ein Kegel ist gleich einer Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe; führt man durch beide Körper parallel mit den Grundflächen genommene Durchschnittsebenen in gleichen Abständen von der Spitze, so sind in beiden Körpern diese Durchschnittsflächen einander gleich. Die beiden oberen Körper sind daher einander gleich, also auch die beiden abgekürzten unteren. D. h. Ein abgekürzter Kegel ist = einer abgekürzten Pyramide

wenn beide gleiche Endflächen und gleiche Höhen haben. Nun gilt aber der Satz von der abgekürzten Pyramide also auch vom abgekürzten Kegel.

20. Ein gerader gerade abgekürzter Kegel ist = dem dritten Theil von dreien Cylindern, welche mit dem Kegel gleiche Höhe haben, von denen der eine die untere, der zweite die obere Grundfläche und der dritte das Mittel beider Grundflächen zur Grundfläche hat.

Es sei, Fig. 729, der Axenquerschnitt *DEAB* des abgekürzten Kegels mit dem Durchschnitt *CED* des Ergänzungskegels, *AJ* sei *R*, $DH = r$, $HJ = H$, so hat man die Ergänzungshöhe *CH* aus der Proportion

$$AJ : DH = CJ : CH$$

oder $$R : r = h + CH : CH$$

woraus $CH = h \cdot \frac{r}{R - r}$ und $CJ = h \cdot \frac{R}{R - r}$

Nun ist der Kegel $CAB = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \frac{R}{R - r}$

der Kegel $CDE = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{r}{R - r}$

folglich der abgekürzte Kegel *ABDE*

$$= \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + rR + R^2)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Kegelmantel, s. u. „Kegel“.

Kegelschnitte. Construction derselben, s. den Art.: „Brennpunkte der Kegelschnitte“, pag. 421 mit Fig. 257 bis 259. S. ferner „Brennpunkt der Parabel“, pag. 416 mit Fig 253 bis 255; „Brennpunkte der Ellipse“, pag. 218 mit Fig. 256; „Brennpunkte der Hyperbel“, pag 420. S. ferner den Art. „Curven“ von No. 12, pag. 174 bis No. 27, pag. 184 mit Fig. 532 bis 535, welches das rein Analytische enthält; „Bahn der Weltkörper“ von No. 12, pag. 296 mit Fig. 188 bis 191; „Bahn der Weltkörper, die Ellipse“, pag. 303.

Kegelspiegel ist ein Spiegel mit kegelförmiger Oberfläche. Die katoptrischen Gesetze, welche für die Entstehung des Spiegelbildes hier einwirken, sind in dem Art. „Cylinderspiegel“ speciell auseinander gesetzt. Dieselben auf die Kegelform des Spiegels angewendet, ergeben die hierhergehörigen Resultate. Die Gesetze der Spiegelung sind wie beim ebenen Spiegel und man hat auch beim Kegel jeden Punkt, der einen Lichtstrahl aufnimmt, als den Punkt einer die Kegelfläche tangirenden Ebene zu betrachten.

Es sei *CAB*, Fig. 729, der Durchschnitt eines Kegels, *C* dessen Spitze, *CD* dessen Axe, also *AC*, *BC* Seiten des Kegels, so kehren die Lichtstrahlen in sich selbst zurück, die normal auf eine Seite des Kegels fallen. So z. B. tritt das Bild von dem Punkt *E* in der Normalen *EF* auf den Punkt *F* in *FE* nach *E* zurück; der Lichtstrahl *EG* dagegen reflectirt nach *GH*, wenn $\angle EGB = \angle HGC$ ist.

Ist also *E* das Auge, so empfängt es in *G* das Bild von *H*; alle innerhalb des Winkels *HGE* befindlichen Gegenstände werden vom Auge in *E* innerhalb der Linie *GF* gesehen. Um z. B. zu erfahren, wo der Lichtpunkt *J* in den Spiegel fällt, fälle aus *J* die Normale *JL* auf *BC*, verlängere diese rückwärts bis *M*, so dafs $JM = EF$, ziehe *MF* und $JN \mp MF$ so ist *N* der verlangte Spiegelungspunkt.

Fig. 731.

Denn es ist $JM : JL = FN : NL$

oder $EF : FN = JL : NL$

mithin $\triangle EFN \sim \triangle JLN$

woraus $\angle ENF = JNL$

2. Um mittelst des Kegelspiegels ein bestimmtes Bild zu sehen, denn eine abzuspiegelnde Zeichnung, welche wie beim Cylinderspiegel ein Zerrbild ist, so verfährt man für Anfertigung eines solchen Bildes folgendermaafsen.

Es sei Fig. 732 der Kreis die Gröfse der Grundfläche des Kegelspiegels, so zeichne auf der Papierfläche das Bild, welches durch den Spiegel erscheinen soll. Es sei *A* ein Punkt des Bildes, so ziehe den Halbmesser *CE* mit Verlängerung *EG* durch den Punkt *A*, errichte in *C* ein Loth, es sei *CD* die Höhe der Axe des Kegels und in der doppelten Höhe *CB* der Ort des Auges. Ziehe *ED*, so ist *DEC* das halbe Profil des Kegelspiegels. Ziehe nun *BA*, welche die Ke-

gelseite DE in F schneidet, so ist F der Punkt auf der Oberfläche des Kegelspiegels, in welchem durch das in B befindliche Auge der Punkt A gesehen werden soll und der dem Punkt A in der Zeichnung entsprechende Punkt muſs die Lage haben, daſs seine Spiegelung in F geschieht. Demnach hat man nur nöthig an die Linie EF in F einen $\angle GFE = \angle AFE$ zu zeichnen, und man erhält in der Papierebene des zu verzeichnenden Zerrbildes G als den Punkt, der von B aus gesehen in F reflectirt.

Fig. 732.

Keil ist ein festes dreiseitiges Prisma, auf dessen Seitenflächen Kräfte wirken; er war bei den Alten die sechste Potenz. Von den drei wirkenden Kräften sind zwei gegeben, die dritte ist zu bestimmen; jene beiden sind die Widerstände des Keils, die dritte ist die Kraft des Keils. Die Seitenflächen, auf welche die Widerstände wirken, heiſsen die Seiten des Keils, die Seitenfläche auf welche die Kraft wirkt, der Rücken des Keils. In der Regel wird angenommen, daſs Kraft und Widerstände in einerlei auf den Seitenflächen normal befindlichen Ebene sich befinden. Daher nennt man auch, weil es auf die Länge der Flächen nicht ankommt, die Durchschnittslinien der drei Seitenflächen in jener normal durchgelegten Ebene Seiten und Rücken des Keils. Der Neigungswinkel der beiden Seitenflächen also der Winkel der Seiten in der Durchschnittsebene heiſst der Winkel des Keils.

2. Sind die Kraft und die Widerstände auf den Rücken und die Seiten des Keils normal wirkend, mit einander im Gleichgewicht, so verhält sich die Kraft zu den Widerständen wie der Rücken zu den Seiten des Keils.

Denn wenn 3 Kräfte mit einander im Gleichgewicht sein sollen, so ist Bedingung: Erstens, daſs sie in einerlei Ebene sich befinden und zweitens in einerlei Punkt sich schneiden. Verlängert man also die Kräfte V, P, Q bis in die Mitte des Keils, so schneiden sie sich in einem Punkt C, und deren Gleichgewicht erfordert

Fig. 733.

$$V : P : Q = \sin \angle PCQ : \sin VCQ : \sin \angle PCV$$
$$= \sin D \quad : \sin B \quad : \sin A$$

mithin sind $V : P : Q = AB : AD : BD$

3. Wenn auf die beiden Seiten des Keils unter beliebigen Winkeln Widerstände wirken, die nur ihren Richtungen nach zurückweichen können, so soll eine auf den Rücken des Keils wirkende Kraft so bestimmt werden, daſs mit Rücksicht auf die Reibung der Seiten des Keils an den Widerständen, entweder die geringste Vermehrung oder die geringste Verminderung der Kraft ein Vor- oder Rückgleiten des Keils zur Folge hat.

Es sei ABC, Fig. 725, der normale Durchschnitt des Keils, in dessen Ebene alle Kräfte gerichtet angenommen werden. Halbire den $\angle ACB$ durch CD, DV sei die Richtung der auf den Rücken AB wirkenden Kraft V, PE und QF seien die Richtungen der Widerstände P und Q, die gegen die Keilseiten so wirken, daſs sie bei Aufhebung des Gleichgewichts nur nach diesen Richtungen vor- oder rückgleiten können. Um die Lage dieser Kräfte zu bestimmen, setze $\angle DCA = \angle DCB = \alpha$, $\angle DEP = \beta$, $\angle DFQ = \gamma$, $\angle CDV = \delta$.

Wären keine Reibungswiderstände vorhanden, so würden die mit V im Gleichgewicht befindlichen Pressungen aus P und Q auf die ihnen vorstehenden Seiten AC, BC nach normal auf denselben befindlichen Richtungen GD und HD

Fig. 734.

wirken und die der Kraft V gleichgeltenden auf die Wirkungen P und Q vertheilten Seitenkräfte nach DG und DH gerichtet sein.

Der von der Berührung der Gegenlagen mit den Keilseiten herrührenden Reibung zufolge haben die Widerstände Richtungen, die für $P+$ Reibung (R) zwischen DG und V und die für $Q+R$ zwischen DH und V liegen. Und zwar sind WD und $W'D$ diese Richtungen, und zugleich DW und DW' die Richtungen der den Widerständen $P+R$ und $Q+R$ für's Gleichgewicht entgegenwirkenden Seitenkräfte W und W' der Kraft V, wenn $\angle GDW = \angle HDW' = \tau$ der Reibungswinkel ist.

Nun hat man für's Gleichgewicht, wenn DW' zur Momentenaxe genommen wird,

$$W \cdot \sin WDW' = V \sin VDW'$$

woraus

$$W = \frac{\sin VDW'}{\sin WDW'} \cdot V$$

Nun ist

$$\angle WDW' = \angle GDH - 2\tau = 180^\circ - 2\alpha - 2\tau$$

$$\angle VDW' = \angle VDH - \tau = \angle CDH - \delta - \tau = 90^\circ - \alpha - \delta - \tau$$

woher $W = \dfrac{\cos(\alpha + \delta + \tau)}{\sin 2(\alpha + \tau)} \cdot V$ (1)

Eben so ist, DW zur Momentenaxe genommen,

$$W' = \frac{\sin VDW}{\sin WDW'} \cdot V = \frac{\sin(\angle CDG + \delta - \tau)}{\sin 2(\alpha + \tau)} = \frac{\sin(90^\circ + \delta - \alpha - \tau)}{\sin 2(\alpha + \tau)} V = \frac{\cos(\alpha + \tau - \delta)}{\sin 2(\alpha + \tau)} V \quad (2$$

Die nach JW gerichtete Seitenkraft W und der nach JE gerichtete Widerstand P geben nur eine Mittelkraft, welche im Falle des Gleichgewichts auf der Richtung, nach welcher die Widerstände ausweichen können, normal sein muſs.

Ist also JK normal JE, so muſs JK die Richtung der Mittelkraft aus W und P sein.

Nun ist aber $\angle EJW = \angle EJC + \angle WJC = \beta - \alpha + GJD = 90^\circ + \beta - \alpha - \tau$

und $\angle KJW = \angle EJW - \angle EJK = \beta - \alpha - \tau$

Daher JK zur Momentenaxe genommen

$$P \sin 90^\circ = P = W \sin(\beta - \alpha - \tau)$$

und $W = \dfrac{P}{\sin(\beta - \alpha - \tau)}$ (3)

Um W' zu bestimmen errichte in M, dem Durchschnittspunkt zwischen den Richtungen der Kräfte Q und W' auf FQ eine Normale ML, so ist diese die Richtung der Mittelkraft zwischen diesen beiden Kräften, von welchen Q nach NF und W' nach DW' gerichtet ist;

und es ist $Q \sin NML = W' \sin W'ML$

Nun ist

$$\angle FMW' = \angle FNC + \angle W'OC = \gamma - \alpha + \angle W'OC = \gamma - \alpha + \angle DON = \gamma - \alpha + 90^\circ - \tau$$

folglich $\angle W'ML = \angle FMW' - FML = \gamma - \alpha - \tau$

und $W' = \dfrac{Q}{\sin(\gamma - \alpha - \tau)}$ (4)

Werden diese Werthe von W und W' (Gl. 3 und 4) in die obigen Gleichungen 1 und 2 für W und W' substituirt, so erhält man

$$V = \frac{\sin 2(\alpha + r)}{\sin(\beta - \alpha - r)\cos(\alpha + \delta + r)} \quad P = \frac{\sin 2(\alpha + r)}{\sin(\gamma - \alpha - r)\cos(\alpha + r - \delta)} Q \tag{5}$$

Aus diesem doppelten Ausdruck für V ergibt sich die Bedingungsgleichung für die Gröfsen P und Q, bei welchen das Gleichgewicht in der oben betrachteten Art allein bestehen kann, nämlich:

$$P : Q = \sin(\gamma - \alpha - r)\cos(\alpha + r - \delta) : \sin(\beta - \alpha - r) \cdot \cos(\alpha + \delta + r) \tag{6}$$

2. Es ist also im betrachteten Fall V für's Gleichgewicht mit P und Q am gröfsten, weil mit der geringsten Vermehrung von V' der Keil vorwärts getrieben wird.

Soll aber die Kraft V' blofs das Rückgleiten des Keils verhindern, so dafs bei der geringsten Verminderung von V' das Rückgleiten geschehen würde. Dann ist schon die Reibung mit ihrem Widerstande R dem Widerstand V' zu Hülfe gekommen und hat einen Theil der Kraft $P + Q$ zum Rückgleiten selbst übernommen. Es ist also $V' = P + Q - R$. Aus diesem Grunde mufs in den vorigen Formeln der $\angle r$ subtractiv genommen werden.

Man hat demnach für diesen Fall

$$\text{Für Gl. 2:} \quad W' = \frac{\sin(90^\circ + \delta + r - \alpha)}{\sin 2(\alpha - r)} V = \frac{\cos(\alpha - \delta - r)}{\sin 2(\alpha - r)} V \tag{7}$$

$$\text{Für Gl. 3:} \quad W = \frac{P}{\sin(\beta + x - \alpha)} \tag{8}$$

$$\text{Für Gl. 4:} \quad W' = \frac{Q}{\sin(\gamma + r - \alpha)} \tag{9}$$

$$\text{Für Gl. 5:} \quad V = \frac{\sin 2(\alpha - r)}{\sin(\beta + r - \alpha)\cos(\alpha + \delta - r)} \quad P = \frac{\sin 2(\alpha - r)}{\sin(\gamma + r - \alpha)\cos(\alpha - \delta - r)} Q \tag{10}$$

$$\text{Für Gl. 6:} \quad P : Q = \sin(\gamma + r - \alpha) \cdot \cos(\alpha - \delta - r : \sin(\beta + r - \alpha) \cdot \cos(\alpha + \delta - r) \tag{11}$$

3. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist $\delta = 0$, $\beta = \gamma$.

Dann wird $V = \dfrac{\sin 2(\alpha \pm r)}{\sin(\beta - \alpha \mp r)\cos(\alpha \pm r)} \quad P = \dfrac{\sin 2(\alpha \pm r)}{\sin(\beta - \alpha \mp r)\cos(\alpha \pm r)} Q$

mithin $P = Q$

$$V = \frac{2 \sin(\alpha \pm r)}{\sin(\beta - \alpha \mp r)} P \tag{12}$$

Setzt man nun $Q = P$, bringt den Sinus des doppelten Winkels im Zähler auf den einfachen Winkel, so hat man

Bringt man diese Winkel ebenfalls auf die einfachen, so erhält man

$$V = 2P \frac{\sin\alpha \cos r \pm \cos\alpha \sin r}{\sin(\beta - \alpha)\cos r \mp \cos(\beta - \alpha)\sin r} = 2P \frac{\sin\alpha \pm \cos\alpha \, tg\, r}{\sin(\beta - \alpha) \mp \cos(\beta - \alpha)\, tg\, r}$$

$$= 2P \frac{\sin\alpha \mp \mu \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha) \mp \mu \cos(\beta - \alpha)}$$

4. Wenn die Richtungen der Widerstände normal gegen die Seiten des Keils sind, so ist $\beta = 90^\circ + \alpha$, also

$$V = \frac{2 \sin(\alpha \pm r)}{\sin(90^\circ \mp r)} P = \frac{2 \sin(\alpha \pm r)}{\cos r} P = \frac{2(\sin\alpha \cos r \pm \cos\alpha \sin r)}{\cos r} P$$

$$= 2(\sin\alpha \pm \cos\alpha \, tg\, r) P = 2(\sin\alpha \pm \mu \cos\alpha) P.$$

5. Wenn die Richtungen der Widerstände normal auf die Axe oder Länge des Keils sind, so ist $\beta = 90^\circ$, also

$$V = \frac{2 \sin(\alpha + r)}{\sin[90^\circ - (\alpha \pm r)]} P = \frac{2 \sin(\alpha \pm r)}{\cos(\alpha \pm r)} P = 2P\, tg(\alpha \pm r) = 2P \frac{tg\,\alpha \pm tg\, r}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\, r} = 2P \frac{tg\,\alpha \pm \mu}{1 \mp \mu\, tg\,\alpha}$$

6. Wenn V ein Minimum sein soll, so mufs der Nenner ein Maximum sein, also in Formel 12 der Nenner $= 1$. Dann hat man

$$\beta - (\alpha \pm r) = 90^\circ$$

also $\beta = 90^\circ + \alpha \mp \tau$

und $V = 2P \sin(\alpha \pm \tau) = 2P(\sin\alpha \cos\tau \pm \cos\alpha \sin\tau)$

$$= 2P(\sin\alpha \pm \cos\alpha \, tg\, \tau)\cos\tau = 2P\frac{(\sin\alpha \pm \cos\alpha \, tg\, \tau)}{\sqrt{1 + tg^2\tau}}$$

$$= 2P\frac{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

7. Die Resultate des Gleichgewichts durch μ ausgedrückt, werden unmittelbar folgender Art gefunden. Es sei, Fig. 735, ABC der mittlere normale Querschnitt des Keils, DC die den Winkel an der Spitze halbirende Mittellinie, auf diese wirke die Kraft V und die beiden gleichen Widerstände P wirken unter dem $\angle \beta$ mit DC.

Bezeichnet man den von jedem Widerstande P auf jede Seite ausgeübten Normaldruck mit N, so äufsern die einander berührenden Flächen eine Reibung μN, welche längs der Seiten des Kegels als Hindernifs wirkt.

Soll nun das Gleichgewicht so bestimmt werden, dafs die geringste Vermehrung

Fig. 735.

von V eine Fortbewegung des Keils zur Folge hat, so mufs V im Gleichgewicht sein mit den Normalpressungen N, den die Seiten des Kegels von den Widerständen erleiden und mit den seine Bewegung in der Richtung DC hindernden nach CA und CB gerichteten Reibungen μN. D. h. Die Normalpressungen und die Reibungshindernisse müssen eine nach CD gerichtete der V gleiche Mittelkraft geben.

Nun bilden die Normalpressungen $EF = N$ mit DC den $\angle EFC = 90^\circ - \alpha$. Setzt man ihre Mittelkraft $FG = Q$, so ist $Q = 2 \cdot EF \sin FEE' = 2N \sin\alpha$, die Reibungen betragen zusammen $EE' = 2\mu\, EF \cos\alpha = 2\mu\, N \cos\alpha$,

mithin ist $V = 2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)N$

Um N mit P zu vergleichen hat man dem nach PE gerichteten Widerstande entgegen den Normaldruck N gegen P in E nach der Richtung FE, welcher aus der nach DC wirkenden Kraft V sich zerlegt.

Diesem Normaldruck N entgegen wirkt nach der Richtung AC die zwischen den Berührungsflächen der Keilseiten und den von P angetriebenen Vorlagen entstehende Reibung μN. Reducirt man die Kraft und die Reibung μN auf die Richtung von P, so mufs die algebraische Summe der beiden reducirten Wirkungen $+ P = 0$ sein.

Also $N \cos PEN - \mu N \cos PEA - P = 0$

oder $N \sin(\beta - \alpha) - \mu N \cos(\beta - \alpha) - P = 0$

woraus $N = \dfrac{P}{\sin(\beta-\alpha) - \mu\cos(\beta-\alpha)}$

Diesen Werth in den obigen Ausdruck für V gesetzt, gibt

$$V = 2P \cdot \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha) - \mu\cos(\beta-\alpha)}$$

8. Dieser Ausdruck ist derjenige Werth von V, dessen geringste Vermehrung eine Aufhebung des Gleichgewichts zur Folge hat, indem dann der Keil vorwärts getrieben wird. Der Ausdruck verwandelt sich unmittelbar in den für dasjenige V', welches als Minimum bei der geringsten Verminderung das Rückgleiten des Keils zur Folge hat, wenn man μ subtractiv nimmt, wie dies No. 2 für τ auseinander gesetzt ist, man hat also

$$V' = 2P\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha) + \mu\cos(\beta-\alpha)}$$

Keilzahlen werden bisweilen diejenigen Zahlen genannt, welche ein Product aus 3 ungleichen Zahlen sind als $5 \times 6 \times 7 = 210$.

Kennzahl gebräuchlicher **Kennziffer**, s. „Characteristik". Kennzahl ist jedenfalls entsprechender, denn es kann die Characteristik eine aus zwei oder mehreren Ziffern bestehende Zahl sein.

Keplers Gesetze über den Lauf der Planeten. Die frühere Planetentheorie war folgende:

1. Die Bahnen aller Planeten sind Kreise.

2. Die Sonne befindet sich nicht in dem Mittelpunkt dieser Kreise.

3. Innerhalb des Kreises befindet sich ein Punkt, der Ausgleichungspunkt (punctum aequans), von dem aus gesehen der Planet in gleichförmiger Bewegung zu sein scheint; d. h. dafs der Planet von jedem Ort seiner Bahn aus gehend gedacht, in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten hat und somit überall in gleichen Zeiten gleich grofse Kreisbogen zu durchlaufen scheint, wiewohl er von der Sonne aus betrachtet in ungleichförmiger Bewegung sich befindet.

Wenn der Kreis eine Planetenbahn, C dessen Mittelpunkt, S den Ort der Sonne bedeutet, so sollte dieser Punkt, der Ausgleichungspunkt für die Erdbahn im Mittelpunkt C liegen, so dafs also die

Fig. 736.

Erde eine wirklich gleichförmige Bewegung hatte, indem zu den gleichen Winkeln $\alpha C\beta$ und $\gamma C\delta$ auch gleiche Bogen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gehören.

Bei den anderen Planeten dagegen lag der Ausgleichungspunkt der Sonne gegenüber ebenfalls excentrisch in p, von wo aus der Planet gleiche Winkelgeschwindigkeit hatte, so dafs gleichzeitig die gleichen $\angle\,\varepsilon p\eta$ und $\gamma p\delta$ und mit ihnen die ungleichen Bogen $\varepsilon\eta$ und $\gamma\delta$ durchlaufen wurden.

Bei der Erdbahn war nun CS die Excentricität, was sie noch jetzt ist, bei den anderen Planeten war dagegen pS als Excentricität festgestellt, was sie nicht ist.

Man sieht, die Beobachtungen waren so scharf und die Schlüsse so richtig, dafs die Astronomen der Wahrheit sehr nahe kamen. Allein die Idee von den Planetenbahnen in excentrischen Kreisen hatte sich bei den Astronomen so festgesetzt, dafs sie von Copernicus und Tycho de Brahe auch auf Kepler überging und bei ihm feste Wurzel fafste. Schon Ptolemäus (150 J. n. Chr.) hatte excentrische Kreise für die Bahnen der Planeten und der Sonne, welche sich sämmtlich um die Erde dreheten.

Dafs die Erde allein die Ehre hatte, gleichförmig sich zu bewegen, die anderen Planeten nicht, lag offenbar in der Beobachtung grofser Excentricitäten bei den übrigen Planeten die, mit Ausnahme der Venus, bei welcher sie kleiner ist, alle viel gröfser sind als bei der Erde. Bei dem Mars beträgt sie fast das Achtfache der der Erde und gegen $1/10$ des halben grofsen Bahndurchmessers.

Es ist übrigens klar, dafs der Punkt p dem Aphel A zu näher liegen mufs, weil dort wegen der Langsamkeit des Gestirns ein nur kleiner Bogen gegen den am Perihel bei dort grofser Geschwindigkeit in einerlei Zeit zurückgelegt wird.

Kepler bemühete sich nun, auf dem excentrischen Kreis des einen oder des anderen Planeten den Ort jenes Ausgleichungspunkts zu ermitteln. Tycho hatte sich viel mit dem Mars beschäftigt und gefunden, dafs pC und Sc verschieden seien, Kepler setzte Zweifel darein, und beschlofs, eine genaue Untersuchung nochmals selbstständig vorzunehmen, warf sich auch die Frage auf, wie denn die Erde gegen alle übrigen Planeten in Betreff der Lage dieses wichtigen Punktes eine Ausnahme machen sollte.

Um dies zu ermitteln war vor allen Dingen die Excentricität der Erdbahn zu bestimmen, und dies that Kepler auf folgende Weise mit Hülfe von Marsbeobachtungen.

Der Mars hat eine Umlaufszeit von 686,979 .. also von 687 Tagen. Wird derselbe, wie Kepler gethan, 3 mal, das zweite Mal an dem 687ten Tage nach dem ersten, das dritte Mal an dem 687ten Tage nach dem zweiten Beobachtungstag beobachtet, so hat sich der Mars bei jeder Beobachtung in einem und demselben Punkt am Himmel befunden, und der auf die Ekliptik reducirte Ort ist jedesmal derselbe Punkt M in der Ebene der Ekliptik.

Hat die Erde bei der ersten Beobachtung in E gestanden, so ist sie in 365 Tagen wieder in E gewesen und hat nun in den nah bis zum zweiten Beobachtungstage verflossenen 322 Tagen den Bogen $PE''E'$ beschrieben und steht an

diesem Tage in E'; am dritten Beobachtungstage in E'', so dafs Bogen $EE' =$ Bogen $E'E'$. Es sei C der Mittelpunkt

Fig. 737.

der Ekliptik, AP die bekannte Absidenlinie, S die Sonne. Die Figur wird zu weiterer Berechnung verzeichnet.

Mit den bekannten Orten M und S ist auch die Richtung MS, die heliocentrische Länge des Mars bekannt, die Richtungen ES, $E'S$, $E''S$ die Längen der Sonne und die Richtungen EM, $E'M$, $E''M$ die geocentrischen Längen des Mars sind beobachtet. Die $\angle ESM$, $\angle E'SM$, $\angle E''SM$ sind = der heliocentrischen Länge des Mars weniger den Längen der Erde in den Punkten E, E', E''. Desgleichen sind gemessen die $\angle SEM$, $SE'M$ und $SE''M$.

Es sind mithin den Dreiecken SEM, $SE'M$ und $SE''M$ sämmtliche Winkel bekannt und aus ihnen die relativen Gröfsen deren Seiten, wenn man eine derselben z. B. MS oder AP als Einheit nimmt. Bekannt sind also die Seiten ES, $E'S$, $E''S$.

Mit den bekannten Seiten ES und $E'S$, dem eingeschlossenen $\angle ESE'$ (Unterschied der Längen der Erde in den Standpunkten E, E') construirt nun Kepler das neue $\angle ESE'$; eben so die Dreiecke ESE'' und $E'SE''$; hieraus sind also auch die Winkel des neuen Dreiecks $EE'E''$ bekannt.

Der Peripheriewinkel $EE''E'$ ist $= \frac{1}{2}$ Centriwinkel ECE', folglich sind in dem gleichschenkligen $\triangle ECE'$ die $\angle E'EC$ und $EE'C$ bekannt, und zwar jeder $= 90° - \frac{1}{2}ECE'$ und mit diesen die Seite EC.

Die Seite ES ist aus dem $\triangle SEM$ bekannt, der $\angle CES = \angle SEE' - \angle CEE'$, folglich ist das $\triangle ESC$ bekannt und mit diesem die verlangte Linie CS.

Die numerische Ausführung aller dieser höchst mühsamen und langwierigen Rechnungen ergab für den Halbmesser $PC = 1$ die Länge $CS = 0{,}018$. (Es ist dies die Excentricität der Erdbahn, welche in der neuesten Astronomie bei gröfseren Hülfsmitteln 0,0167.. gefunden worden ist.) Aber Tycho hatte früher schon die Entfernung (Sp) der Sonne von dem punctum aequans, für welchen er irrthümlich das Centrum C genommen hatte, $= 0{,}036$ gefunden und somit war erwiesen, d a f s d e r A u s g l e i c h u n g s p u n k t a u f d e r e i n e n u n d d i e S o n n e a u f d e r a n d e r e n S e i t e i n g l e i c h e n A b s t ä n d e n v o n d e m M i t t e l p u n k t d e r B a h n e n t f e r n t s i n d.

Hierdurch war es möglich, den Radiusvector der Erde bei jedem beliebigen Standpunkt derselben in der Ekliptik zu finden. Denn bei vorausgesetzter Kreisform derselben hatte Kepler (s. oben) den Halbmesser $CE = CE' = CA = CP$ gefunden. Für irgend einen Standpunkt E' der Erde zog Kepler die Linie $E'p$. Da nun von p aus die Erde gleichförmig sich bewegt, so betrachtete er $\angle E'pA$ als die mittlere Anomalie, welches zwar nicht richtig (vergl. „A n o m a l i e"), allein bei der geringen Länge von Cp gegen CA einen nur geringen Unterschied giebt. Mit dem bekannten $\angle E'pA$ ist auch sein Supplement $\angle E'pC$ bekannt, hierzu der bekannte Halbmesser CE' und Cp macht das $\triangle E'Cp$ bestimmt. Hieraus erhält man das Supplement $\angle E'CS$ von $\angle E'Cp$ und man hat in dem $\triangle E'CS$ durch den Halbmesser $E'C$, der Excentricität CS und dem eingeschlossenen $\angle E'CS$ des $\triangle E'CS$ auch den Radiusvector SE' gefunden. (Unter E' einen beliebigen, nicht den oben angeführten Beobachtungspunkt E' verstanden.)

Mit der solchergestalt festgestellten Theorie der Erdbahn konnte auch die Theorie für andere Planeten ermittelt werden, und Kepler unternahm dies für den Mars, der ihm schon für die Erdbahn gedient und für welche Tycho so sehr vor- und mitgearbeitet hatte.

Aus den bekannten Winkeln SEE' und $SE'E$ in dem berechneten $\triangle EE'S$ und den gemessenen Winkeln SEM, $SE'M$ waren die Winkel MEE' und $ME'E$ bekannt geworden; man kannte also in dem $\triangle EE'M$ die Seite EM und also in $\triangle ESM$ die Seiten ES und EM nebst dem von ihnen eingeschlossenen $\angle SEM$ und hatte somit die Seite SM, den auf die Ekliptik reducirten Radiusvector des Mars und $\angle ESM$ die heliocentrische Länge des Mars in der Ekliptik.

Wegen der den verstehenden Berechnungen zu Grunde liegende Kreisform konnten deren Resultate mit denen aus Beobachtungen nicht genau übereinstimmen, besonders für den Mars, dessen Bahn eine so bedeutende Excentricität also eine von dem Kreise auffallend abweichende Form hat. Der Unterschied bei Winkeln betrug acht Minuten. Dies war der Grund, dafs Kepler mifstrauisch wurde, die Kreisform in Zweifel zog und daran ging die Form der Bahn am Mars genauer zu untersuchen, wonach er die Ellipse fand und somit der Urheber einer gänzlichen Umgestaltung der astronomischen Principien wurde.

Er berechnete nämlich nach der Theorie des excentrischen Kreises 3 Abstände des Mars, den einen nahe dem Peribel, die anderen beiden etwa 90° von dem ersten Abstand entfernt, also ungefähr, wo die kleine Axe der Marsbahn hintrifft, und suchte dann dieselben Abstände durch wirkliche Beobachtungen.

Die berechneten Abstände waren alle gröfser als die beobachteten: Sie waren, den mittleren Halbmesser der Erdbahn = 1 gesetzt

berechnet	1) 1,66605	2) 1,63883	3) 1,48539
beobachtet	1) 1,66255	2) 1,63100	3) 1,47750
Unterschied	1) 0,00350	2) 0,00783	3) 0,00789

Der Unterschied in der Nähe des Perihels war am geringsten, die beiden andern ziemlich gleich grofs, am gröfsten (wegen der dort hintreffenden kleinen Axe der Ellipse), und es war somit erwiesen, dafs die Marsbahn eine geschlossene Curve von ungleichen Hauptdurchmessern, und deren längerer Durchmesser die Absidenlinie ist.

Aus Tycho's ihm hinterlassenen Papieren bestimmte er des Mars

aphelische Länge	1,66780
perihelische Länge	1,38500
Unterschied	0,28280

und die Hälfte 0,14140 die Excentricität der Marsbahn. Kepler fand demnach für die Marsbahn eine ovale Curve, kam bald auf den Gedanken, dafs sie eine Ellipse, fand durch Rechnung nach der Theorie der Ellipse diese Voraussetzung sicher und nachdem Kepler dieselben Resultate einer ovalen Bahn bei noch anderen Planeten vorfand, so entstand das erste Keplersche Gesetz.

Die Bahnen sämmtlicher Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Das zweite Keplersche Gesetz.

In gleichen Zeiten werden von dem Radiusvector ungleiche Bogen in der Bahn aber gleiche Sectoren beschrieben.

Es heifst dies, dafs die vom Radiusvector in gleichen Zeiten der Bahnebene abgeschnittene Flächenräume einander gleich sind. Dieser Satz ist in dem Art. „Bahn", pag. 272 mit Fig. 167 erwiesen.

Durch den Vergleich der Entfernungen der Planeten von der Sonne mit deren Umlaufszeiten, dafs z. B. Jupiter nur $5\frac{1}{5}$ mal weiter als die Erde von der Sonne absteht und doch $11\frac{6}{7}$ Jahre, also $11\frac{6}{7}$ mal mehr Zeit als die Erde zur Umdrehung braucht, indem $(5\frac{1}{5})^3$ sehr nahe = ist $(11\frac{6}{7})^2$ brachte ihn auf die dritte Regel:

Die Quadratzahlen der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Cubikzahlen der mittleren Abstände dieser Planeten von der Sonne.

Keplers Problem, s. n. dem Art. „Anomalie" mit Fig. 66.

Kernform, (Kryst), s. v. w. „Grundform".

Kette, Mefskette, s. u. Baculometrie.

Kettenbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl, dessen Nenner eine ganze Zahl nebst einem Bruch ist. S. den Art. „Bruch" No. 3, pag. 434. Z. B.

$$\cfrac{2}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5+\dots}}}$$

In der Regel ist jeder der Zähler die Einheit wie:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}}}$$

Ist der erste Bruch mit $\frac{1}{7}$ zu Ende, dann hat man den untersten Nenner

$2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; der Bruch des ersten Nenners ist also $\frac{1}{13:5} = \frac{5}{13}$ und der ganze Kettenbruch $= \cfrac{2}{4 + \frac{5}{13}} = \frac{2}{57:13} = \frac{26}{57}$

Der zweite Kettenbruch ist =

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{29:7}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{7}{29}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{94:29}} = \cfrac{1}{5+\frac{29}{94}} = \frac{1}{499:94} = \frac{94}{499}$$

Der Art. „Bruch“, No. 5 zeigt, dafs mit Verwandlung eines Bruchs in einen Kettenbruch der gröfste gemeinschaftliche Theiler zwischen Zähler und Nenner ausgestofsen und der Bruch in seinen kleinsten Zahlen angegeben wird, sobald man den Kettenbruch wieder in einen reinen Bruch umformt.

2. Der Kettenbruch dient auch dazu, um das Verhältnifs grofser Zahlen oder Zahlen mit vielen Decimalen näherungsweise in kleineren Zahlen auszudrücken. Z. B. Das Verhältnifs des Durchmessers eines Kreises zu dessen Umfang ist $= 1:3{,}141592653 \ldots$

Man erhält den Kettenbruch

$$3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}}$$

und hieraus die Näherungswerthe

$$3;\ 3\tfrac{1}{7} = \frac{22}{7};\ 3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}} = \frac{333}{106};\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113};\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\frac{1}{292}}}} = \frac{103993}{33102}$$

Es ist $\frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots$

$\frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots$

$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$

Dieser Bruch weicht erst in der 7ten Decimalstelle von der richtigen Zahl ab und ist also ziemlich genau.

3. Es sei der Bruch $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln und man habe:

$$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b};\quad \frac{b}{c} = n + \frac{d}{c};$$
$$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d};\quad \frac{d}{e} = q + \frac{f}{e};$$
$$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f};\quad \frac{f}{g} = s + \frac{h}{g}$$

so entsteht der Kettenbruch für

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}}}$$

Der uneigentliche Bruch

$$\frac{a}{b} = m + \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}}$$

Der Kettenbruch gibt folgende Näherungswerthe

$$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b} = m + \cfrac{1}{n+\frac{d}{c}} = m + \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\frac{e}{d}}} = m + \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\frac{f}{e}}}}$$ u. s. w.

Hieraus erhält man ans den hintereinander aufgeführten Werthen von $\frac{a}{b}$

I. $mb = a - c$

Ans dem ersten nnd zweiten Werth entsteht

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{nc+d}$$ woraus

II. $(mn+1)\,b = na + d$

Ferner

III. $(mnp + p + m)\,b = (np+1)\,a - e$

IV. $(mnpq + pq + mq + mn + 1)\,b = (npq + q + n)\,a + f$

4. Nimmt man den ersten Bruch $\frac{b}{a}$, so hat man denselben in seinen Werthen

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m+\cfrac{c}{b}} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{d}{c}}} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{e}{d}}}} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{f}{e}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{g}{f}}}}}} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{h}{g}}}}}}}$$

und in seinen Näherungswerthen

$$\frac{b}{a};\ \frac{1}{m};\ \frac{n}{mn+1};\ \frac{np+1}{mnp+p+m};\ \frac{npq+q+n}{mnpq+pq+mq+mn+1};$$
$$\frac{npqr+qr+nr+np+1}{mnpqr+pqr+mqr+mnr+mnp+r+p+m}$$

Nnn ist $\frac{b}{a} - \frac{1}{m} = \cfrac{1}{m+\cfrac{c}{b}} - \frac{1}{m} = -\frac{c}{m(mb+c)}$

$$\frac{b}{a} - \frac{n}{mn+1} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{d}{c}}} - \frac{n}{mn+1} = \frac{nc+d}{mnc+md+c} - \frac{n}{mn+1} = +\frac{d}{(mnc+md+c)(mn+1)}$$

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{e}{d}}}} = \frac{npd+nn+d}{mnpd+mne+pd+md+e}$$

Mithin $\frac{b}{a} - \frac{np+1}{mnp+p+m} = -\frac{e}{[(mnp+p+m)d+(mn+1)e]\,[mnp+p+m]}$

Von den Näherungswerthen ist also der erste zu grofs, der zweite zu klein, der dritte zu grofs, der vierte zn klein; überhaupt der ungerade Werth zn grofs, der gerade zn klein.

5. Will man einen gegebenen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln so verfährt man am leichtesten auf die Weise wie man den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen sucht. Z. B. der Bruch $\frac{216}{1147}$.

```
216 | 1147 | 5
    | 1080 |
    -----------
        67 | 216 | 3
           | 201 |
           ---------
             15 | 67 | 4
                | 60 |
                --------
                  7 | 15 | 2
                    | 14 |
                    -------
                      1 | 7 | 7
                        | 7 |
                        -----
                          0 |
```

Der Kettenbruch ist

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}}}}$$

6. Um die Näherungswerthe der Reihenfolge nach zn erhalten macht man folgendes Schema in drei Colnmnen. Die erste Colnmne für die dnrch snccessive Division erhaltenen Qnotienten, die zweite Columne für die Zähler, die dritte für die Nenner. Für jeden Bruch ist der Bruch $\frac{0}{1} = 0$ als erster Näherungswerth zn zetzen nnd der zweite Näherungswerth ist immer 1 dividirt durch den ersten Qnotient. Mit diesen beiden Näherungsbrüchen fängt man das Schema an. Jeder $n$te der folgenden Näherungsbrüche erhält zum Zähler den ihm vorstehenden Qnotient multiplicirt mit dem vorhergehenden $(n-1)$ten Zähler + dem diesem vorstehenden $(n-2)$ten Zähler nnd znm Nenner denselben Qnotient multiplicirt mit dem $(n-1)$ten Nenner + dem $(n-2)$ten Nenner:

Qnotient	Zähler	Nenner
0	0	1
5	1	5
3	3 × 1 + 0 = 3	3 × 5 + 1 = 16
4	4 × 3 + 1 = 13	4 × 16 + 5 = 69
2	2 × 13 + 3 = 29	2 × 69 + 16 = 154
7	7 × 29 + 13 = 216	7 × 154 + 69 = 1147

Die Näherungswerthe des Bruchs $\frac{216}{1147}$ sind also

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{5};\ \frac{3}{16};\ \frac{13}{69};\ \frac{29}{154};\ \frac{216}{1147}$$

Beispiel. Das tropische Jahr enthält 365 Tage 5 Stnnden 48 Minuten 51 Secnnden. Das Verhältnifs eines Tages zum Jahre in annähernden Brüchen anzugehen.

Das Jahr hat $365 + \frac{20931}{86400}$ Tage $= 365 + \frac{6977}{28800}$

Man erhält folgende Tabelle für den ächten Bruch

Quotient	Zähler	Nenner
0	0	1
4	1	4
7	7 × 1 + 0 = 7	7 × 4 + 1 = 28
1	1 × 7 + 1 = 8	1 × 29 + 4 = 33
4	4 × 8 + 7 = 39	4 × 33 + 29 = 161
1	1 × 39 + 8 = 47	1 × 161 + 33 — 194
1	1 × 47 + 39 = 86	1 × 194 + 161 = 355
1	1 × 86 + 47 = 133	1 × 355 + 194 = 549
1	1 × 133 + 86 = 219	1 × 549 + 355 = 904
3	3 × 219 + 133 = 790	3 × 903 + 549 = 3261
2	2 × 790 + 219 = 1799	2 × 3261 + 904 = 7426
1	1 × 1799 + 790 = 2589	1 × 7426 + 3261 = 10687
2	2 × 2589 + 1799 = 6977	2 × 10687 + 7426 = 28800

Demnach hat ein Tag die näherungsweisen Verhältnisse aum tropischen Jahr $1 : 365\frac{1}{4}$; $1 : 365\frac{7}{29}$; $1 : 365\frac{8}{33}$; $1 : 365\frac{39}{161}$; $1 : 365\frac{47}{194}$ u. s. w..

Kettenlinie ist eine vollkommen hiegsame nnausdehnsame Linie, die an ihren Endpnnkten unbeweglich befestigt ist, in der Lage, dafs Gewichte, die anf ihr nach

irgend einem Gesetz vertheilt sind, im Gleichgewicht sich befinden. Sind die Gewichte so vertheilt, dafs auf jede noch so kleine Länge der Linie gleich grofse Gewichte kommen, so heifst die Linie eine gemeine Kettenlinie.

2. Die Bedingnngen für die Gestalt einer Kettenlinie an bestimmen.

Gewichte sind $\ddagger$ gerichtete Kräfte, es sind also alle Pnnkte einer Kettenlinie in einer dnrch die Anfhangepnnkte gelegte Vertikalebene begriffen. Sind A, B die Aufhangepnnkte der biegsamen Linie, C der tiefste Pnnkt derselben, so nehme man die dnrch C gerichtete Vertikallinie CJ zur Abscissenlinie nnd für irgend einen Pnnkt E der Kettenlinie seien $CD = x$ nnd $ED = y$ die rechtwinkligen Coordinaten. Die Länge des Bogens CE sei V, und das anf diese Länge nach irgend einem Gesetz vertheilte Gewicht $= V$. Die Tangente der Linie im Pnnkt E bilde mit der Horizontalen AJ den Winkel α.

Sollte nun das Stück AE der Kettenlinie hinfort genommen werden, nnd dafür zwei Kräfte angebracht, die eine horizontal, die andere vertikal gerichtet, so müssen dieselben so beschaffen sein, dafs die ans ihnen hervorgehende Mittelkraft nach der Tangente EH gerichtet ist, welche der Spannnng der Linie im Pnnkt E das Gleichgewicht hält.

Es sei diese Spannnng in $E = s$, die Horizontalkraft $= Q$, die Vertikalkraft $= P$, so mnfs die Mittelkraft ans P nnd Q nach EG gerichtet nnd $= s$ sein.

Folglich ist

$$P = s \sin \varphi \text{ nnd } Q = s \cos \varphi$$

Fig. 738.

nnd $P^2 + Q^2 = s^2 \sin^2 \varphi + s^2 \cos^2 \varphi = s^2$

woraus $s = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Die Spannnng im Scheitel C sei $= s$, so ist dieselbe nach der dort horizontalen Tangente rechts und links gerichtet. Wenn man nnn den Theil BC der Linie hinfortnimmt, so mufs in C nach der Horizontalen CS rechts eine Kraft S angebracht werden, und dann wären die Kräfte P, Q, S nnd das Gewicht V miteinander im Gleichgewicht. Sind aber Kräfte im Raum mit einander im Gleichgewicht, so müssen sie anch mit nngeänderten Richtnngen an einem Punkt angebracht das Gleichgewicht halten und daher müssen anch die Kräfte P, Q, S, V in E mit nngeänderten Richtungen angebracht im Gleichgewicht sein. Alsdann sind aber gerade entgegengesetzt P nnd V, Q nnd S; also kann das Gleichgewicht nnr bestehen, wenn $P = V$ nnd $Q = S$.

Zerlegt man also in irgend einem Pnnkt E die Spannnng horizontal nnd vertical, so ist die horizontale Seitenkraft = der Spannnng S im Scheitel nnd die Verticale = dem auf die Kettenlinie zwischen diesem Pnnkt nnd dem Scheitel vertheilten Gewicht.

Nnn war oben

$$Q = s \cos \alpha \text{ nnd } P = s \sin \alpha$$

folglich hat man anch

$$s \cos \alpha = S \text{ nnd } s \sin \alpha = V$$

Hierans $s^2 = C^2 + V^2$

nnd $$s = \sqrt{c^2 + v^2} \tag{1}$$

Dividirt man die beiden vorletzten Gleichnngen dnrcheinander, so erhält man

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{V}{S}$$

oder $$tg\, \alpha = \frac{V}{S} \tag{2}$$

Nnn ist der Winkel, den die Tangente im Pnnkt E mit der Abscissenlinie CJ bildet $= 90^\circ - \alpha$, folglich ist nach dem Art. „Curvenlehre", Formel 2, pag. 185

$$tg\,(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{tg\, \alpha} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Mithin nach Gleichung 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S}{V} \tag{3}$$

Ist nnn V als eine Fnnction entweder von x oder von y gegeben, so hat man im ersten Fall das $\frac{\partial y}{\partial x}$ dnrch x ausgedrückt, das Integral dieses

Ausdrucks nach x wird dann $\frac{y}{\partial x}$ bestimmen und die Gleichung der Kettenlinie bekannt sein. Ist dagegen V als Function von y gegeben, so ergibt das Integral $\frac{x}{\partial y}$ die Gleichung der Kettenlinie.

Ist aber drittens V als eine Function vom Bogen v bestimmt, so mufs das Differenzial in Beziehung auf v angegeben werden. Es ist aber nach dem Art. „Curvenlehre" V. pag. 191

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

Mithin nach Gleichung 3 und 4

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\left(\frac{S}{V}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{S}{V}\right)^2}} = \frac{S}{\sqrt{S^2+V^2}} \qquad (5)$$

Es ist ebenso

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

folglich nach Gleichung 3 und 5

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2+V^2}}\cdot\frac{V}{S} = \frac{V}{\sqrt{S^2+V^2}} \qquad (6)$$

3. **Die Gestalt der Kettenlinie zu bestimmen, wenn die Gewichte darauf so vertheilt sind, dafs die auf die einzelnen Theile derselben kommenden Gewichte wie die Projectionen dieser Theile auf eine Horizontale sich verhalten.**

Das Gewicht, welches auf einen Bogen kommt, dessen horizontale Projection die Längeneinheit ist, sei $= p$, so ist das Gewicht des Bogens CE, weil y seine Horizontalprojection ist, $= py$. Setzt man diesen Werth für V in Gleichung 3, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S}{py}$$

hieraus

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{py}{S}$$

Folglich ist $x = \int \frac{py}{S}\,\partial y = \frac{1}{2}\,\frac{p}{S}\,y^2$

wo die Constante wegfällt, weil für $y = 0$ auch $x = 0$ wird.

Die Gleichung für die Kettenlinie in diesem Fall ist

$$y^2 = \frac{2S}{p}\,x \qquad (7)$$

Folglich ist die Kettenlinie bei der angenommenen Vertheilung des Gewichts eine Parabel, deren Parameter $= \frac{2S}{p}$ ist.

Es sei c die Länge einer Linie, auf welcher ein Gewicht dergestalt vertheilt ist, dafs auf jede Längeneinheit $= p$ kommt und dies so vertheilte Gewicht sei = der Spannung im Scheitel, so ist $cp = S$. Diesen Werth von S in Gleichung 7 substituirt, ergibt

$$y^2 = 2cx \qquad (8)$$

Sind $CJ = h$ und $AJ = l$ die Coordinaten des Anfangspunkts A der Kettenlinie, so wird für $x = h$ und $y = l$

$$l^2 = 2ch$$

woraus $2c = \frac{l^2}{h}$

Diesen Werth in Gleichung 8 substituirt, gibt

$$y^2 = \frac{l^2}{h}\,x \qquad (9)$$

Zur Bestimmung der Länge des Bogens $CE = v$ hat man die Gleichung 4:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

also

$$v = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$$

Nun ist $y = l\sqrt{\frac{x}{h}}$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{l}{\sqrt{h}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (10)$$

Diesen Werth in die Integralformel substituirt, gibt

$$v = \int\sqrt{1+\frac{l^2}{4hx}}\,\partial x \qquad (11)$$

Setzt man, um das zu integrirende Differenzial rational zu machen,

$$\sqrt{1+\frac{l^2}{4hx}} = z$$

so wird $x = \frac{l^2}{4h}\cdot\frac{1}{z^2-1}$

und daher $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{l^2}{4h}\cdot\frac{2z}{(z^2-1)^2}$

Substituirt man diesen Werth in die Integralformel 11, so erhält man

$$v = -\frac{l^2}{2h}\cdot\int\frac{z^2\,\partial z}{(z^2-1)^2}$$

Nnn ist $$\frac{s^2}{(s^2-1)^2} = \frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)^2} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s-1)^2}$$

Um die nnbekannten Zähler A nnd B zu finden verfährt man nach dem Art. „Integral", No. 30, pag. 304 und man hat

$$s^2 = A(s-1)^2 + B(s+1)^2$$

Diese Gleichung geordnet und auf Nnll reducirt gibt

$$s^2(A+B-1) - 2s(A-B) + A + B = 0$$

Für $s = 0$ entsteht $A = -B$

Setzt man diesen Werth in dieselbe Gleichnng so ist $A + B = 0$ und es entsteht

$$-s^2 - 4As = 0$$

woraus mit s dividirt

$$A = -\tfrac{1}{4}s; \text{ mithin } B = +\tfrac{1}{4}s$$

Demnach ist

$$\frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)^2} = -\frac{\frac{1}{4}s}{(s+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}s}{(s-1)^2}$$

nnd

$$\int\frac{s^2\,\partial s}{(s^2-1)^2} = -\tfrac{1}{4}\int\frac{s\,\partial s}{(s+1)^2} + \tfrac{1}{4}\int\frac{s\,\partial s}{(s-1)^2}$$

Schreibe $$-\tfrac{1}{4}\int\frac{s+1}{(s+1)^2}\cdot\partial s + \tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{(s+1)^2} + \tfrac{1}{4}\int\frac{s-1}{(s-1)^2}\cdot\partial s + \tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{(s-1)^2}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{s+1} + \tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{(s+1)^2} + \tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{s-1} + \tfrac{1}{4}\int\frac{\partial s}{(s-1)^2}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\ln(s+1) - \tfrac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \tfrac{1}{4}\ln(s-1) - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}$$

daher $$v = -\frac{l^2}{2h}\int\frac{s^2\,\partial s}{(s^2-1)^2} = \frac{l^2}{8h}\left[\ln\frac{s+1}{s-1} + \frac{2s}{s^2-1}\right] + C$$

Nun ist $$s = \sqrt{1 + \frac{l^2}{4hx}}$$

Diesen Werth in die letzte Formel für v gesetzt, $\ln\frac{s+1}{s-1}$ verwandelt in $\ln\frac{(s+1)^2}{s^2-1}$

gibt $$v = \frac{l^2}{8h}\ln\frac{8hx + l^2 + 4\sqrt{hx(4hx+l^2)}}{l^2} + \frac{\sqrt{hx(4hx+l^2)}}{2h} + C \tag{12}$$

Für $x = 0$ wird $v = 0$ mithin hat man $0 = \frac{l^2}{8h}\ln 1 = 0$ und $C = 0$.

Ist die Läng AC des Bogens $= L$, so ist $x = h$, und

$$L = \frac{l^2}{8h}\ln\frac{8h^2 + l^2 + 4h\sqrt{4h^2+l^2}}{l^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4h^2+l^2} \tag{13}$$

4. **Die Gestalt der Kettenlinie zu bestimmen, wenn die Gewichte auf die Kettenlinie selbst gleichmäfsig vertheilt sind, oder die Gleichung der gemeinen Kettenlinie zu finden.**

Setzt man wiederum das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Kettenlinie selbst kommt $= p$, so wird $V = pv$.

Mithin nach No. 2, Gleichung 5 und 6

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2+v^2}} = \frac{S}{\sqrt{S^2+p^2v^2}} \tag{1}$$

und $$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{pv}{\sqrt{S^2+p^2v^2}} \tag{2}$$

Aus der zweiten Gleichung hat man

$$x = \int\frac{pv}{\sqrt{S^2+p^2v^2}}\,\partial v = \frac{1}{2p}\int(S^2+p^2v^2)^{-\frac{1}{2}}\,2p^2v\,\partial v$$

$$x = \frac{1}{p}\sqrt{S^2+p^2v^2} + C \tag{3}$$

Für $x = 0$ wird anch $v = 0$, mithin hat man

$$0 = \frac{S}{p} + C; \text{ mithin vollständig}$$

$$x = \frac{1}{p}\left(\sqrt{S^2+p^2v^2} - S\right) \tag{4}$$

worans dnrch Umformnng

$$p^2x^2 + 2pSx = p^2v^2 \tag{5}$$

Ist c die Länge eines Theils der Kettenlinie, deren Gewicht = der Spannung

S am Scheitel, so ist $pc = S$, und diesen Werth in die letzte Gleichung substituirt, gibt dieselbe

$$x^2 + 2cx = v^2 \qquad (6)$$

Es läſst sich also, wenn c bekannt ist, für jede Länge v eines Bogens der Kettenlinie vom Scheitel abgerechnet die Abscisse x des Endpunkts dieses Bogens bestimmen.

Setzt man nun den Werth $S = pc$ in das Differenzial von y, Gleichung 1, so erhält man

$$\frac{\delta y}{\delta v} = \frac{pc}{p\sqrt{c^2+v^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}$$

Also

$$y = c\int\frac{\delta v}{\sqrt{c^2+v^2}} = c\,ln\,(v+\sqrt{c^2+v^2}) + C$$

Nun ist für $v = 0$ auch $y = 0$; gibt $C = -c\,ln\,c$

Daher vollständig

$$y = c\left[ln\,(v+\sqrt{c^2+v^2}) - ln\,c\right] = c\,ln\,\frac{v+\sqrt{c^2+v^2}}{c} \qquad (7)$$

Nun ist aus Gleichung 6:

$$v = \sqrt{2cx+x^2}$$

Diesen Werth in Gleichung 7 substituirt, gibt

$$y = c\,ln\,\frac{c+x+\sqrt{2cx+x^2}}{c}$$

welches die gesuchte Gleichung der gemeinen Kettenlinie ist.

Ist die Lage des Scheitels und der Aufhangepunkte der Kettenlinie gegeben, so seien h und l die Coordinaten des einen Aufhangepunkts, den Scheitel wiederum als Anfangspunkt der Coordinaten genommen; alsdann muſs S so beschaffen sein, daſs wenn man $x = h$ setzt, y dadurch $= l$ werde, deshalb hat man zur Bestimmung von c die Bedingungsgleichung:

$$l = c\,ln\,\frac{c+h+\sqrt{2ch+h^2}}{c}$$

Dividirt man beiderseits mit c und geht zur Exponentialgröſse über, so erhält man

$$e^{\frac{l}{c}} = \frac{c+h+\sqrt{2ch+h^2}}{c}$$

oder $\quad \sqrt{2ch+h^2} = ce^{\frac{l}{c}} - c - h$

oder $$2ch + h^2 = c^2 e^{\frac{2l}{c}} + c^2 + h^2 - 2c^2 e^{\frac{l}{c}} - 2che^{\frac{l}{c}} + 2ch$$

folglich reducirt und mit c^2 dividirt:

$$e^{\frac{2l}{c}} - 2e^{\frac{l}{c}} - \frac{2h}{c}e^{\frac{l}{c}} + 1 = 0$$

welches zur Bestimmung von c die Exponentialgleichung ist, welches nur durch Proberechnungen geschehen kann.

Man pflegt daher behufs der Anwendung der Kettenlinie die entgegengesetzte Bestimmung zu machen, nämlich für h auf einander folgende Vielfache von c anzunehmen und dadurch zu bestimmen, welches Vielfaches h von c ist. Man erhält nämlich aus der letzten Gleichung

$$\frac{h}{c} = \tfrac{1}{2}e^{\frac{l}{c}} + \tfrac{1}{2}e^{\frac{-l}{c}} - 1$$

Setzt man nun $\frac{l}{c} = m$, so findet man durch diese letzte Gleichung unmittelbar für $\frac{h}{c}$ eine bestimmte Zahl; diese sei n, so daſs man hat $h = nc$ und $l = mc$; daher $\frac{l}{h} = \frac{m}{n}$

Setzt man nun für m nach einander die Werthe 0,1; 0,2 u. s. w. so bestimmen sich hierdurch entsprechende Werthe für n und auch für $\frac{m}{n} = \frac{l}{h}$. Bringt man nun diese zusammengehörigen Werthe in eine Tabelle, die so weit fortgesetzt wird, daſs die Werthe von $\frac{l}{h}$ alle diejenigen Fälle begreifen, welche in der Ausübung für das Verhältniſs von h und l vorkommen, so darf man in einem besonderen Fall wo h und l gegeben sind, nur den Quotient $\frac{l}{h}$ bestimmen, diesen in der Tabelle aufsuchen, so findet man die ihm entsprechenden Werthe von m und n. Oder

$$l = mc \text{ und } h = nc$$

Dividirt man nun l durch m oder h durch n, so erhält man für den vorliegenden Fall den erforderlichen Werth

von c und dann ist vermöge der obigen Gleichung auch für jeden Werth von x der zugehörige Werth von y bestimmt.

Die Länge der Kettenlinie vom Scheitel bis zum Aufhangepunkt ergibt sich dann auch unmittelbar durch die obige Gleichung 6: $v = \sqrt{2cx + x^2}$, wenn man darin h statt x setzt.

Auch die Spannung der Kette läfst sich in jedem Punkt bestimmen, denn es war im Allgemeinen nach No. 2

$$s = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{S^2 + V^2}$$

Folglich im gegenwärtigen Fall

$$s = \sqrt{p^2c^2 + p^2v^2} = p\sqrt{c^2 + 2cx + x^2} = p(c + x)$$

Die Spannung s wächst also vom Scheitel, wo sie $= pc$ ist bis zum Aufhängepunkt, wo sie den Werth $= p(c + h)$ erhält, wo also die Gefahr des Zerreifsens am gröfsten ist.

5. Die Gleichung einer Kettenlinie zu bestimmen, wenn auf dieselbe ein zwelfaches Gewicht, das eine gleichmäfsig nach der Länge derselben, das andere aber nach der horizontalen Projection vertheilt ist.

Es sei das auf die Längeneinheit der Kette kommende Gewicht $= p$, das proportional ihrer horizontalen Projection vertheilte Gewicht auf jede Längeneinheit $= q$, so ist das auf den Bogen v vom Scheitel ab gerechnet kommende Gewicht $= pv + qy$, letzteres weil die Projection des Bogens v die Ordinate seines Endpunkts ist. Man hat also nach der bisherigen Bezeichnung

$$V = pv + qy \tag{1}$$

Nun war allgemein, nach No. 2, Gleichung 5 und 6

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}} \tag{2}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{V}{\sqrt{S^2 + V^2}} \tag{3}$$

Es ist aber nach Gleichung 1

$$v = \frac{V}{p} - \frac{q}{p}y \tag{4}$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial V} = \frac{1}{p} - \frac{q}{p}\cdot\frac{\partial y}{\partial V} \tag{5}$$

aber

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial V} \tag{6}$$

Setzt man für beide Differenziale ihre obigen Werthe aus Gleichung 2 und 5, so erhält man aus Gleichung 6:

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}}\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\cdot\frac{\partial y}{\partial V}\right)$$

und hieraus das Differenzial entwickelt

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{S}{qS + p\sqrt{S^2 + V^2}} \tag{7}$$

Um dies Differenzial rational zu machen setze man $\sqrt{S^2 + V^2} = s + V$ so entsteht quadrirt $S^2 = s^2 + 2sV$

und

$$V = \frac{S^2 - s^2}{2s} \tag{8}$$

mithin

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{S^2 + s^2}{2s^2} \tag{9}$$

und

$$\sqrt{S^2 + V^2} = s + \frac{S^2 - s^2}{2s} = \frac{S^2 + s^2}{2s} \tag{10}$$

Da nun

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{S}{qS + p\dfrac{S^2 + s^2}{2s}} \times \left(-\frac{S^2 + s^2}{2s^2}\right)$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{S(S^2 + s^2)}{s(ps^2 + 2qSs + pS^2)} \tag{11}$$

so ist

$$y = -\int\frac{\frac{1}{p}\int(S^2 + s^2)\,\partial s}{s\left(s^2 + \frac{2q}{p}\int s + S^2\right)}$$

Setzt man den trinomischen Factor des Nenners $= 0$, so erhält man zwei Wurzeln α und β der Klammergröfse.

$$\alpha = -\frac{S}{p}\left(q - \sqrt{q^2 - p^2}\right) \tag{12}$$

$$\beta = -\frac{S}{p}\left(q + \sqrt{q^2 - p^2}\right) \tag{13}$$

folglich

$$y = -\int\frac{\frac{1}{p}\int(S^2 + s^2)\,\partial s}{s(s - \alpha)(s - \beta)} \tag{14}$$

Setzt man

$$\frac{S^2 + s^2}{s(s - \alpha)(s - \beta)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \alpha} + \frac{C}{s - \beta}$$

so erhält man $A = \dfrac{S^2}{\alpha\beta}$; $B = \dfrac{S^2 + \alpha^2}{(\alpha - \beta)\alpha}$; $C = \dfrac{S^2 + \beta^2}{(\beta - \alpha)\beta}$

Diese Werthe in die Integralgleichung substituirt, gibt

$$y = -\frac{AS}{p}\int\frac{\partial s}{s} - \frac{BS}{p}\int\frac{\partial s}{s - \alpha} - \frac{CS}{p}\int\frac{\partial s}{s - \beta}$$

also $$y = -\frac{AS}{p}\,ln\,s - \frac{BS}{p}\,ln\,(s-\alpha) - \frac{CS}{p}\,ln\,(s-\beta) + C \tag{15}$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ nnd $v = 0$
Nnn ist $s = \sqrt{S^2 + V^2} - V$ nnd $V = pv + qy$
Folglich wird nach Gleichung 1 für $x = 0$ auch $V = 0$, also für $x = 0$ wird $s = \sqrt{S^2} = S$

Man erhält also zur Bestimmung der Constante die Gleichnng:

$$0 = -\frac{AS}{p}\,ln\,S - \frac{BS}{p}\,ln\,(S-\alpha) - \frac{CS}{p}\,ln\,(S-\beta) + C$$

Mithin vollständig

$$y = \frac{AS}{p}\,ln\,\frac{S}{s} + \frac{BS}{p}\,ln\,\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{CS}{p}\,ln\,\frac{S-\beta}{s-\beta} \tag{16}$$

Um nnn ebenso eine Gleichung znr Bestimmung von x zu erhalten, hat man die ersten beiden allgemeinen Gleichungen 3, No. 2 und 7, No 5

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)} = \frac{S}{V}$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{S}{qS + p\sqrt{S^2+V^2}} \times \frac{V}{S} = \frac{V}{qS + p\sqrt{S^2+V^2}}$$

Setzt man hier wiederum, nm das Differenzial rational zu machen,

$$\sqrt{S^2 + V^2} = s + V$$

so erhält man, wie vorher die Integrale znr Bestimmung von x:

$$V = \frac{S^2 - s^2}{2s};\quad \sqrt{S^2+V^2} = \frac{S^2+s^2}{2s};\quad \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{S^2+s^2}{2s^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\frac{S^2-s^2}{2s}}{qS + p\,\frac{S^2+s^2}{2s}} \times \left(-\frac{S^2+s^2}{2s^2}\right) = -\frac{S^4 - s^4}{2s^2(2sqS + pS^2 + ps^2)}$$

Mithin $$x = -\frac{1}{2p}\int\frac{(S^4 - s^4)\,\partial s}{s\left(s^2 + \frac{2qS}{p}s + S^2\right)}$$

Für $$\frac{-s^4}{s^4 + \frac{2qS}{p}s^3 + S^2s^2}$$ schreib $$\frac{-s^4 - \frac{2qS}{p}s^3 - S^2s^2}{s^4 + \frac{2qS}{p}s^3 + S^2s^2} + \frac{\frac{2qS}{d}s^3 + S^2s^2}{s^4 + \frac{2qS}{p}s^3 + S^2s^2}$$

$$= -1 + \frac{\frac{2qS}{p}s^3 + S^2s^2}{s^2\left(s^2 + \frac{2qS}{p}s + S^2\right)}$$

Dann hat man $$x = -\frac{1}{2p}\int\left[-1 + \frac{\frac{2qS}{p}s^3 + S^2s^2 + S^4}{s^3\left(s^2 + \frac{2qS}{p}s + S^2\right)}\right]\partial s$$

Setzt man nnn $$\frac{\frac{2q}{p}Ss^3 + S^2s^2 + S^4}{s^3\left(s^2 + \frac{2q}{p}Ss + S^2\right)} = \frac{A'}{s-\alpha} + \frac{B'}{s-\beta} + \frac{C'}{s^2} + \frac{D'}{s}$$

und entwickelt wie vorher, so erhält man

$$A' = \frac{\frac{2qS}{p}\alpha^3 + S^2\alpha^2 + S^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

$$B' = \frac{\frac{2qS}{p}\beta^3 + S^2\beta^2 + S^4}{\beta^2(\beta-\alpha)}$$

$$C' = \frac{S^4}{\alpha\beta}$$

$$D' = -\frac{2q}{p}\cdot\frac{S^3}{\alpha^2\beta^2}$$

Oder wenn man hemerkt, dafs $\alpha\beta$ als letztes Glied in dem Product $(s-\alpha)(s-\beta)$ = dem letzten Gliede S^2 des Trinoms, so hat man

$$C' = \frac{S^4}{S^2} = S^2$$

und $D' = -\frac{2q}{p}\cdot S$

Behält man die nnbestimmten Coefficienten vorläufig bei, nnd integrirt

$$x = -\frac{1}{2p}\int\left[-1 + \frac{A'}{s-\alpha} + \frac{B'}{s-\beta} + \frac{C'}{s^2} + \frac{D'}{s}\right]\partial s$$

so hat man $x = -\frac{1}{2p}\left[-s + A'\,ln\,(s-\alpha) + B'\,ln\,(s-\beta) - \frac{C'}{s} + D'\,ln\,s\right] + C$

Znr Bestimmnng der Constante hat man für $x=0$, am Scheitel $v=0$ also $s=S$

Also $0 = -\frac{1}{2p}\left[-S + A'\,ln\,(S-\alpha) + B'\,ln\,(S-\beta) - \frac{C'}{S} + D'\,ln\,S\right] + C$

also vollständig $x = -\frac{1}{2p}\left[s - S + A'\,ln\,\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + B'\,ln\,\frac{S-\beta}{s-\beta} + \frac{C'}{s} - \frac{C'}{S} + D'\,ln\,\frac{S}{s}\right]$ (17)

Es hleibt nun noch ührig in den Ausdrücken für y nnd x für $\alpha, \beta, A, B \ldots$ ihre Werthe einzuführen.

Nnn ist $A = \frac{S^2}{\alpha\beta} = 1$

$$B = \frac{S^2-\alpha^2}{\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{-q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$C = -\frac{S^2+\beta^2}{\beta(\alpha-\beta)} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$A' = \frac{\frac{2qS}{p}\alpha^3 + S^2\alpha^2 + S^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{S^4 + S\alpha^2\left(\frac{2q}{p}\alpha + S\right)}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{S^4-\alpha^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{(S^2+\alpha^2)(S^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha\beta+\alpha^2)(\alpha\beta-\alpha^2)}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\alpha-\beta} = -(\alpha+\beta) = \frac{2qS}{p}$$

$$B' = \frac{\frac{2qS}{p}\beta^3 + S^2\beta^2 + S^4}{\beta^2(\beta-\alpha)} = \frac{(S^2+\beta^2)(S^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta-\alpha)} = -(\alpha+\beta) = \frac{2qS}{p}$$

$C = S^2$ nnd $D' = -\frac{2q}{p}S$

Diese Werthe in heide Formeln für y nnd x substitnirt, gibt aus Gl. 16 u. 17

$$y = \frac{S}{p}\left[ln\,\frac{S}{s} - \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}\,ln\,\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}\,ln\,\frac{S-\beta}{s-\beta}\right]$$

$$x = \frac{1}{2p}\left(s - S + \frac{2qS}{p}\,ln\,\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{2qS}{p}\,ln\,\frac{S-\beta}{s-\beta} + \frac{S^2}{s} - S - \frac{2qS}{p}\,ln\,\frac{S}{s}\right)$$

$$= \frac{S-s}{s} + \frac{qS}{p^2}\,ln\,\frac{(S-\alpha)(S-\beta)\,s}{(s-\alpha)(s-\beta)\,S}$$

Da es nnn im Allgemeinen nicht möglich ist, s zwischen beiden Gleichungen von y und x zu eliminiren, so mufs man sich damit begnügen, für s aufeinander folgende Werthe zu setzen nnd daraus die zusammengehörigen Werthe von x nnd y zu berechnen.

Da $s = \sqrt{S^2 + V^2} - V$, so ist s immer kleiner als S. Man wird daher, weil auch die Spannnng S am Scheitel noch un-

bestimmt ist, auf einander folgende gebrochene Vielfache von S für s annehmen, indem man von den Zehntheilen anfängt, dann Hunderttheile n. s. w. setzt. Die Formeln in den obigen Gleichungen, wovon die Logarithmen zu nehmen sind, werden dann unabhängig von S, weil auch α und β, S als Factor enthalten.

Die Logarithmen lassen sich daher vollständig bestimmen und man wird für jede Substitution für x und y Vielfache von S erhalten.

Entwirft man nun, wie bei der gemeinen Kettenlinie, eine Tafel der so erhaltenen verschiedenen Werthe von x und y, indem man darin theils x theils y als Vielfache von S, und dann auch wieder die Quotienten von $\frac{x}{y}$, welche absolute von S unabhängige Zahlen sein werden, und es ist dann in einem besonderen Falle das Verhältnifs der Coordinaten des Aufhangepunkts gegeben, so sucht man den Verhältnifsnamen unter den Quotienten von x und y auf und man findet daneben zugleich auch, welche Vielfache diese Coordinaten von S sind. Wenn man daher alsdann diese Coordinaten mit den Vervielfältigungszahlen dividirt, so ergibt sich der für diesen Fall angehörige Werth von S.

Kettenmessung, s. „Baculometrie".

Kettenrechnung ist eine Rechnung in einem Ansatz von eigenthümlicher Form, dem Kettenansatz, Kettensatz, so genannt, weil der Ansatz in beliebig vielen Sätzen besteht, von denen jeder Satz mit dem Hinterglied des ihm vorhergehenden Satzes als Vorderglied wieder anfangt, so dafs der ganze Rechnungsansatz eine Aehnlichkeit mit einer Aneinanderreihung von Kettengliedern hat.

Wenn das Verhältnifs zweier Gröfsen A, B gesucht wird, so kann man dasselbe finden, wenn das Verhältnifs beider Gröfsen mit anderen Gröfsen, mit Zwischengröfsen gegeben ist. Wenn z. B. $A:C = m:n$, $B:D = p:q$, $C:D = r:s$ gegeben sind. Alsdann hat man den Ansatz in Proportionen

$$A:C = m:n$$
$$D:B = q:p$$
$$C:D = r:s$$

woraus $A:B = mqr:nps$

Es kommt nur darauf an, dafs die vermitteinden Gröfsen in den ersten und den zweiten Gliedern so vertheilt werden, dafs sie sich bei der Multiplication der gleichnamigen Glieder einander aufheben.

Der Kettensatz entsteht nun, wenn statt der Proportionen Producte genommen werden und zwar in der Ordnung, dafs das Hinterglied jedes Satzes mit dem Vorderglied des folgenden gleichnamig wird. Mit dem Frageglied wird als Vorderglied des ersten Satzes angefangen und das Hinterglied des letzten Satzes ist mit demselben gleichnamig.

Das obige Beispiel würde ein Kettensatz sein in der Form

$$?xB = A$$
$$nA = mC$$
$$sC = rD$$
$$pD = qB$$

hieraus $x \cdot nsp = mqr$

Da nun $x \cdot B = A$

so ist $B = \frac{A}{x} = \frac{nsp}{mqr} A$ oder $A = \frac{mqr}{nsp} B$

Die Kettenrechnung ist eine Rechnungsart, die bei den complicirtesten Verhältnissen bei nur geringer Aufmerksamkeit keinen Irrthum im Ansatz zuläfst. Ueberlegungen für etwaniges Vorhandensein umgekehrter Verhältnisse, die in Elementarschulen früher den Gegenstand einer höheren Rechnungsart, der umgekehrten Regeldetrie ausmachten, kommen hier nicht vor, und daher ist den Rechnungsmännern, den Kaufleuten dieser Kettenansatz das einfachste und sicherste Rechnenmittel.

Beispiel. Wie viel an preufsischem Conrant sind 300 oldenburger Pistolen, wenn 35½ Stück derselben auf 1 Mark bei 21¾ Karat fein kommen, wenn 35 preufsische Friedrichsd'or auf 1 Mark bei 21 Karat 8 Grän fein kommen und wenn 1 preufsischer Friedrichsd'or 5 Thlr. 20 Sgr. Conraut gilt?

Ketten-Ansatz

Wie viel (x) preufs. Thaler (sind)	= 300 oldenb. Pist.
(wenn) 35½ Pistolen	= 21¾ Karat
(wenn) 21⅔ Karat	= 35 Friedrichsd'or
(und wenn) 1 Friedrichsd'or	= 5⅔ Thaler

Hieraus $\frac{800 \cdot 21\frac{3}{4} \cdot 35 \cdot 5\frac{2}{3}}{35\frac{1}{2} \cdot 21\frac{2}{3}}$ preufs. Thaler = 559 Thlr. 19 Sgr. 3,82 Pfennige.

Kettenregel ist die Regel, nach welcher beim Ansatz und der Ausrechnung eines Kettenrechnungsaxempels verfahren wird.

Kettensatz, s. u. „Kettenrechnung."

Kettenstab, s. u. „Baculometrie."

Kettenstange, eben daselbst.

Kippregel ein Winkelmaafsinstrument besteht in einem metallenen Lineal mit senkrechtem Ständer in dessen Mitte, in welchem ein Gradbogen in einer senkrecht auf dem Lineal befindlichen Ebene auf und nieder bewegt werden kann um Höhenwinkel zu messen. Der Gradbogen ist zu diesem Behuf entweder mit Diopten oder einem Fernrohr in Verbindung gebracht.

Klammern. Die Anwendung derselben für Gröfsen complexer Form, deren Bedeutung s. den Art.: „Algebraische Zeichen", pag. 62, rechts.

Klammergröfse heifst jeder in einer Klammer eingeschlossene complexe Ausdruck.

Kleinstes, s. „Gröfstes und Kleinstes", mit Fig. 678 bis 680.

Klima. Hierunter verstanden die älteren Geographen eine Zone auf der Erdoberfläche zwischen zweien Parallelkreisen, von denen in dem einen der längste Tag ½ Stunde länger ist als in dem anderen. Sie theilten nämlich jede der beiden Halbkugeln vom Aequator bis zum Polarkreise in 24 Klimate. Am Aequator und auf beiden Zonen vom Aequator bis zu jedem Wendekreise ist der längste Tag 12 Stunden am Polarkreis ist der längste Tag 24 Stunden und man hatte also zwischen dem Aequator und jedem Polarkreis 24 Klimate. Von den Polarkreisen bis zum Nordpol wurden noch Klimate angeordnet, die alle so unterschieden waren, dafs in dem ersten Parallelkreis der längste Tag einen Monat, in dem zweiten zwei Monat u. s. w. bis zum sechsten, dem Pol wo der längste Tag sechs Monate dauert.

Die geometrische Construction dieser klimatischen Theillinien ist in dem Art. „Breite, geographische" mit Fig. 214 gezeigt und die Richtigkeit erwiesen. Hierbei will ich, um etwanige Täuschungen zu vermeiden, bemerken, dafs der Ort O, der in der Art beschaffen ist, dafs in ihm und dem ganzen ihm angehörigen Parallelkreise der längste Tag 16 Stunden (Bogen EDn, der halbe Tagebogen $= \frac{16}{24} \times$ Halbkreis EDe) nicht in derselben Erdhalbkugel QDq liegt, in welcher die Construction ausgeführt ist, wo Qq der Aequator und P den Pol bedeutet, sondern in der Halbkugel Pqp. Es ist o der richtige Ort, wenn Pq Aequator, q Pol und oo' sein Parallelkreis gedacht wird.

Die sechs Klimata der kalten Zone werden auf dieselbe Weise construirt: Es sei Qq der Aequator, PC die Axe, EC der Halbmesser der Ekliptik in dem Durchschnitt mit dem Aequator, so giebt die

Fig. 739.

auf CE Normale (e) in dem Punkt e die Richtung des mit dem Aequator parallelen Polarkreises.

Theilt man den Quadrant eE in sechs gleiche Theile, fällt aus den Theilpunkten Normalen auf CE, von den dortigen Theilpunkten, die mit dem Aequator qQ parallelen 1 1, 2 2, . . ($CQ = 6\,6$), zieht $EF \perp CP$, so hat man, wenn man sich CP als Aequator, Qq als Erdaxe denkt, EF den Polarkreis, und die auf dem Bogen EQ bestimmten Theilpunkte 1 bis 6 in Q die entsprechenden Punkte für die mit EF parallelen klimatischen Parallelkreise. Der Theilpunkt 1 bestimmt den Kreis für die Orte in welchen der längste Tag einen Monat dauert; der Punkt 2 den Kreis für 2 Monat Dauer u. s. w.

Klinobasisch (Kryst) heifst die Lage der Basis gegen die Normalaxe des Krystalls, wenn dieselbe schiefwinklig ist (s. Axensystem der Krystalle).

Klinometer (*κλίνω* ich neige) ist der wissenschaftliche allgemeine Name für jedes Nivellirinstrument, mit welchem man also die Neigung einer Linie oder einer Ebene gegen Horizontalen bestimmt.

Klinorhombisches Krystallisationssystem ist das 5te System, das zwei und eingliedrige System, bei welchem zwei ungleichartige Axen unter schiefen Winkeln sich schneiden, beide aber von der dritten ihnen ungleichartigen Axe rechtwinklig geschnitten werden.

Klinorhomboidisches Krystallisationssystem ist das sechste System, das ein und eingliedrige System, bei welchem drei ungleichartige Axen unter schiefen Winkeln sich schneiden.

Knoten heifst in der Geometrie der Punkt, in welchem eine Curve sum zweitenmal trifft; ein Theil derselben wird von diesem Punkt zu beiden Seiten eine geschlossene Rundung wie bei der unteren Konchoide, Bd. II. pag. 167, Fig. 523.

Knoten in der Astronomie sind die Durchschnittspunkte zweier gröfsten Kreise an der Himmelskugel; besonders die Durchschnittspunkte einer Planeten- oder Cometenbahn mit unserer Erdbahn, der Ekliptik und ebenso die einer Mondbahn um ihren Planeten. Die Durchschneidung beider Bahnen geschieht in zweien einander gegenüberliegenden Punkten, die gerade Verbindungslinie beider Punkte geht durch den beiden Planeten gemeinschaftlichen Centralkörper, die Sonne. Diese Verbindungslinie heifst die Knotenlinie.

Die Ekliptik theilt die Himmelskugel in zwei Hälften, die nach dem Nordpol über uns, also sichtbare Himmelskugel heifst die obere, die uns unsichtbare nach dem Südpol hin liegende die untere Halbkugel. Die Knotenlinie theilt beide sich durchschneidende Bahnen ebenfalls in zwei Hälften. Die in der oberen Himmelshalbkugel liegende Hälfte der Planetenbahn heifst die obere, die in der unteren Halbkugel liegende die untere Hälfte. Der Knoten, in welchem der Planet in die obere Halbkugel tritt, heifst der aufsteigende Knoten, der Knoten in welchem der Planet in die untere Halbkugel tritt, der niedersteigende oder der absteigende Knoten. Was hier von Planeten gesagt ist, gilt auch für Cometen und unseren Mond. Beide Knoten sind 180° von einander entfernt.

Der Planet oder Mond hat in dem Knoten keine Breite, weder geozentrische noch heliozentrische Breite, und es gibt dieser Umstand das Mittel an die Hand, durch Beobachtungen des Weltkörpers den Ort seines Knotens zu ermitteln; man hat nur nöthig, ihn in zweien Orten zu beobachten, in welchen er gleiche Breiten hat, von welchen die eine die nördliche, die andere die südliche Breite ist, so dafs er das zweite Mal so viel über oder unter der Ekliptik sich befindet, als das erste Mal er unter oder über der Ekliptik stand. Addirt man beide beobachteten Längen und nimmt von der Summe die Hälfte, so erhält man die Länge des Knotens, indem man den Lauf des Planeten während der zwischen beiden Beobachtungen begriffenen Zeit gleichförmig annimmt.

Ist dieser Knoten der aufsteigende, von dem man bei jedem Planeten zu zählen anfängt, so hat man in dem östlichen Abstande desselben vom Frühlingspunkt die Länge des Knotens. Diese Länge wird nun auf der Planetenbahn vom Knoten aus rückwärts, also innerhalb der südlichen Halbkugel abgetragen und deren Anfangspunkt ist der Nullpunkt für die heliozentrischen Längen des Planeten in seiner Bahn. Von der bestimmt angegebenen Länge des augenblicklichen Orts eines Planeten die Länge seines Knotens abgezogen, gibt die Länge des Planeten vom Knotenpunkt, welche das Argument der Breite des Planeten, durch welche die Reduction des Planeten auf die Ekliptik ausgeführt wird.

Die Knoten der Planeten behaupten nicht fest ihren Ort in der Ekliptik, sie machen ebenso wie die Nachtgleichenpunkte, der Frühlings- und der Herbstpunkt, rückgängige Bewegungen, so dafs Längen-Abnahmen entstehen, welche eine Folge der gegenseitigen Attraction der Weltkörper sind, durch welche sie sich anziehen und früher in ihre Bahnen kommen als bei dem vorher gewesenen Umlauf. Bei den Planeten beträgt diese Rückbewegung bei jedem Umlauf etwa eine Bogenminute, bei dem Monde dagegen beträgt sie jährlich 19 Grad, so dafs die Mondknoten in $\frac{360}{19} = 19$ Jahren den Zeichen entgegen durch die ganze Ekliptik gerückt sind.

Knotenlinie, s. u. „Knoten".

Knotenmonat, s. v. wie „Drachenmonat", s. d. und „astronomischer Monat" No. 4.

Körper. Euklid sagt im 11. Buch, 1 und 2 Erklärung: Ein Körper ist was Länge, Breite und Tiefe hat. Eines Körpers Grenze ist Fläche.

Die Geometrie oder vielmehr der Theil der Geometrie, welcher sich mit den Körpern beschäftigt, die Stereometrie, hat nur den von den Grenzen einge-

schlossenen körperlichen Raum und die Grenzflächen den mathematischen Körper zum Gegenstande; mit der den körperlichen Raum ausfüllenden Masse, mit dem physischen Körper beschäftigt sich die angewandte Mathematik.

Die Art der Grenzen bestimmt den Körper. Ein Körper wird begrenzt von lauter Ebenen oder von lauter krummen Flächen oder von geraden und krummen Flächen zugleich.

Körper, die von lauter Ebenen begrenzt werden, sind entweder prismatisch oder pyramidalisch oder polyedrisch.

Prismatische Körper, Prismen sind solche Körper, die von zwei einander gegenüberstehenden congruenten Dreiecken, Vierecken oder Vielecken und von dazwischen liegenden Parallelogrammen begrenzt werden. Die ersteren beiden Figuren sind die Grund- oder Endebenen, oder die Grund- oder Endflächen, die Parallelogramme die Seitenebenen oder Seitenflächen. Der Character der Prisma ist also, dafs parallel mit einander durch die Seitenflächen gelegte Ebenen congruente Figuren geben.

Ist eine der Endflächen der anderen nicht parallel, so sind sie einander nicht congruent, die Seitenflächen sind Trapeze und das Prisma heifst ein abgekürztes Prisma.

Pyramidalische Körper, Pyramiden sind solche Körper, die ein Dreieck oder Viereck oder Vieleck zur Grundfläche haben und deren Seitenflächen alle in einem Punkt, der Spitze, Dreiecke bildend, zusammen laufen. Der Keracter der Pyramide ist also dafs parallel mit einander durch die Seitenflächen gelegte Ebenen ähnliche Figuren bilden. Hat die Pyramide statt einer Spitze eine obere Endfläche, so sind die Seitenflächen Vierecke, die Pyramide heifst abgekürzt. Ist die obere Endfläche der unteren parallel, so sind die Seitenflächen Trapese, die Pyramide heifst gerade abgekürzt; ist die obere Endfläche der Grundfläche nicht parallel, so sind die Seitenflächen Trapezoide, die Pyramide heifst schief abgekürzt.

Eine Abart der Pyramide ist der Obelisk, nämlich ein Körper, bei dem die Seitenflächen eine solche Lage haben, dafs sie nicht in einer Spitze, sondern in einer geraden Linie, einer Schärfe endigen.

Ein polyedrischer Körper, ein Polyeder ist ein Körper, der von lauter verschiedenseitigen Figuren eingeschlossen ist. Sind die den Körper begrenzenden Figuren alle regelmäfsig und congruent, so heifst der Körper ein regelmäfsiges Polyeder. Es gibt deren nur fünf:

1. Das Tetraeder, deren Begrenzungsflächen aus 4 gleichseitigen Dreiecken bestehen.

2. Das Octaeder wird von 8 regelmäfsigen Dreiecken begrenzt.

3. Das Icosaeder wird von 20 regelmäfsigen Dreiecken begrenzt.

4. Das Hexaeder, der Würfel wird von 6 Quadraten begrenzt.

5. Das Dodekaeder wird von 12 regelmäfsigen Fünfecken begrenzt

Die Körper, die von lauter krummen Flächen, also von mehreren krummen Flächen begrenzt werden, kommen selten zur Untersuchung vor. Körper, die von nur einer krummen Fläche begrenzt werden, sind die Kugel und alle durch Kurven gebildete Umdrehungskörper wie die Ellipsoide.

Die Körper, die von Ebenen und krummen Flächen begrenzt werden sind Cylinder und Kegel, Cylindroide und Konoide. Ein Cylinder ist ein Prisma, ein Kegel eine Pyramide mit kreisrunder Grundebene. Cylindroide sind Prismen, Konoide sind Pyramiden mit Grundebenen, die von geschlossenen aber anders als Kreise gestalteten Curven begrenzt sind.

Körperausdehnung, s. „Ausdehnung der Körper“.

Körperberechnung. Geschieht die Berechnung speciell in bestimmten Zahlen, so ist sie der arithmetische Theil der Stereometrie, geschieht sie in Aufstellung von allgemein geltenden Formeln, der algebraische Theil derselben.

Jeder Körper ist in ein rechtwinkliges Parallelepiped zu verwandeln, dessen körperlicher Inhalt gleich ist dem Product seiner drei Seiten. Daher besteht auch jede Formel für den Inhalt eines Körpers, seine Gestalt sei, welche sie wolle, aus einem Product von dreien Längendimensionen.

Ist A die Grundebene eines Körpers, h dessen Höhe, J der Inhalt,

so ist J des Prisma $= Ah$

J des Cylinders $= Ah = \pi r \cdot r \cdot h = \pi r^2 h$

wenn r den Halbmesser der Kreisgrundebene bedeutet.

J des schief abgekürzten dreiseitigen Prisma $= \frac{a+b+c}{3} \cdot A$

wenn a, b, c die Seitenkanten, A den Inhalt des normal auf die Kanten genommenen Querschnitts bedeutet.

J einer Pyramide ist $= \frac{1}{3}Ah$

J eines Kegels ist $\frac{1}{3} Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

J einer gerade abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3}(A + \sqrt{AB} + B)h$

wenn B der Inhalt der zweiten Endfläche ist.

J eines gerade abgekürzten geraden Kegels $= \frac{1}{3}(A^2 + \sqrt{AB} + B^2)h$

$$= \frac{\pi}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2)h$$

wenn ϱ den Halbmesser der zweiten Endfläche des Kegels bedeutet.

J einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi r^3$

Einer der wichtigsten Sätze als Hülfssatz zur Beweisführung stereometrischer Lehrsätze ist folgender:

Sind zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen begriffen und so beschaffen, dafs die mit diesen Ebenen parallel genommenen Durchschnitts-Ebenen derselben immer dasselbe Verhältnifs zu einander haben, so stehen die Inhalte beider Körper in demselben Verhältnifs.

Denn man theile den Abstand der parallelen Endebenen beider Körper, oder wenn diese in Spitzen oder Rundungen ausgehen, die parallelen Ebenen, welche die beiden Körper zwischen sich begreifen, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und führe durch die Theilpunkte Ebenen, die mit jenen parallel laufen.

Zwischen je zwei nächsten Durchschnittsebenen construire man um jeden Körper zwei normale Mäntel, von denen der eine über dem Umfang des einen aufwärts, der andere unter dem Umfang des anderen abwärts gerichtet ist, so wird in jedem Körper der von dem einen Umfang eingeschlossene Körper gröfser, der von dem anderen Umfang eingeschlossene Körper kleiner sein, als der zwischen beiden Durchschnittsebenen befindliche Theil der zu vergleichenden beiden Körper.

Nun verhalten sich aber prismatische Körper (also auch die construirten) von gleicher Höhe wie ihre Endflächen, daher haben diese Körper, deren Endflächen dieselben Durchschnittsebenen der gegebenen Körper sind, immer ein und dasselbe Verhältnifs. Folglich werden auch die Summen aller inwendigen Körper, so wie die aller auswendigen bei beiden zu vergleichenden Körper immer dasselbe Verhältnifs haben.

Da man nun durch Vermehrung der Theile in dem Abstande beider zuerst genannten Parallelebenen den Unterschied der Summen der inwendigen und auswendigen Körper beliebig klein machen kann, so folgt, dafs auch die zwischen begriffenen Körper dasselbe Verhältnifs wie jene Summen haben müssen. D. h. wie die Durchschnitte dieser Körper mit Ebenen, die den begrenzenden Parallelebenen parallel laufen.

Hieraus folgt, dafs wenn in beiden Körpern die im Satz gedachten Durchschnittsebenen in beiden Körpern einzeln gleich grofse Durchschnitte bilden, die Körper selbst einander gleich sind.

Ferner, dafs wenn drei Körper zwischen zwei Parallelebenen begriffen sind und eine solche Gestalt haben, dafs wenn man dieselben mit einer jenen Ebenen parallelen Ebene schneidet, der Durchschnitt in dem einen Körper immer gleich ist der Summe der Durchschnitte in den beiden anderen Körpern, alsdann auch jener Körper gleich ist der Summe der beiden anderen Körper.

Dieser Hülfssatz heifst nach seinem Urheber der Cavallerische Grundsatz, weil Cavalleri ihn ohne Beweis aufgestellt und angewendet hat.

Körperdreieck, s. v. w. „dreiseitige Ecke," s. „Ecke" No. 1, Erklärung, die übrigen No. 2 bis 18 Lehrsätze, No. 19 bis 26 Aufgaben und Constructionen; mit Fig. 590 bis 599. S. „Körpertrigonometrie."

Körperecke, s. v. w. Ecke, s. „Ecke".

Körpermaafs, s. v. w. „Cubikmaafs", s. d.

Körpertrigonometrie ist die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen den Seiten und Winkeln der Körperdreiecke durch Anwendung der Lehren der ebenen Trigonometrie. Die Körpertrigonometrie unterscheidet sich von der ebenen, dafs die in Betracht kommenden Winkel der ebenen Dreiecke, welche zu einem Körperdreieck gehören, nicht in einer Ebene liegen.

Anmerk. In den folgenden Untersuchungen ist zu Erleichterung des Verständnisses die Anordnung getroffen, dafs bei Bezeichnung einer Körperecke (Fig. 738)

1) Die 3 Buchstaben, welche die Vorderpunkte der drei Kanten bezeichnen

vorangestellt werden, und dafs der an der Spitze befindliche Buchstabe S der vierte wird.

Fig. 740.

2) Die mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichneten Seiten entsprechen den grofsen Buchstaben der gegenüberliegenden Kanten (Seite a der Kante AS, Seite b der Kante BS und Seite c der Kante CS gegenüberliegend).

3) Die Winkel, welche durch die sie bildenden Seiten bezeichnet werden müssen, erhalten die ihrer Kante zugehörigen Buchstaben in der Mitte: der durch die Seiten ASC und ASB gebildete Winkel wird bezeichnet $\angle CASB$ oder $\angle BASC$. Sonst werden diese Winkel mit nur einem Buchstaben bezeichnet. Nämlich

4) Die Winkel der Ecke werden auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet und entsprechen den vorderen Buchstaben der den Winkel bildenden Kante. $\angle \alpha$ = dem Winkel, der von den beiden Seiten BAS und CAS mit der Kante AS gebildet wird.

1. In einem Körperdreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, oder was dasselbe ist, in einem und demselben Körperdreieck sind die Quotienten der Sinus der einzelnen Seiten, durch die Sinus der gegenüberliegenden Winkel dividirt alle einander gleich.

Denn in dem Körperdreieck $ABSC$ sei die Seite $BSC = a$, Seite $ASC = b$, $ASB = c$; die gegenüberliegenden Winkel seien α, β, C. Von einem beliebigen Punkt C der Kante CS fälle man auf die Ebene der Seite ASB und auf deren Kanten die Lothe CD, CA, CB, ziehe AD und BD, so ist $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$. Man hat daher in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ACS, $AC = CS \sin b$, und in dem $\triangle ACD$ ist

$$CD = AC \cdot \sin \alpha = CS \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

Eben so ist in dem bei B rechtwinkligen Dreieck BCS, $BC = CS \sin a$, und in dem rechtwinkligen $\triangle BCD$ ist $CD = BC \cdot \sin \beta = CS \sin a \cdot \sin \beta$

Daher ist

$$CS \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = CS \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (1)$$

woraus $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$

Eben so findet man

$$\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \gamma \quad (2)$$

daher

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \, (3)$$

Aus Gleichung 1 findet man, wenn man mit $CS \sin \alpha \cdot \sin \beta$ dividirt

$$\frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

oder $\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$ und ebenso $= \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (4)

2. In einem Körperdreieck ist der Cosinus einer Seite = dem Product aus den Sinus der beiden anderen Seiten mal dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels + dem Product aus den Cosinus dieser beiden Seiten. — Und der Cosinus eines Winkels = dem Product aus den Sinus der beiden anderen Winkel mal dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite — dem Product aus den Cosinus dieser beiden Winkel.

Denn construirt man wie im vorigen Satz, so hat man

$$AS = CS \cos b;\ AC = CS \sin b;\ AD = AC \cos \alpha = CS \sin b \cos \alpha$$

Man fälle von A auf BS das Loth AE und von D auf AE das Loth DF, so ist $\angle DAE = \angle ASB = c$, weil deren Schenkel wechselsweise auf einander normal stehen.

Man hat daher

A) $BE = DF = AD \sin c = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$

Ferner ist $ES = AS \cos c = CS \cos b \cdot \cos c$

daher $BS = BE + ES = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + CS \cos b \cdot \cos c$

Aber $BS = CS \cos a$

daher $CS \cos a = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + CS \cos b \cdot \cos c$

oder $\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \cos c$

Eben so beweist sich der Satz für $\cos b$ und $\cos c$. Durch Vertauschung der Buchstaben, welche die Seiten und Winkel bezeichnen, hat man demnach drei Gleichungen, die den Zusammenhang der drei Seiten mit jedem der 3 Winkel darstellen

$$\cos\alpha = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos a + \cos b \cdot \cos c \quad (1)$$
$$\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos c \quad (2)$$
$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma + \cos a \cdot \cos b \quad (3)$$

B) Es ist Gleichung 1, 2 und 3

1. $\cos\alpha = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha + \cos b \cdot \cos c$
2. $\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos c$
3. $\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma + \cos a \cdot \cos b$

$\cos b$ aus 2 in 1 und in 3 gesetzt, gibt

4. $\cos\alpha = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos^2 c$
5. $\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos a \cdot \cos\beta + \cos c \cdot \cos^2 a$

Setzt man nun $1 - \sin^2 c$ für $\cos^2 c$ und $1 - \sin^2 a$ für $\cos^2 a$, so hat man

6. $0 = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos\beta - \cos a \cdot \sin^2 c$
7. $0 = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos a \cdot \cos\beta - \cos c \cdot \sin^2 a$

Gleichung 6 durch $\sin c$, Gleichung 7 durch $\sin a$ dividirt:

8. $0 = \sin b \cdot \cos\alpha + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos\beta - \cos a \cdot \sin c$
9. $0 = \sin b \cdot \cos\gamma + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos\beta - \cos c \cdot \sin a$

oder

10. $\sin b \cdot \cos\alpha = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos\beta$
11. $\sin b \cdot \cos\gamma = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos\beta$

Die letzte Gleichung mit $\cos\beta$ multiplicirt

12. $\sin b \cdot \cos\gamma \cdot \cos\beta = \cos c \cdot \sin a \cdot \cos\beta - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos^2\beta$

Gleichung 10 und 12 addirt:

13. $\sin b\,(\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma) = \sin c \cdot \cos a \cdot \sin^2\beta$

Nun ist aber $\sin b \cdot \sin\gamma = \sin\beta \cdot \sin c$, also

$$\sin b\,(\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma) = \sin b \cdot \sin\gamma \cdot \cos a \cdot \sin\beta$$

folglich

$$\cos\alpha = \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a - \cos\beta \cdot \cos\gamma \quad (4)$$

Eben so

$$\cos\beta = \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos b - \sin\alpha \cdot \sin\gamma \quad (5)$$
$$\cos\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (6)$$

Da nun jede dieser drei Gleichungen sechs Bestimmungsstücke des Körperdreiecks enthalten, und aus drei Gleichungen sich immer drei unbekannte Gröfsen bestimmen lassen, so sind die vorstehenden drei Gleichungen die Fundamentalgleichungen der Körpertrigonometrie, denn es lassen sich vermittelst derselben aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines Körperdreiecks immer die drei übrigen berechnen, und da sich aus drei Gleichungen immer zwei darin vorkommende Gröfsen eliminiren lassen, so lassen sich daraus auch alle Gleichungen ableiten, welche den Zusammenhang zwischen vier Bestimmungsstücken des Körperdreiecks darstellen. So z. B. ergibt sich der Zusammenhang zwischen zwei Seiten und den beiden gegenüberliegenden Winkeln eines Körperdreiecks aus der ersten Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (7)$$

hieraus

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{(\cos\alpha - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin^2 a = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2\cos\alpha \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin b \cdot \sin c}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin a \cdot \sin c}$$

Durch Division beider letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b} \tag{8}$$

3. Den trigonometrischen Zusammenhang zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln zu finden, wenn einer der Winkel von den Seiten eingeschlossen ist.

Soll der Zusammenhang der Seiten b, c mit den Winkeln α, β, von welchen α der von b und c eingeschlossene ist, bestimmt werden, so hat man aus dem vorigen Satz

$$\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos c \quad (1)$$
$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha + \cos b \cdot \cos c \quad (2)$$

Um die verlangte Gleichung zu erhalten, muſs die Seite a eliminirt werden.

Vorerst also $\cos a$ aus der zweiten Gleichung in die erste gesetzt, gibt

$$\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos\alpha + \cos b \cdot \cos^2 c$$

Hieraus $\cos b\,(1 - \cos^2 c) = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$

oder $\cos b \cdot \sin^2 c = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$

oder mit $\sin c$ dividirt

$$\cos b \cdot \sin c = \sin a \cdot \cos\beta + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$$

Nun ist aber nach No. 1, Formel 3

$$\sin a : \sin\alpha = \sin b : \sin\beta$$

mithin $\sin a = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sin b$

Diesen Werth in die letzte Gleichung substituirt gibt

$$\cos b \cdot \sin c = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sin b \cdot \cos\beta + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$$

folglich $\sin c \cdot \cot b = \sin\alpha \cdot \cot\beta + \cos c \cdot \cos\alpha \quad (3)$

welches die verlangte Gleichung ist.

4. In einem Körperdreieck verhält sich der Cosinus der halben Summe zweier Seiten zum Cosinus ihrer halben Differenz, wie die Cotangente des halben von den Seiten eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel; und der Sinus der halben Summe zweier Seiten zum Sinus ihrer halben Differenz wie die Cotangente des halben eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel.

Es seien a, b die Seiten, also γ der eingeschlossene, α, β die beiden den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Man hat aus No. 2

$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha + \cos b \cdot \cos c \quad (1)$$
$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma + \cos a \cdot \cos b \quad (2)$$

Der letzte Werth von $\cos c$ in die erste Gleichung substituirt gibt nach den wie im vorigen Satz vorgenommenen Reductionen

$$\cos\alpha \cdot \sin b = \sin c \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b \cdot \cos\gamma \quad (3)$$

woraus $\sin c \cdot \cos\alpha = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos\gamma \quad (4)$

Vertauscht man in dieser Gleichung α und β und demgemäſs auch a und b, so erhält man

$$\sin c \cdot \cos\beta = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos\gamma \quad (5)$$

Beide Gleichungen 4 u. 5 addirt geben:

$$\sin c\,(\cos\alpha + \cos\beta) = \cos a \cdot \sin b + \cos b \cdot \sin a - (\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a) \cdot \cos\gamma$$
$$= \sin(a+b) - \sin(a+b)\cos\gamma = \sin(a+b)(1 - \cos\gamma) \quad (6)$$

Nun ist $\sin a : \sin\alpha = \sin b : \sin\beta = \sin c : \sin\gamma$

Also $\sin a + \sin b : \sin\alpha + \sin\beta = \sin c : \sin\gamma$

oder $\sin c\,(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\gamma\,(\sin a + \sin b)$

Dividirt man diese Gleichung durch die obige, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sin a+\sin b}{\sin(a+b)}\cdot\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma} \qquad (7)$$

Nun ist

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin(a+b)=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$1-\cos\gamma=2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

Substituirt man alle diese Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man, gehoben

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad (8)$$

woraus reducirt

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\cot\frac{\gamma}{2} \qquad (9)$$

und die verlangte Proportion

$$\text{I. } \cos\frac{a+b}{2}:\cos\frac{a-b}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}:tg\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aus der Proportion

$$\sin a:\sin\alpha=\sin b:\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$$

ist

$$\sin a-\sin b:\sin\alpha-\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$$

also

$$\sin c\,(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin\gamma\,(\sin a-\sin b)$$

ferner war oben

$$\sin c\,(\cos\alpha+\cos\beta)=(1-\cos\gamma)\sin(a+b)$$

daher beide letzten Gleichungen durch einander dividirt

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\cdot\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}$$

Nun ist

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

Diese und die obigen Werthe für $\cos\alpha+\cos\beta$ u. s. w. in die letzte Gleichung substituirt und gehoben gibt

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

oder

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \qquad (10)$$

und die verlangte Proportion

$$\text{II. } \sin\frac{a+b}{2}:\sin\frac{a-b}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}:tg\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Die beiden gefundenen Proportionen heifsen nach ihrem Erfinder die **Neperschen Analogien.**

5. In einem Körperdreieck ist der Cosinus eines Winkels gleich dem Product aus den Sinus der beiden anderen Winkel und dem Cosinus der dem ersten Winkel gegenüberliegenden Seite weniger dem Product der Cosinus eben dieser Winkel.

Denn es seien α, β, γ die 3 Winkel und a die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite. Man denke sich zu dem Dreieck die Supplementarecke construirt (s. „Ecke", No. 5, pag. 7 mit Fig. 592), so sind die Seiten derselben $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$; der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel $=180^\circ-a$. Daher hat man für die Supplementarecke nach No. 2

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\sin(180^\circ-\beta)\cdot\sin(180^\circ-\gamma)\cdot\cos(180^\circ-a)+\cos(180^\circ-\beta)\cdot\cos(180^\circ-\gamma)$$

Es ist aber $\cos(180^\circ-x)=-\cos x$
$\sin(180^\circ-x)=+\sin x$

Daher ist die letzte Gleichung identisch mit

$$-\cos\alpha=-\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a+\cos\beta\cdot\cos\gamma$$

oder

$$\cos\alpha=\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a-\cos\beta\cdot\cos\gamma \quad (1)$$

Auflösung rechtwinkliger Körperdreiecke.

6. In einem rechtwinkligen Körperdreieck aus zwei Seiten die dritte zu bestimmen.

Sind a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen Körperdreiecks, in welchem der Seite c der rechte Winkel γ gegenüber liegt, so hat man in der allgemeinen Gleichung

$$\cos c=\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\cos b$$

$\gamma=90^\circ$ gesetzt

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \qquad \text{(I)}$$

woraus sich jede Seite aus zwei gegebenen Seiten findet.

7. Von einem rechtwinkligen Körperdreieck sind zwei Seiten gegeben, die Winkel zu bestimmen.

Schliefsen die Seiten a und b den rechten Winkel ein, liegt also die Seite c dem rechten Winkel gegenüber, so hat man zur Bestimmung des $\angle \alpha$, welcher zwischen den gegebenen Seiten b, c liegt aus der allgemeinen Gleichung 3, No. 3,

$$\sin b \cdot \cot c = \sin \alpha \cdot \cot \gamma + \cos b \cdot \cos \alpha$$

Nun ist $\gamma = 90^\circ$, also $\cot \gamma = 0$, und es ist

$$\sin b \cdot \cot c = \cos b \cdot \cos \alpha$$

woraus $\cos \alpha = tg\, b \cdot \cot c = \frac{tg\, b}{tg\, c}$ (II)

Zur Bestimmung des anliegenden $\angle \beta$ durch die Proportion

$$\sin c : \sin b = \sin 90^\circ : \sin \beta$$

woraus $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$ (III)

Sind die den rechten Winkel einschliefsenden Seiten a, b gegeben, und sollen die Winkel α, β gefunden werden, so hat man nach der allgemeinen Gleichung 3, No. 3: zur Bestimmung des $\angle \alpha$

$$\sin b \cdot \cot a = \sin 90^\circ \cdot \cot \alpha + \cos b \cdot \cos 90^\circ$$

woraus $\cot \alpha = \sin b \cdot \cot a$

und $tg\, \alpha = \frac{tg\, a}{\sin b}$

ebenso $tg\, \beta = \frac{tg\, b}{\sin a}$ (IV)

8. Von einem rechtwinkligen Körperdreieck sind eine Seite und ein Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Ist erstens die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite und der anliegende $\angle \beta$ gegeben, so hat man die diesem Winkel gegenüberliegende Seite b aus der Proportion

$$\sin 90^\circ : \sin \beta = \sin c : \sin b$$

woraus $\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$ (V)

Die dem gegebenen Winkel β anliegende Seite a bestimmt sich aus der allgemeinen Gleichung 3 No. 3:

$$\sin a \cdot \cot c = \sin \beta \cdot \cot 90^\circ + \cos a \cdot \cos \beta$$

woraus $tg\, a = \frac{\cos \beta}{\cot c} = tg\, c \cdot \cos \beta$ (VI)

Für den $\angle \alpha$ hat man die allgemeine Gleichung 1, No. 5

$$\cos 90^\circ = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c - \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

woraus $tg\, \alpha = \frac{\cot \beta}{\cos c}$ (VII)

hieraus folgt auch

$$\cos c \cdot tg\, \alpha \cdot tg\, \beta = 1 \qquad \text{(VIII)}$$

Ist zweitens die dem rechten Winkel anliegende Seite a und der ihr gegenüberliegende Winkel α gegeben, so hat man für die Seite c

$$\sin a : \sin \alpha = \sin c : \sin 90^\circ$$

woraus $\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$ (IX)

Für die Seite b hat man die Gleichung 3, No. 3

$$\sin b \cdot \cot a = \sin 90^\circ \cdot \cot \alpha + \cos b \cdot \cos 90^\circ$$

woraus $\sin b = \frac{tg\, a}{tg\, \alpha}$ (X)

Für den Winkel β hat man

$$\sin a : \sin \alpha = \sin b : \sin \beta$$

also $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \sin b$

und nach Formel $X = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \cdot \frac{tg\, a}{tg\, \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$

mithin $\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$ (XI)

9. In einem rechtwinkligen Körperdreieck sind aufser dem rechten Winkel noch die beiden anderen Winkel gegeben, die Seiten zu finden.

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite c hat man nach Formel VII.

$$\cos c = \frac{\cot \beta}{tg\, \alpha} = \cot \alpha \cdot \cot \beta \qquad \text{(XII)}$$

Die dem rechten Winkel anliegende Seite nach Formel XI:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \qquad \text{(XIII)}$$

Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

10. Von einem Körperdreieck sind die drei Seiten gegeben, einen Winkel zu finden.

Um aus den Seiten a, b, c den der Seite a gegenüberliegenden $\angle \alpha$ zu finden hat man aus No. 2, Formel 1.

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

hieraus

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

hieraus $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}\qquad\text{(I)}$$

Für eine Formel $\cos\frac{\alpha}{2}$ hat man $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, daher

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}=\frac{\sin b\cdot\sin c-\cos b\cdot\cos c+\cos a}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}$$

woraus $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}}\qquad\text{(II)}$$

Gleichung I durch II dividirt gibt

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{-a+b+c}{2}}}\qquad\text{(III)}$$

Multiplicirt man I und II und nimmt das Product doppelt, so erhält man

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sin b\cdot\sin c}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}\qquad\text{(IV)}$$

11. In einem Körperdreieck sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Sind die Seiten a, b und der der Seite a gegenüberliegende $\angle\alpha$ gegeben, so hat man für die dritte Seite c die Formel 1 No. 3

$$\cos\alpha=\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha+\cos b\cdot\cos c$$

Dividirt man beiderseits mit $\sin b\cdot\cos\alpha$, so hat man

$$\frac{\cos a}{\sin b\cdot\cos\alpha}=\sin c+\frac{\cot b}{\cos\alpha}\cdot\cos c$$

Man setze nun $\frac{\cot b}{\cos\alpha}$ = der Tangente eines leicht zu bestimmenden Winkels μ, welches zulässig ist, weil die Tangente der Winkel von 0 bis 180° alle reellen positiven und negativen Werthe von 0 bis ∞ begreift. Setze also

$$\frac{\cot b}{\cos a}=tg\,\mu\qquad(1)$$

so ist $$\frac{\cos a}{\sin b\cdot\cos\alpha}=\sin c+tg\,\mu\cos c=\sin c+\frac{\sin\mu}{\cos\mu}\cos c=\frac{\sin(c+\mu)}{\cos\mu}$$

woraus $$\sin(c+\mu)=\frac{\cos a\cdot\cos\mu}{\sin b\cdot\cos\alpha}$$

$\cos\alpha$ aus Gl. 1 entwickelt und hierein gesetzt, gibt für die dritte Seite c die Bestimmungsgleichung

$$\sin(c+\mu)=\frac{\cos a\cdot\cos\mu}{\sin b\cdot\cot b\cdot\cot\mu}=\frac{\cos a\cdot\sin\mu}{\cos b}\quad tg\,\mu=\frac{\cot b}{\cos\alpha}\qquad\text{(V)}$$

Zur Bestimmung des zweiten der gegebenen Seite b anliegenden Winkels β hat man:

$$\sin a:\sin b=\sin\alpha:\sin\beta$$

woraus $$\sin\beta=\frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha\qquad\text{(VI)}$$

Für den dritten $\angle\gamma$ hat man nach No. 3, Formel 3

$$\sin b\cdot\cot a=\cos b\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cot\alpha$$

Beiderseits mit $\cot\alpha$ dividirt, gibt

$$\sin b\cdot\cot a\cdot tg\,\alpha=\cos b\cdot tg\,\alpha\cdot\cos\gamma+\sin\gamma$$

Setze $\cos b\cdot tg\,\alpha=tg\,\psi$, so wird die Gleichung

$$\sin b\cdot\cot a\cdot tg\,\alpha=tg\,\psi\cdot\cos\gamma+\sin\gamma=\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\cdot\cos\gamma+\sin\gamma=\frac{\sin(\psi+\gamma)}{\cos\psi}$$

woraus $\sin(\psi + \gamma) = \sin b \cdot \cot a \cdot tg\, a \cdot \cos \psi$

Aus der Hülfsgleichung ist $tg\, a = \frac{tg\, \psi}{\cos b}$

folglich $\sin(\psi + \gamma) = \sin b \cdot \cot a \cdot \frac{tg\, \psi}{\cos b} \cdot \cos \psi = \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \psi$

Zur Bestimmung des von den gegebenen Seiten eingeschlossenen $\angle \gamma$ hat man demnach

$$\left.\begin{aligned} \sin(\psi+\gamma) &= \cot a \cdot tg\, b \cdot \sin \psi \\ tg\, \psi &= \cos b \cdot tg\, a \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

12. In einem Körperdreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Sind die Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene $\angle \gamma$ gegeben, so hat man für Bestimmung der dritten Seite c

$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos a \cdot \cos b \quad \text{(VIII)}$$

Um die Formel zum Rechnen mit Logarithmen umzuformen, schreibe

$$\cos c = \cos a\, [tg\, a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos b]$$

Setze nun $tg\, a \cdot \cos \gamma = \cot \varphi$, so erhält man

$$\cos c = \cos a\, (\sin b \cdot \cot \varphi + \cos b) = \cos a\, \frac{\sin (b + \varphi)}{\sin \varphi}$$

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung von c sind daher

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos a \cdot \sin (b+\varphi)}{\sin \varphi} \\ \cot \varphi &= tg\, a \cdot \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

Zur Bestimmung der beiden unbekannten Winkel α, β hat man aus den Neperschen Analogien I und II, No. 4

$$\left.\begin{aligned} tg \frac{\alpha+\beta}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} \\ tg \frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(X)}$$

13. Von einem Körperdreieck sind eine Seite, ein dieser Seite gegenüberliegender Winkel und ein derselben anliegender Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Ist die Seite a, der $\angle \alpha$ und der $\angle \beta$ gegeben, so hat man für die dem Winkel β **gegenüberliegende Seite** b,

$$\sin b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin a \quad \text{(XI)}$$

Für die dem unbekannten Winkel γ gegenüberliegende Seite c betrachte man die Supplementsecke (s. „Ecke", No. 5 mit Fig. 592), so sind darin gegeben: die Seiten $180° - \alpha$, $180° - \beta$ und der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel $180° - a$. Man hat demnach den gesuchten von beiden Sätzen eingeschlossenen Winkel $180° - c$ nach No. 11, Formel VII:

$$tg\, \psi = \cot(180° - \beta)\, tg\, (180° - \alpha) = \cos \beta \cdot tg\, \alpha$$

$$\sin(180° - c + \psi) = \cot (180° - \alpha)\, tg\, (180° - \beta) \cdot \sin \psi$$

hieraus

$$\left.\begin{aligned} \sin (c - \psi) &= \cot \alpha \cdot tg\, \beta \cdot \sin \psi \\ tg\, \psi &= tg\, \alpha \cdot \cos \beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

Aus den in der Supplementarecke gegebenen Seiten $(180° - \alpha)$, $(180° - \beta)$ und dem gegenüberliegenden $\angle(180° - a)$ hat man nun aus Formel 1, No. 11

$$tg\, \mu = \frac{\cot\, (180° - \beta)}{\cos\, (180° - a)} = \frac{\cot \beta}{\cos a}$$

oder $\cot \mu = \frac{\cos a}{\cot \beta} = \cos a \cdot tg\, \beta$

und aus Formel V.

$$\sin (180° - \gamma + \mu) = \frac{\cos (180° - a) \sin \mu}{\cos (180° - \beta)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{oder} \quad \sin (\gamma - \mu) = \frac{\cos a \cdot \sin \mu}{\cos \beta} \\ &\text{hierzu} \quad tg\, \mu = \frac{\cot \beta}{\cos a} \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

14. Von einem Körperdreieck sind eine Seite und die daran liegenden Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Sind die Seite a und die anliegenden Winkel β, γ gegeben dann sind in der Supplementarecke gegeben die Seiten $(180° - \beta)$, $(180° - \gamma)$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(180° - a)$.

Die gesuchten Stücke sind

Seite $(180° - \alpha)$, die Winkel $(180° - b)$ und $(180° - c)$

Es ist nach den Neperschen Analogien

$$\cos\frac{180° - \beta + 180° - \gamma}{2} : \cos\frac{(180° - \beta) - (180° - \gamma)}{2} = \cot\frac{180° - a}{2} : tg\,\frac{180° - b + 180° - c}{2}$$

und

$$\sin\frac{180° - \beta + 180° - \gamma}{2} : \sin\frac{(180° - \beta) - (180° - \gamma)}{2} = \cot\frac{180° - a}{2} : tg\,\frac{(180° - b) - (180° - c)}{2}$$

oder

$$\cos\left(180° - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) : \cos\frac{\gamma - \beta}{2} = \cot\left(90° - \frac{a}{2}\right) : tg\left(180° - \frac{b + c}{2}\right)$$

$$\sin\left(180° - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) : \sin\frac{\gamma - \beta}{2} = \cot\left(90° - \frac{a}{2}\right) : tg\,\frac{c - b}{2}$$

Für das gegebene Körperdreieck erhält man also die Proportionen

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\beta + \gamma}{2} : \cos\frac{\gamma - \beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{b + c}{2} \\ \sin\frac{\beta + \gamma}{2} : \sin\frac{\gamma - \beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{c - b}{o} \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

Diese beiden Proportionen rühren ebenfalls von Neper her und werden daher ebenfalls Nepersche Analogien genannt.

Es werden aus beiden Proportionen $\frac{b + c}{2}$ und $\frac{b - c}{2}$ gefunden, woraus b und c hervorgehen.

Denn es ist $\frac{b + c}{2} + \frac{b - c}{2} = b$

und $\frac{b + c}{2} - \frac{b - c}{2} = c$

Nach No. 12, Formel IX. hat man zur Bestimmung der dritten Seite $(180° - a)$ in der Supplementarecke

$$\cos(180° - a) = \frac{\cos(180° - \beta) \cdot \sin(180° - \gamma + \varphi)}{\sin\varphi}$$

$$\cot\varphi = tg\,(180° - \beta) \cdot \cos(180° - a)$$

Hieraus

$$-\cos a = \frac{-\cos\beta \cdot \sin(\gamma - \varphi)}{\sin\varphi}$$

und $\cot\varphi = tg\,\beta \cdot \cos a$

folglich hat man in dem gegebenen Dreieck zur Bestimmung des der gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos\beta \cdot \sin(\gamma - \varphi)}{\sin\varphi} \\ \cot\varphi &= \cos a \cdot tg\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(XV)}$$

15. Von einem Körperdreieck sind die drei Winkel gegeben, die drei Seiten zu finden.

Man hat nach No. 5

$\cos\alpha = \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a - \cos\beta \cdot \cos\gamma$

hieraus

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \quad \text{(XVI)}$$

Um eine Formel für a zu finden, die sich bequem mit Logarithmen rechnen läſst, hat man in der Supplementarecke nach No. 10, Formel I.

$$\sin\frac{180° - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{180° - \alpha + 180° - \beta - (180° - 8)}{2} \cdot \sin\frac{180° - \alpha - (180° - \beta) + 180° - \gamma}{2}}{\sin(180° - \beta) \cdot \sin(180° - \gamma)}}$$

$$\text{oder } \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}} \quad \text{(XVII)}$$

Ferner nach No. 10, Formel II.

$$\cos\frac{180° - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{3 \cdot 180° - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \cdot \sin\frac{180° - \beta - \gamma + \alpha}{2}}{\sin(180° - \beta) \cdot \sin(180° - \gamma)}}$$

woraus $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$ (XVIII)

In dem Art. Ecke ist erwiesen, dafs die Summe sämmtlicher Winkel in einer $n$seitigen Ecke gröfser ist als $(2n-4)$ und kleiner als $2n$ rechten Winkeln.

In einem Körperdreieck ist also die Summe der drei Winkel kleiner als 6 und gröfser als 2 rechten Winkeln.

Daher ist $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 90^\circ < 3\cdot 90^\circ$

folglich $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ immer negativ

Ferner sind 2 Seiten eines Körperdreiecks immer gröfser als die dritte Seite. (S. Ecke No. 2). Nun sind die Seiten der Supplementsecke $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$;

daher $180^\circ-\gamma+180^\circ-\beta > 180^\circ-\alpha$

woraus $180^\circ > \beta+\gamma-\alpha$

also $90^\circ > \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

folglich ist $\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ immer positiv, und daraus folgt, dafs die Gröfse unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist.

Hieraus folgt, dafs wenn drei gegebene Winkel wirklich einem Körperdreieck zukommen sollen, so mufs nicht allein ihre Summe zwischen 2 und 6 Rechten begriffen sein, sondern je zwei derselben zusammen genommen müssen den dritten Winkel immer um weniger als 180° übertreffen.

Anwendungen.

16 In einem Körperdreieck, wovon 2 Seiten gegeben sind ist die Summe der drei Winkel am gröfsten, wenn der eingeschlossene Winkel den anderen beiden zusammen genommen gleich ist.

Denn sind a, b die gegebenen Seiten, γ der eingeschlossene Winkel, sind also α, β die den Seiten gegenüber liegenden Winkel, so hat man nach der Neperschen Analogie I.

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

hieraus

$$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}{1-\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1+\cos\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}+\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\cos\gamma}{\sin\gamma\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

Nun ist $\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}$

$\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}$

Diese Werthe substituirt entsteht

$$tg\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{-2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}=-\frac{\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Nun beschreibe man einen Halbkreis mit dem Halbmesser = 1 aus *C* über *AB*, trage an *AC* einen Winkel $ACD=\gamma'$, nehme auf der verlängerten *AB* die

Fig. 741.

Länge $CE=\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}$, fälle das Loth *DF* auf *AB*, siehe *DE*, so ist $DF=\sin\gamma'$ $CF=\cos\gamma'$,

folglich $EF=\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma'$

Mithin ist

$$tg\,EDF=\frac{EF}{DF}=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cot\gamma'}{\sin\gamma'}$$

Eben so grofs ist $tg\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, nur dem Vorzeichen nach entgegengesetzt: Daher ergänzen sich die Winkel $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ und *EDF* zu zwei Rechten.

Verlängert man daher *FD* über *D* hinaus nach *G*, so ist

$$\angle\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\angle EDG=\angle EFD+\angle DEF$$
$$=90^\circ+\angle DEF.$$

Daher wird $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, also auch $(\alpha+\beta+\gamma)$ ihren gröfsten Werth haben, wenn $\angle DEF$ ein Maximum ist. Nun ist aber $\angle DEF$ ein Maximum, wenn *DE* den Halbkreis berührt. Zieht man also von *E* eine Tangente *EH* an den Halbkreis, zieht den Halbmesser *CH*, so wird für $\gamma'=\angle ACH$ der $\angle AEH$ und mit diesem die Summe $(\alpha+\beta+\gamma)$ ein Maximum. Alsdann aber ist $\angle AEH=\angle ACH-\angle CHE=\gamma'-90^\circ$,

folglich $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\angle EAJ=\gamma$

Aus $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\gamma$ folgt $\alpha+\beta=\gamma$. D. h. Die Summe der anliegenden Winkel = dem eingeschlossenen Winkel.

1. Zusatz. Wäre $\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{3}\gtreqless 1$, so fiele der Punkt *E* entweder in *B* oder zwischen *B* und *C* und der $\angle EDF$ $=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ und die Summe $(\alpha+\beta+\gamma)$ der Winkel würde immer gröfser werden, je näher der Punkt *D* an *B* rückt und ein Maximum für $\gamma=180^\circ$, wo kein Dreieck mehr statt findet. Soll also ein Maximum der Winkelsumme statt finden können, so mufs $\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}>1$ sein, folglich $\cot\frac{a}{2}>tg\,\frac{b}{2}$, oder $tg\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)$ $>tg\,\frac{b}{2}$ oder $90^\circ-\frac{a}{2}>\frac{b}{2}$ oder $180^\circ>a+b$; d. h. es mufs die Summe beider Seiten kleiner als 2 rechte Winkel sein.

2. Zusatz. Ist *ABCS* ein Körperdreieck aus den gegebenen Seiten *a*, *b* der von diesen eingeschlossene Winkel γ so grofs als die beiden anderen Winkel α, β zusammengenommen, also die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ der Winkel ein Maximum, und man legt durch die Kante *CS* eine Ebene *CSD* so, dafs der Winkel, den diese Ebene mit der Seite *ASC* bildet, dem $\angle\alpha=$ ist, so ist der Winkel zwischen derselben Ebene und der Seite $BSC=\beta$.

Schneidet diese Ebene die Seite *ASB* in der Linie *DS*, so bilden sich zwei Körperdreiecke *ACDS* und *BCDS*, worin in jedem zwei Winkel für sich gleich, und also auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

Man hat also Seite $ASD=CSD$

und Seite $BSD=CSD$

woraus Seite $ASD=BSD$

Nimmt man auf den Kanten von *S* aus gleiche Stücke $AS=BS=CS$ und zieht die Geraden *AB*, *AC*, *BC*, wo *AB* die *DS* in *D* schneidet und zieht nach *CD* so ist $\triangle ASD\cong\triangle CSD$

also auch $AD = CD$

Eben so ist $\triangle BSD \cong \triangle CSD$

also auch $BD = CD$

Fig. 742.

Beschreibt man daher aus D in der Ebene ABC aus D einen Kreis, so trifft dieser den Punkt C und folglich ist $\angle ACB$ ein Winkel im Halbkreis $= 90^\circ$.

Hieraus läfst sich der $\angle \gamma$ durch eine Construction in der Ebene finden. Denn da $\angle BCS = 90^\circ - \frac{a}{2}$, $\angle ACS = 90^\circ - \frac{b}{2}$ und $\angle ACB = 90^\circ$, so construire mit diesen drei Winkeln als Seiten (s. Ecke No. 19 mit Fig. 597) die Körperecke $ABSC$ und man hat den der Seite $ACB = 90^\circ$ gegenüberliegenden Winkel $ACSB = \gamma$.

Da der $\angle ACB$ ein rechter ist, so ist das Dreieck ABC das gröfste, welches unter den Seiten AC und BC gebildet werden können. Die Winkelsumme in dem Körperdreieck ist also ein Maximum, wenn das ebene Dreieck, dessen Spitzen auf den Kanten gleichweit vom Scheitel liegen ein Maximum ist.

Alle Sätze, welche über das Maximum der Fläche geradliniger Figuren in der ebenen Geometrie vorkommen, entsprechen ähnlichen Sätzen über das Maximum der Winkelsumme der mehrseitigen Körperecken. Nimmt man z. B. auf der Kante einer Ecke vom Scheitel aus gleiche Stücke und verbindet die Eckpunkte der letzteren durch gerade Linien die in die Seiten der Ecke fallen, so läfst sich erweisen, dafs die Winkelsumme der Körperecke, wenn alle Seiten gegeben sind, ein Maximum ist, wenn das geradlinige Vieleck die möglich gröfste Fläche hat; d. h. wenn die Endpunkte der auf den Kanten gleich genommenen Stücke Punkte eines und desselben Kreisumfangs sind.

Von den Kantenwinkeln.

17. Fig. 740 (pag. 36) ist von dem Punkt C der Kante CS das Loth CD auf die Seite ASB (c) gefällt. Durch CSD eine Ebene gelegt erzeugt den Winkel CSD der Kante CS mit der Seite ASB (c), den **Kantenwinkel** CSD, welcher mit c' bezeichnet werden soll.

Eben so würde ein Loth von A auf die Seite BSC (a) den Kantenwinkel a', das Loth von B auf die Seite ASC (b) den Kantenwinkel b' erzeugen.

In No. 1 (pag. 35) hat man die Höhe CD
$= CS \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = CS \cdot \sin a \cdot \sin \beta$

Eben so würde sein die Höhe von A auf die Seite a
$= AS \cdot \sin c \cdot \sin \beta = AS \cdot \sin b \cdot \sin \gamma$

und die Höhe von B auf die Seite b
$= BS \cdot \sin c \cdot \sin \alpha = BS \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$

18. Aus gegebenen 3 Seiten a, b, c die drei Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Es ist $\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma = \sin b \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sin b \cdot \sqrt{(1 + \cos \gamma)(1 - \cos \gamma)}$

Oder nach Formel 4 (pag. 38)

$$\sin a' = \sin b \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\cos c + \cos a \cdot \cos b}{\sin b \cdot \sin c}\right)\left(1 - \frac{\cos c + \cos a \cdot \cos b}{\sin b \cdot \sin c}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin c} \sqrt{1 - [\cos c - \cos a \cdot \cos b]^2}$$

$$= \frac{1}{\sin c} \sqrt{[\cos c - \cos (a + b)]\,[\cos (a - b) - \cos c]}$$

$$\text{I.} \quad \sin a' = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}$$

$$\text{II.} \quad \sin b' = \frac{2}{\sin b} \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}$$

$$\text{III.} \quad \sin c' = \frac{2}{\sin c} \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}$$

19. Aus zwei Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ die 3 Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Man hat die drei Gleichungen

$$\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$$
$$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$$
$$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$$

Nun ist β unbekannt und durch a, b, γ auszudrücken.

Es ist nach No. 2 Formel 4

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

Aus No. 1, Formel 3

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \sin \gamma$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt, gibt

$$\cot \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a \cdot \sin \gamma} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma}$$

Und nun $\cos c$ fortzuschaffen nach No. 2, Formel 3

$$\cot \alpha = \frac{\cos a - \cos b\,(\sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos a \cdot \cos b)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma}$$
$$= \frac{\cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}$$

Mit Verwechselung der Buchstaben also

$$\cot \beta = \frac{\cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos \gamma}{\sin b \cdot \sin \gamma}$$

20. Es sind 2 Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel etwa α gegeben, die Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Man hat $\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$

wo $\sin \gamma$ aus No. 11, Formel VII. erst zu ermitteln ist.

Man hat ferner $\sin b' = \sin b \cdot \sin \gamma$

desgleichen $\sin \gamma$ wie für $\sin a'$ zu ermitteln.

Endlich einfach $\sin c' = \sin b \cdot \sin \alpha$

21. Es sind eine Seite (a) und die anliegenden Winkel β und γ gegeben, die Kantenwinkel zu finden.

Es ist $\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$

$$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$$
$$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$$

In der ersten Formel findet man die unbekannte b, wenn man die Formel für $\cot \beta$, No. 19, durch $\sin b$ wirklich dividirt; man erhält

$$\sin \gamma \cdot \cot \beta = \cot b \cdot \sin a - \cos a \cdot \cos \gamma$$

woraus $\cot b = \dfrac{\cot \beta \cdot \sin \gamma + \cos a \cdot \cos \gamma}{\sin a}$

Man kann auch um mit Logarithmen bequem zu rechnen, nach Formel XIV. die Neperschen Analogien benutzen, indem man $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ ermittelt.

Es ist dann

$$tg \frac{b+c}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\gamma-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma+\beta}{2}}$$

$$tg \frac{c-b}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma-\beta}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{2} - \frac{c-b}{2} = b$$

22. Es ist eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel α und ein ihr anliegender β, die Kantenwinkel zu finden.

Es ist wieder $\sin a' = \sin c \cdot \sin \beta$

$$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$$
$$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$$

Nun ist nach No. 13, Formel XII.

$$\sin (c - \psi) = \cot a \cdot tg \beta \cdot \sin \psi$$

nach No. 13, Formel VIII.

$$\sin (\gamma - \mu) = \frac{\cos a \cdot \sin \mu}{\cos \beta}$$

23. Es sind die 3 Winkel α, β, γ gegeben, die Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

In No. 15 hat man sehr bequem zu rechnende Formeln, aber nur für die Sinus der halben Seiten, welche hier nicht passen.

Entwickelt man wie No. 18, so erhält man

$$\sin a' = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{\sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}$$

und so für die beiden anderen Kantenwinkel.

24 Werden von einem Punkt einer geraden Linie drei unter sich normale Linien gezogen, so ist die Summe der Quadrate der Cosinus von den Winkeln, welche die erstgenannten Linie mit den 3 Normalen macht, = 1.

Aus dem Punkt A der Geraden AB seien die unter sich Normalen AC, AD, AE gezogen, so dafs $\angle CAD = \angle CAE = \angle DAE = R$. $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAE = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Von einem Punkt B der

Fig. 743.

Geraden AB fälle auf die Ebene CAE die Normale BF und auf die Geraden AC, AE die Normalen BC, BE. Zieht man dann die Verbindungslinien CF, EF, so ist $ACEF$ ein Rechteck. Zieht man noch AF, so ist auch $\angle AFB$ ein rechter und $\angle ABF = \gamma$. Man hat also

$$AC = AB \cos\alpha$$
$$AE = AB \cos\beta$$
$$BF = AB \cos ABF = AB \cdot \cos\gamma$$

Nun ist

$$AF^2 = AC^2 + AE^2 = AB^2 \cdot \cos^2\alpha + AB^2 \cdot \cos^2\beta = AB^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$$

woraus

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = AB^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + AB^2 \cdot \cos^2\gamma$$

folglich $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Sind die Winkel α, β, γ stumpf, so verlängere man die Normalen AC, AD, AE über den Punkt A hinaus, so entstehen unterhalb spitze Winkel $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Für die Cosinus dieser Winkel gilt dann der eben geführte Beweis. Nun ist aber $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ u. s. w. Folglich $\cos^2(180° - \alpha) = \cos^2\alpha$ u. s. w. Folglich gilt der Satz auch für stumpfe Winkel.

25. Werden durch den Durchschnittspunkt zweier Geraden drei unter sich normale Linien gezogen, so ist die Summe der Producte der Cosinus von den Winkeln, welche die beiden erst genannten Geraden mit jeder der Normalen machen, gleich dem Cosinus des von den beiden Geraden unter sich bildenden Winkels. D. h. Wenn die eine Gerade mit den drei Normalen die Winkel α, β, γ, die andere Gerade mit denselben Normalen die Winkel α', β', γ' bildet und der Winkel zwischen beiden Geraden $= \varphi$ ist, so hat man

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$$

AB und AC sind die beiden Geraden, deren Winkel $= \varphi$, AD, AE, AF die drei unter sich Normalen; $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAE = \beta$, $\angle BAF = \gamma$; $\angle CAD = \alpha'$, $\angle CAE = \beta'$, $\angle CAF = \gamma'$. Man nehme auf AB, AC zwei Stücke $AB = AC$ fälle von B und C auf die Ebene DAE die Lothe BG und CH, von G und H auf AE die Lothe GK und HJ und auf AD die Lothe GL und HM, ziehe $BO \mp GH$. Dann hat man im $\triangle ABC$

Fig. 744.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\varphi$$

oder da $AB = AC$

$$BC^2 = 2AB^2(1 - \cos\varphi)$$

Ferner ist

$$BG = AB \cdot \cos ABG = AB \cdot \cos\gamma$$
$$CH = AC \cdot \cos\gamma' = AB \cdot \cos\gamma'$$

hieraus $CO = CH - BG = AB(\cos\gamma' - \cos\gamma)$

Da BG normal der Ebene DAE, GL normal AD, nnd GK normal AE, so sind die Dreiecke BAL und BAK bei L nnd K rechtwinklig.

Man hat daher $AL = AB \cdot \cos\alpha$

und $AK = AB \cdot \cos\beta$

Aus demselben Grunde ist

$$AM = AC \cdot \cos\alpha' = AB \cdot \cos\alpha'$$

$$AJ = AC \cdot \cos\beta' = AB \cdot \cos\beta'$$

Da nun $\angle DAE = R$, so ist $\triangle GHN$ bei N rechtwinklig, nnd man hat

$$GN = LM = AL - AM = AB(\cos\alpha - \cos\alpha')$$

$$HN = KJ = AJ - AK = AB(\cos\beta' - \cos\beta)$$

daher

$$BO^2 = GH^2 = GN^2 + HN^2 = AB^2(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + AB^2(\cos\beta' - \cos\beta)^2$$

Hierans wieder

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 = AB^2(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + AB^2(\cos\beta' - \cos\beta)^2 + AB^2(\cos\gamma' - \cos\gamma)^2$$
$$= AB^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' - 2\cos\alpha \cdot \cos\alpha'$$
$$- 2\cos\beta \cdot \cos\beta' - 2\cos\gamma \cdot \cos\gamma']$$

Nun ist nach Satz No. 24

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$$

folglich wird

$$BC^2 = 2AB^2(1 - \cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \cos\beta \cdot \cos\beta' - \cos\gamma \cdot \cos\gamma')$$

Dieser Werth dem obigen für BC^2 gleich gesetzt gibt die Gleichung

$$1 - \cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \cos\beta \cdot \cos\beta' - \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 1 - \cos\varphi$$

woraus $\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$

Diese Gleichung bleibt allgemein gültig, welche Werthe die Winkel α, α' n. s. w. zwischen 0 nnd 180° anch haben mögen, wofern man nnr die Cosinus dieser Winkel mit ihren zugehörigen Vorzeichen in Rechnnng bringt. Ist z. B. α ein stumpfer Winkel, so fällt AL anf die Verlängerung der Linie AD über A hinans nnd AL wird $AB\cos(180^\circ - \alpha)$, ML also $AL + AM = AB[\cos\alpha' + \cos(180^\circ - \alpha)] = AB(\cos\alpha' - \cos\alpha) = -AB(\cos\alpha - \cos\alpha')$, ein Werth, der sich von dem oben bestimmten Werth nicht an Gröfse, sondern nur am Vorzeichen unterscheidet. Da aber der Werth von ML zur Bestimmung von $\cos\varphi$ quadrirt wird, so fällt auch dsr Unterschisd der Vorzeichen fort, folglich bleibt das Endresnltat dasselbe nnd dies gilt für alle übrigen Winkel.

Ist φ ein rechter Winkel, so ist $\cos\varphi = 0$. Man hat also den Satz: Wenn 2 Linien, mit drei nnter sich Normalen beliebige Winkel nnd nnter sich einen rechten Winkel bildon, so ist die Summe der Prodncte ans den Cosinns je zweier Winkel, welche jede der drei nnter sich Normslen mit jenen Linien bilden = 0.

Körperzahl, s. v. w. „Cnbikzahl."

Körperzone ist ein Theil der Kugel, der von zwei parallelen Kreisebenen nnd der zwischen befindlichen Zone begrenzt wird.

Körperlich ist alles, was sich auf den Körper bezieht; s. v. w. „cnbisch".

Körperlicher Winkel, s. v. w. „Ecke, Körperecke."

Koluren sind die beiden auf der Himmelskugel dnrch die Pole geführten gröfsten Kreise, von denen der eine dnrch die beiden Nachtgleichenpunkte, der andere dnrch die Wendepunkte trifft; ersterer heifst der Kolnrus der Nachtgleichen, letzterer der Kolurus der Sonnenwenden. [Der Name Kolur soll herkommen von *κολουρις*, abgestutzt, verstümmelt, nach Kepler, weil der Kreis immer nur theilweise, also verstümmelt, ohne sein südliches Ende zu sehen ist.]

Kometen. (*κομη* das Haar, *κομητης αστηρ* behaarter Stern.) Sie sind offenbar Weltkörper, die wie die Planeten in Ellipsen nm die Sonne sich bewegen; dagegen sind ihre Bahnen sehr gestreckt, von grofser Excentricität. Wenn sie in nnsern Gesichtskreis kommen, so sind sie in der Nähe ihres Perihels, ihr Durchgang durch dasselbe ist nns sichtbar, desgleichen sind es die Knoten ihrer Bahn mit nnserer Ekliptik, und dies macht es den Astronomen möglich ihren Lauf zn berechnen.

Bis jetzt sind schon mehr als 140 Kometen entdeckt aber nnr wenige von denselben nämlich nnr die in der Nenzeit beobachteten, genan berechnet. Tycho de Brahe war der erste, welcher den Lauf eines 1577 erschienenen Kometen mit Anfmerksamkeit beobachtete; hierauf einen zweiten im Jahr 1585. Kepler beobachtete einen Kometen im Jahre 1618. Einer

der merkwürdigsten Kometen erschien 1680, der nach späterer Berechnung von Bessel im Perihel nur 30000 Meilen von der Sonne entfernt gewesen ist, daher von ungeheurem Glanze war und einen Schwanz von 70° in einer Länge 10 Millionen Meilen hatte. Er hatte während der Dauer seiner Sichtbarkeit die Ekliptik in zwei volle 98° auseinander liegenden Punkten durchschnitten.

Die erste Vorhersagung der sicheren Wiederkehr eines Kometen geschah von Halley, er kündigte seinen Kometen auf den Anfang des Jahres 1759 an und wurde am 25ten December 1758 zuerst gesehen. Die Unsicherheit der Wiederkehr in einer Differenz von oft 100 Tagen gegen die Berechnung liegt in den Störungen, der der Komet auf seiner Bahn von ihm begegnenden großen Massen, wie der Jupiter z. B., durch Beschleunigungen und Verzögerungen in Folge der Attraction dieser Massen ausgesetzt ist. Die letzte Erscheinung dieser Kometen geschah bei 76jähriger Umlaufszeit im Herbst 1835 und sein Wiedererscheinen wird im Jahre 1911 stattfinden.

Der Schweif des Kometen ist von der Sonne immer abgewendet. Newton erklärt ihn als einen Dunst, der aus dem Kometen sich entwickelt, von der Sonnenwärme verflüchtigt und zugleich durch eine der Sonne inwohnende Kraft von ihr abgestoßen wird. Der Dunst wird von der Attractionskraft des Kometenkerns in der Bahn mit fortgeführt. Die beobachteten Lichtänderungen in dem Kern eines Kometen machen es nicht unwahrscheinlich, daß der Komet ein selbst leuchtender Körper ist. Es kommt nämlich vor, daß der Komet in größerer Entfernung ein glänzenderes Licht zeigt als in deren größerer Nähe.

Konchoide, eine Curve, ist in dem Art. „Curven", No. 13, pag. 165 mit Fig. 522 und 523 abgehandelt. In dem Art. „Curvenlehre", pag. 189, Beispiel 2 sind die Gleichungen für ihre Wendungspunkte aufgestellt, untersucht und mit Zahlenbeispielen erläutert.

Konisch, s. v. w. „Kegelförmig", sagt man besonders von Theilen an Instrumenten, Apparaten und Maschinen, die kaum sichtbar von der cylindrischen Form abweichen.

Konoid ist ein kegelförmiger Körper: er unterscheidet sich aber von dem Kegel dadurch, daß dessen Seite keine gerade Linie, sondern eine krumme Linie ist, die sich vom Scheitel bis zur Grundlinie von der Axe immer mehr und mehr entfernt. Das Konoid ist also ein Umdrehungskörper und seine Beschaffenheit hängt allein von der Beschaffenheit dessen Seite ab. Unter allen möglichen Konoiden haben nur das parabolische und das hyperbolische Konoid Wichtigkeit.

Wenn man von dem Scheitel C einer Parabel oder einer Hyperbel auf deren Axe eine beliebige Länge CA nimmt, dort ein Loth AB bis zur Curve errichtet und den zwischen CAB begriffenen Abschnitt um die Axe AC vollständig umdreht, so entsteht ein Körper, der im

Fig. 745.

ersten Fall ein parabolisches, im zweiten Fall ein hyperbolisches Konoid ist. Ein Körper zwischen zwei Normalen AB und CD um AD gedreht ist ein abgekürztes Konoid.

2. Die allgemeine Formel für den Inhalt der konoidischen Oberfläche hat man in dem Art. Curvenlehre, pag. 194 entwickelt:

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C$$

worin $AC = x$, $AB = y$ ist.

Für die Parabel ist $y^2 = px$

hieraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = \frac{1}{2}\frac{p}{y}$

und $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p}$

Demnach ist

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \frac{1}{4}\frac{p^2}{y^2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}\, \partial y = 2\pi \int \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}p^2} \cdot \frac{2y}{p}\, \partial y$$

also

$$F = \frac{4}{3}\frac{\pi}{p}\left(y^2 + \frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{p}\,(4x + p)^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$

nnd swar für die Gesammtoberfläche des parabolischen Konoids HCB.

Soll die Oberfläche des abgekürzten Konoids $GEBH$ bestimmt werden, so setze man die Abscisse $CD = x_,$ und $DE = y_,$; alsdann ist für x der Werth x' oder für y den Werth y' gesetzt $F = 0$. Man hat demnach die Formel für F

$$0 = \tfrac{2}{3}\frac{\pi}{p}(y_,^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

oder $\quad 0 = \tfrac{1}{6}\pi(4x_, + p)^{\frac{3}{2}} + C'$

woraus nach Bestimmnng von C und C'

$$\left.\begin{aligned} F' = \text{Umfang } GEBH &= \tfrac{2}{3}\frac{\pi}{p}\left[(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} - (y_,^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= \frac{\pi}{6}\sqrt{p}\left[(4x + p)^{\frac{3}{2}} - (4x_, + p)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

3. Für die Hyperbel ist in dem Art. Hyperbel No. 29 mit Fig. 718 die Oberfläche eines vollständigen Konoids entwickelt wenn die halbe Hanptaxe a, die halbe Nebenaxe c und die Excentricität $e = \sqrt{a^2 - c^2}$ gegeben nnd die Abscisse u vom Mittelpunkt beider Hyperbeln genommen wird, die Formel für F ist Formel 75 nämlich

$$F = \pi c\left[\frac{u}{a^2}\sqrt{e^2u^2 - a^4} - c - \frac{a^2}{e}\, ln\,\frac{eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}}{a(e + c)}\right].$$

Man hat durch Integrirung vorher

$$\int\sqrt{e^2u^2 - a^4}\,\partial u = \frac{u}{2}\sqrt{e^2u^2 - a^2} - \frac{a^4}{2e}\, ln\,(eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}) + C$$

Für ein vollständiges Konoid wird nun die Constante bei $F = 0$ für $u = a$ und man erhält

$$C = -\frac{ac}{2} + \frac{a^4}{2e}\, ln\,(e + c)\,a$$

Will man ein abgekürztes Konoid haben, so setzt man $F = 0$ für $n = u$, dann ist

$$0 = \frac{u_,}{2}\sqrt{e^2u_,^2 - a^4} - \frac{a^4}{2e}\, ln\,(eu_, + \sqrt{e^2u_,^2 - a^4}) + C$$

nnd man erhält die Oberfläche des abgekürzten hyperbolischen Konoids

$$F = \frac{\pi c}{a^2}\left[u\sqrt{e^2u^2 - a^4} - u_,\sqrt{e^2u_,^2 - a^4}\right] - \frac{\pi ca^2}{e}\, ln\,\frac{eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}}{eu_, + \sqrt{e^2u_,^2 - a^4}}$$

4. Die allgemeine Formel für den Inhalt eines konoidischen Körpers hat man in dem Art. „Curvenlehre“, VIII., pag. 195.

$$K = \pi\int y^2\,\partial x + C$$

Für die Parabel ist $y^2 = px$ u. s. w. (s. No. 2).

Hieraus für den Inhalt des parabolischen Konoids ACB

$$K = \pi\int px\,\partial x = \tfrac{1}{2}\pi px^2$$

wo Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $K = 0$ wird.

Soll der Inhalt des abgekürzten Konoids EGH gefunden werden, so hat man

$$K = 0 \text{ für } x = x_,$$

und es ist der Inhalt des abgekürzten parabolischen Konoides

$$K' = \tfrac{1}{2}\pi p(x^2 - x_,^2)$$

5. Für die Hyperbel hat man in dem Art. „Hyperbel“, No. 32 den Inhalt der vollständigen Hyperbel

$$K = \tfrac{1}{3}\pi\frac{c^2}{a^2}x^2(3a + x)$$

wo c, a die Bedeutungen No. 3 haben.

Für das abgekürzte Konoid $EGHB$ hat man

$$K_, = \tfrac{1}{3}\pi\frac{c^2}{a^2}\left[3a(x^2 - x_,)^2 + x^3 - x_,^3\right]$$

Kosmisch (κοςμος die Welt) ist was die Welt betrifft. Der Aufgang und der Untergang eines Gestirns heifst kosmisch, wenn beides zugleich mit dem Aufgang der Sonne geschieht. In neuerer Zeit sind diese kosmischen Auf- und Untergänge ohne Werth. Im Alterthum dagegen waren sie wegen der damaligen

Mangelhaftigkeit des Kalenders von Wichtigkeit. Da aber solcher Anfang wegen des Glanzes der Sonne nicht wohl an beobachten war, so nahmen sie für ihn den leicht an beobachtenden Aufgang in der Morgendämmerung, den heliacischen Anfgang, welcher etwa 12 Tage später eintrat als der kosmische. Den Aegyptern war der heliacische Anfgang des Sirius, da mit ihm die Nilüberschwemmungen zusammentrafen, von so hoher Bedeutung, dafs sie mit dem Tage ihr Jahr anfingen.

Kosmogomie ist die Lehre von der Entstehung der Körperwelt oder vielmehr der Weltkörper; die Lehre kann nur hypothetisch sein.

Kosmographie, Weltbeschreibung ist für den gestirnten Himmel was die Geographie für die Erde ist. Man kann auch die Geographie als einen Theil der K. betrachten.

Kosmologie, die Lehre von der Beschaffenheit der ganzen materiellen Welt, besonders der Naturgesetze.

Kräfte im Gleichgewicht, s. hinter: „Kraft".

Krämerwaage, gemeine Waage ist ein zweiarmiger Hebel, dessen beide Arme gleich lang und gleich schwer sind und dient zu directer Ermittelung des Gewichts eines gegebenen Körpers oder einer Menge Stoff von verlangtem Gewicht mit Hülfe bekannter Gegengewichte, indem beide, Stoff und Gegengewicht ins Gleichgewicht gebracht werden.

Ist AB ein Waagebalken und ist derselbe mit seinem daran befindlichen Zubehör in der Mittellinie CC fest aber um einen in CC befindlichen Punkt innerhalb der lothrechten Ebene frei drehbar aufgehängt, so sollen die an die Endpunkte A und B befestigten Körper von gleichem Gewicht sein, wenn der Waagebalken in die waagerechte Lage sich versetzt hat und wenn er aus derselben herausgebracht wird, durch selbstständiges Pendelüren wieder in dieselbe einspielt. Soll nun diese Richtigkeit der Waage statt finden, so mufs dieselbe Bedingung auch von der unbelasteten Waage gelten, und dies gibt folgende Bedingungen:

1. Der Schwerpunkt des unbelasteten Systems darf nicht aufserhalb des durch den Drehpunkt gerichteten Loths fallen, er mufs innerhalb der Linie CC liegen. Denn fiele er zur Seite der Linie CC, so

Fig. 746.

würde nach dieser Seite so lange Drehung erfolgen, bis der Schwerpunkt lothrecht unter den Aufhängepunkt also in CC gelangt.

2. Darf der Schwerpunkt nicht über der Drehaxe liegen, denn bei der geringsten Drehung würde er zur Seite der Linie CC kommen und das ad 1 gedachte Umschlagen des Waagebalkens erfolgen.

3. Demnach hat der Schwerpunkt des unbelasteten Waagesystems seinen Schwerpunkt nur in der Mittellinie unterhalb des Drehpunkts und es ist das gesammte Gewicht des Systems in diesem Schwerpunkt als vereinigt wirkend anzusehen.

Die Bedingungen, unter welchen eine Krämerwaage anwendbar ist, ergeben sich aus folgender einzigen Untersuchung:

Der in horizontaler Lage befindliche unbelastete Waagebalken ist in seiner Unterkante mit AB, in der ihr durch den Drehpunkt $e \mp AB$ gelegten Linie mit ab bezeichnet. In dem Punkt d der vertikalen Mittellinie CC befindet sich der Schwerpunkt des unbelasteten Systems, die Arme $ae = be$ haben die Länge l, die Entfernung des Schwerpunkts d von der Drehaxe sei $de = c$, das in d vereinte Gewicht des Systems $= p$. Werden nun in die an A und B befestigten Schalen Gewichte P und Q gelegt, von welchen $P > Q$ so entsteht eine Drehung des Waagebalkens um s bis das ganze belastete System unter dem $\angle ded' = aea' = \beta$ in Ruhe bleibt, indem in dieser Lage die Gewichte p und Q dem Gewicht P das Gleichgewicht halten.

Die Bedingungsgleichung für dieses Gleichgewicht ist.

$$ef \cdot P = eh \cdot p + sg \cdot Q$$

oder

$$(a'e \cdot \cos\beta - A'a' \cdot \sin\beta)\, P = sd' \cdot \sin\beta \cdot p + (b's \cdot \cos\beta + B'b' \cdot \sin\beta)\, Q$$

Setzt man $A'a' = B'b' = d$, so hat man reducirt

$$(Pl - Ql) \cos\beta = [pc + d(P+Q)] \sin\beta$$

woraus $tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp + d(P+Q)}$

Man nennt bekanntlich den $\angle\beta$ den Ausschlag der Waage, und die Waage ist um so empfindlicher, je gröfser bei übrigens gleich bleibenden Umständen der Ausschlag ist.

Den nachtheiligsten Einflufs auf den Ausschlag und also auf die Empfindlichkeit der Waage hat das zweite Glied des Nenners, und da P und Q veränderlich sind, dessen Factor d, d. h. die Höhe Aa. Es ist also zweckmäfsig, die Befestigungspunkte der Gewichte mit dem Drehpunkt in derselben Höhe, also in den Punkten a und b an nehmen, womit $d = 0$ wird. Es ist dann $tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp}$

Bei Krämerwaagen hat man immer für $P+Q$ oder für P in jeder Waageschale ein Maximum für die Abwägung. Ist $2P$ statt $P+Q$ dieses Maximum, dann kann man die Anhängepunkte der Schalen noch über ab nehmen; es ist dann $tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp - 2dP}$. Es mufs nur $cp - 2dP$ positiv bleiben, also d kleiner sein als $\frac{cp}{2P}$.

Ferner wird der Ausschlag mit der Abnahme von p gröfser; die Waage ist also um so empfindlicher, je geringer das Gewicht derselben ist, je leichter sie gearbeitet ist. Ferner wird sie mit der Gröfse des Ausschlags empfindlicher wenn c kleiner ist, je näher also der Schwerpunkt des Systems der unbelasteten Waage dem Drehpunkt liegt. Desgleichen wird sie mit der Länge l des Waagebalkens empfindlicher. Für $P = Q$ wird $\beta = 0$; d. h. wenn der Waagebalken in der Horizontalen liegt, sind die Gewichte in beiden Waageschalen gleich grofs.

Setzt man das Uebergewicht $P - Q = q$ constant, so hat man

$$tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp + d(P+Q)} = \frac{lq}{cp + dq + 2dQ} = \frac{lq}{cp - dq + 2dP}$$

Bei gleichem Uebergewicht ist also die Waage um so empfindlicher je geringer die in Summa aufgelegten Gewichte P und Q sind.

Die nothwendige Bedingung, dafs $ac = bc = a$, wird in der Ausführung nicht immer erfüllt, die Waage ist dann unrichtig. Dennoch läfst sich auch mit dieser das Gewicht eines Körpers richtig bestimmen.

Es sei bei unbelasteten Waageschalen der Waagebalken horizontal, so lege man den abzuwägenden Körper vom unbekannten Gewicht X in die eine Schale und stelle durch bekanntes Gewicht P, in die andere Schale gelegt, das Gleichgewicht wieder her. Nun bringe man X in die andere Schale und stelle das Gleichgewicht her durch ein Gewicht, welches aber P' ist. Nennt man nun die ungleichen Waagearme a und b, so hat man die beiden Gleichungen

$$aX = bP$$
$$bX = aP'$$

woraus $X = \sqrt{PP'}$

Practisch unmittelbar erhält man das richtige Gewicht des abzuwägenden Körpers, wenn man es in eine von beiden Schalen legt und es mit Gegengewichten in der anderen Schale ins Gleichgewicht bringt. Diese Gegengewichte seien bekannt oder unbekannt. Man nimmt nun den Körper heraus und legt statt dessen bekannte Gewichte bis zum Gleichgewicht ein und hat in den bekannten Gewichten das wirkliche Gewicht des Körpers.

Kraft ist eine der Natur überwiesene Aeufserung des göttlichen Geistes als ein nach Gesetzen geregeltes Element zur Erhaltung und Regierung der Welt und deshalb in allen lebenden und leblosen Körpern deren Bestimmung gemäfs und entsprechend verbreitet.

Von den Geisteskräften und den ihnen folgsamen Muskelkräften sehen wir hier vorläufig ab und haben nur die den leblosen Körpern zuertheilten Kräfte vor Augen. Die in dem Artikel „Attraction" No. 3 gedachte Weltbildung ist hypothetisch, also auch die darin aufgestellte Behauptung, dafs von Anfang an nur eine einzige Kraft, die Anziehungskraft der Masse zuertheilt worden sei, dafs mit dieser die Kreisbewegung entstehen müfste, und dafs die Auswerfung von Planeten Folge des Beharrungsvermögens war, dafs Massen in der einmal angenommenen Geschwindigkeit und Richtung verbleiben wollen. Wenn wir aber die jetzt vollendeten Weltkör-

per in ihren Bahnen betrachten, so sehen wir, dafs nnr gegenseitige Anziehnng der Weltkörper die einzige das Weltsystem regierende nnd erhaltende Kraft ist und dafs die vorhandene Bewegnng nichts ist als Beharrungsstand in der Bewegung (s. „Bahn" mit Fig. 165 bis 167).

Es gibt daher nichts negatives von Kräften, es gibt keine Abstofsnngskraft. Es ist unrichtig die Behauptnng, dafs wenn keine der unläugbaren Anziehungskraft negativ wirkende Abstofsungskraft vorhanden wäre, die ganze Welt zn einer einzigen compacten Masse vereinigt werden müfste. So wie es unrichtig ist, dafs wenn keine Anziehungskraft wäre, die Abstofsungskraft alles was Masse ist, in nnendliche Verdünnnng auflösen würde, weil keine Abstofsungskraft geschaffen worden und weil vor der Schöpfung nicht Abstofsung (diese war ganz überflüssig) sondern nur Gleichgültigkeit der Elemente unter einander statt fand. (Attraction No. 3.)

2. Wie für die oben betrachteten Weltkörper Anziehung des Centralkörpers auf dieselben behufs deren Ortsänderung im freien Raum allein wirksam ist, so ist für die an die Erde gebundenen Massen dieselbe Anziehung des Erdkörpers, die Schwerkraft die einzige constante natürliche Kraft für die Ortsänderung dieser Massen nach einerlei Richtung, nämlich nach der lothrechten von oben nach nnten. Alle anderen Bewegnngs-Richtungen, horizontal und von derselben aus aufwärts werden durch nicht permanente Kräfte hervorgebracht, entweder durch zeitweise Naturereignisse, wie der Wind, den der Mensch für Mühlen ausnutzt; oder durch schlnmmernde Naturkräfte, welche die menschliche Intelligenz hervorruft, wie die Kraft der Gase in Wasserdampf, im Schiefspnlver, in erhitzter Luft; oder durch Muskelkräfte, die bei Menschen dnrch den freien Willen, bei Thieren durch Antreiben entwickelt werden.

In die Wirknngen aller dieser anderen Kräfte mischt sich die überall permanent vorhandene Schwerkraft hemmend und erzengt mit jenen Mittelkräfte, die geneigt abwärts gerichtet sind oder eine solche Richtnng erstreben, wie bei der Wurflinie, dem Pendel. Gegenseitig werden Bauwerke gefertigt, welche der Schwerkraft hemmend entgegentreten, wie schiefe Ebenen für beabsichtigte Senkung von Lasten, geneigte Gerinne für geeigneten Lauf einer Wassermasse.

3. Einen nnmittelbaren Einflufs übt die Schwere auf eine Wirknng, welche in der Mechanik die gröfste Rolle spielt, nämlich auf den Druck (s. d.): Jedes Molekül hat ein gleich grofses Bestreben, sich dem Mittelpunkt der Erde zu nähern; ruht es, so hat es nothwendig eine Unterlage und auf diese äufsert es sein Bestreben. Zwei Moleküle haben das zweifache, *m* Moleküle das *m*fache Bestreben dazu; zwei Massen, von denen die eine *n*, die andere *m* Moleküle enthält, äufsern sich mit Bestrebungen, die an Gröfse wie *n* zu *m* sich verhalten. Diese Bestrebungen zur Bewegung nach dem Erdmittelpunkt empfängt die Unterlage als eine Wirknng, welche man Drnck nennt. Wenngleich nnn diesen Massen durchaus keine Kraft innewohnt, so sieht man dennoch von der Grundursach der Wirkung, von der Schwere ab, nnd legt den Massen selbst die Druckkraft bei. Man sagt, die Masse *A* drückt mit *n* Pfund, die Masse *B* mit *m* Pfund, überhaupt die Druckkräfte von Massen verhalten sich wie diese Massen selbst.

4. Einen zweiten nnmittelbaren Einflufs übt die Schwere anf eine in der Mechanik nicht minder wichtige Wirknng, nämlich auf den Stofs. Dieser entsteht, wenn ein nach der Schwerlinie in Bewegung befindlicher (ein frei fallender) Körper auf einen festen Gegenstand trifft, der die Fortsetzung seiner Bewegung hindert. Die Gröfse dieses Stofses hängt von zwei Elementen ab, von der Gröfse der Masse nnd von der Gröfse seiner Bewegung, seiner Geschwindigkeit, mit welcher er den festen Gegenstand trifft. Nach unseren Begriffen von der Stofswirkung wird angenommen, dafs eine Masse *M* mit der Geschwindigkeit *c* die *c*fache Stofswirkung derselben Masse *M* mit der Geschwindigkeit 1 ausübt. Dafs ferner bei gleich grofser Geschwindigkeit *c* die Masse *M* die *M*fache Stofswirkung einer Masse = 1 ausübt. Die Gröfse einer Stofswirknng wird daher bezeichnet mit dem Product: Masse mal Geschwindigkeit (*Mc*). Und anch bei dem Stofs sieht man von der Urkraft der Schwere ganz ab, und legt jeder Masse *M* eine selbstständige Stofskraft bei, von welcher der eine Factor die Masse *M* ist.

5. Gehen wir nun zn den anderen Kräften über, die in den anf der Erde befindlichen leblosen Körpern in Thätigkeit sind, so haben wir vor allen anderen diejenige, welche nach der Theorie der neueren Physiker unter verschiedenen Umständen als Wärme, als Electricität

und als Magnetismus auftritt. Es steht aber nichts im Wege, diese Aeufserungen für Stoffe zu halten, welche alle Körper mehr oder weniger durchdringen, und einen nothwendigen Bestandtheil derselben ausmachen, wie z. B. die jedem Körper zukommende specifische Wärme als ein nothwendiger Bestandtheil des Körpers angesehen werden kann. Dafs die Wärme als Stoff ihrer Feinheit wegen auf Gewicht keinen Einflufs hat kann der Annahme kein Hindernifs sein.

Die Cohäsionskraft ist die Anziehungskraft gleichartiger Atome, die Affinität die Anziehungskraft ungleichartiger Atome (s. „Atom"). Es ist nicht nöthig, dafs man die zwischen den Atomen befindlichen leeren Räume im Körper einer Abstofsungskraft zuschreibt: Es kann die dem Körper nothwendige specifische Wärme sein, welcher die Atome Raum geben müssen, und die bei Zuführung von noch mehr Wärme noch mehr Raum geben und die bekannte Ausdehnung des Körpers und höhere Aggregatzustände veranlassen.

Luftförmige Körper scheinen eine Anomalie gegen diese Behauptungen abzugeben, indem sie ein Ausdehnungsbestreben haben. Allein es scheint viel eher, dafs jeder luftförmige Körper, wie wir ihn hervorbringen, in einem seiner Natur nicht entsprechenden, in einem verdichteten Zustande sich befindet. Bei der atmosphärischen Luft ist bekannt, dafs sie ihre Dichtigkeit in der Nähe der Erdoberfläche ihrer Selbstbelastung verdankt und dafs der Zustand der ganz obersten Luft, der uns unbekannte viel dünnere Zustand ihr natürlicher Zustand ist. Wenn also luftförmige Körper, wie der Wasserdampf, durch Ausdehnung eine Kraft hervorbringen, so geschieht dies allerdings durch gegenseitige Abstofsung ihrer einzelnen Theile, allein dies nur in Folge ihres künstlich verdichteten Zustandes, dem sie Widerstand leisten.

6. Die Massen, von deren Gröfse nach Anzahl der Molecüle wir keinen Begriff haben, sind ihren Gewichten (s. den Art. „Gewicht") proportional; man setzt also statt ihrer Masse ihr Gewicht als Druckkraft und als Factor für den Stofs. Aus diesem Grunde werden auch Kräfte selbst durch Gewichte gemessen.

Auch die ad 5 erwähnten anderen auf der Erde zu benutzenden Kräfte können, auf Massen übergehend, Druck und Stofs erzeugen, und zwar nach beliebigen Richtungen. Ist aber das Gewicht solcher durch eine äufsere Kraft zu Druck oder Stofs erregten Masse $= P$, so ist der Druck nach einer nicht senkrechten Richtung nicht $= P$ und deren Stofswirkung nicht $= P$ mal Geschwindigkeit, das Gewicht P wirkt unter allen Umständen nur senkrecht abwärts, die nach der Seitenrichtung fallende Wirkung ergibt sich aus einer statisch wissenschaftlichen Untersuchung, welche Zerlegung der Kräfte genannt wird. Folgende einfache Betrachtung wird dies anschaulich machen: Eine Masse vom Gewicht P drückt durch sich selbst die Unterlage mit dem Gewicht P, wird nun noch eine Kraft p senkrecht abwärts auf die Masse geführt, so beträgt der Druck auf die Unterlage $P+p$; wirkt die Kraft p senkrecht aufwärts, so ist der Druck auf dieselbe nur $P-p$. So wie eine Kraft p in senkrechten Richtungen auf eine Masse P keine andere Wirkung ausüben kann, als der Kraft p selbst zugehört, so kann dies auch in geneigten Richtungen nicht anders sein.

7. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der permanenten Schwerkraft und den übrigen zerstreut befindlichen und in Thätigkeit gesetzten Naturkräften ist noch der, dafs erstere ganz selbstständig wirkt, letztere dagegen für ihre Wirkung der festen Stützen bedürfen.

Menschen und Thiere in Laufrädern, auf Tretscheiben wirken nur durch ihr Gewicht; es sind dies Einrichtungen, durch welche die mit beschleunigter Bewegung wirkende Schwerkraft zu gleichförmigem Gange verändert wird und gehören zur Schwerkraft. Zugkräfte, Stofskräfte von Menschen und Thieren sind nur bei festem Standpunkt möglich, welcher dieselbe Zug- und Stofswirkung nach entgegengesetzter Richtung empfängt.

Wasser in Wassersäulenmaschinen, in Gerinnen zum Betrieb von Rädern, Turbinen wirkt in Folge der nach abgeänderten Richtungen benutzten Schwerkraft, in hydraulischen Pressen dagegen geschieht die Druckwirkung nur mit Hülfe des Gegendrucks auf die feste Stirnfläche des Pumpenkolbens. Eben so wirkt der Dampf in dem Dampfcylinder gegen den Kolben nur in Folge der Stütze, welche er an dem festen Cylinderboden findet.

8. Es mufs nochmals hervorgehoben werden, dafs man die eigentlichen Naturkräfte ganz ignorirt und dafs die von denselben auf Körper übertragenen Wirkungen als Kräfte gelten, die denn auch Körperkräfte genannt und nach Gewichten gemessen werden.

Leibnitz nennt eine Kraft, die eine Bewegung hervorbringen kann, die aber in Folge von Hindernissen keine Bewegung hervorbringt, todte Kraft, die Kraft dagegen, welche wirklich Bewegung erzeugt: lebendige Kraft. Man ist von diesen Bezeichnungen zurückgekommen. Kraft definirt man ferner als die Bedingung, unter welcher einerlei Stoff zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Räumen sein kann. Auch sagt man Kraft ist das Sein im Werden.

9. Kraft, Körperkraft ist die Ursach zu einer Thätigkeit; jede Thätigkeit setzt ein Subject voraus das thätig ist, dies muſs also zur Thätigkeit fähig sein und die Fähigkeit hierzu heiſst Vermögen.

Aus dem Vermögen entspringt die Thätigkeit noch nicht als nothwendig, das Vermögen muſs erst zur Thätigkeit erregt werden und das zur Thätigkeit erregte Vermögen ist die Kraft.

Kraft ist mithin actives Vermögen, so wie Vermögen passive Kraft ist. Die Kraft eines Körpers kann nicht gröſser werden als dessen Vermögen ist.

Die Thätigkeit setzt ferner ein Object voraus, an welchem die Thätigkeit ausgeübt wird, die Kraft muſs auf einen Gegenstand übergehen, der ihre Einwirkung erleidet und dieser tritt in einen Zustand, in dem er vorher sich nicht befand und welcher den Erfolg der Kraftäuſserung ausmacht.

Da das Object in den neuen Zustand nicht durch sich selbst, sondern nur durch die Einwirkung eines Anderen kommen konnte, so muſste es der einwirkenden Kraft etwas entgegen zu setzten haben, er muſste der Einwirkung der Kraft widerstehen, d. h. einen Widerstand bilden.

Dieser Widerstand ist durch eine Kraft erregt worden, ohne Erregung ist er in dem Körper nichts als ein Widerstandsvermögen ein passiver Widerstand.

Der Widerstand äuſsert während der Einwirkung der Kraft auf den die Kraft äuſsernden Körper eine Rückwirkung, es müssen Kraft und Widerstand gleichartig, d. h. Widerstand muſs Kraft sein. Beide positiven Kräfte wirken in entgegengesetzten Richtungen auf einander, sie stehen also in gegenseitiger Beziehung wie positive und negative Gröſsen, d. h. sie werden activ mit der Differenz beider nach der Richtung des Ueberschusses, in gleichen Quantitäten heben sie sich einander auf. Daher geschieht es, daſs Widerstand, wiewohl unrichtig, mit negativer Kraft bezeichnet wird.

Bei Einwirkung von Kraft und Widerstand gegen einander wird das Vermögen zur Thätigkeit zum Bestreben zur Thätigkeit, der Zustand in dem beide Körper sich befinden heiſst Spannung.

In Beziehung auf gegenseitige Einwirkung kann:

1. Die Quantität des Widerstandes gröſser sein als die der Kraft; dann wird die Kraft für den Erfolg absorbirt, sie ist und bleibt gespannt. Dasselbe gilt von der mit der Kraft gleich groſsen Quantität des Widerstandes; der Ueberschuſs an Widerstand bleibt als Vermögen passiv.

2. Kann die Quantität der Kraft gröſser sein; dann wird der ganze Widerstand absorbirt. Dasselbe geschieht mit der gleich groſsen Quantität Kraft, der Ueberschuſs derselben bewirkt die Ueberwindung, die Gewältigung des Widerstandes durch Bewegung.

(S. den Art. „Gleichgewicht".)

I. Grundlehren.

Kräfte im Gleichgewicht.

Jede Kraft stellt man sich in in einer geraden Linie wirkend vor, welche angleich ihre Richtung ist; der materielle Punkt des Körpers in welchem derselbe von der Kraft getroffen wird, heiſst der Angriffspunkt der Kraft.

Zwei Kräfte heiſsen gleich, wenn sie nach gerade entgegengesetzten Richtungen auf denselben materiellen Punkt wirkend einander das Gleichgewicht halten.

Eine Kraft heiſst die Summe zweier oder mehrerer Kräfte, wenn sie mit diesen nach entgegengesetzten Richtungen auf denselben materiellen Punkt wirkend, denselben das Gleichgewicht hält.

Eine Kraft heiſst der Unterschied zweier Kräfte, wenn sie mit der kleineren zusammengenommen der gröſseren gleich ist.

Eine Kraft heiſst das 2, 3 ... m fache einer anderen Kraft, wenn 2, 3 ... m dieser letzteren gleichen Kräfte zusammen genommen der ersten Kraft gleich sind.

Eine Kraft ist $\frac{m}{n}$ einer anderen Kraft, wenn ihr m faches dem n fachen der anderen Kraft gleich ist.

Es können also Kräfte vermittelst Zahlen als Vielfache einer Kraft ausgedrückt werden, für welche dann diese Kraft die

Krafteinheit ist. Daher läſst sich das Verhältniſs von Kräften durch das Verhältniſs absoluter Zahlen, und folglich auch durch das Verhältniſs von Längen gerader Linien ausdrücken.

2. Grundsatz. Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind, so wird dasselbe nicht gestört, wenn man ihnen ein System von Kräften anfügt, die unter sich im Gleichgewicht sind, oder wenn von ihnen ein System von Kräften, die untereinander im Gleichgewicht sind, fortnimmt.

3. Sind zwei materielle Punkte fest mit einander verbunden, und wirken auf dieselben 2 gleiche Kräfte in einer durch beide Punkte gerichteten geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten hin, so sind beide Kräfte im Gleichgewicht.

Denn gesetzt es geschehe nach einer Richtung hin Bewegung, so würde, weil nach der entgegengesetzten Richtung hin dieselben Umstände sich befinden, auch nach dieser Richtung gleichzeitig dieselbe Bewegung statt finden müssen, welches bei der festen Verbindung der beiden materiellen Punkte untereinander nicht möglich ist.

4. Die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt bleibt ungeändert, in welchem Punkt ihrer Richtung dieselbe auch thätig sein mag, wenn nur der letzte Punkt mit dem ersten in fester Verbindung steht.

Denn wirkt auf den materiellen Punkt A eine Kraft P nach der Richtung CA, die mit einer anderen Kraft im Gleichgewicht ist; ist der in derselben Richtung CA befindliche materielle Punkt B

747.

mit dem Punkt A fest verbunden, und man bringt gegen diesen Punkt B zwei gleich groſse Kräfte an, die in der Richtung CB nach entgegengesetzten Seiten DB, EB hin wirken, so sind diese letzten beiden untereinander im Gleichgewicht und äuſsern keinen Einfluſs auf die beiden gegen A wirkenden im Gleichgewicht befindlichen Kräfte. Nun sind aber nach dem vorigen Satz die beiden Kräfte P nach CA und P nach EB mit einander im Gleichgewicht und das Gleichgewicht bleibt ungestört, wenn diese beiden Kräfte hinfort genommen werden. Alsdann bleibt nur die auf B nach DB wirkende Kraft P übrig, welche also mit der, welche die nach CA wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten hat, ebenfalls im Gleichgewicht ist. Demnach ist es gleichgültig für den Zustand des Systems ob P auf A oder in derselben Richtung auf B wirkt.

5. Erklärung. Wenn zwei oder mehrere Kräfte anderen Kräften das Gleichgewicht halten, und eine einzige Kraft statt der ersteren Kräfte hält denselben anderen Kräften das Gleichgewicht, so heiſst diese einzige Kraft die Mittelkraft der ersteren Kräfte. In Beziehung auf diese Mittelkraft heiſsen jene ihr gleichgeltenden Kräfte die Seitenkräfte. Aus den Seitenkräften die Mittelkraft bestimmen heiſst die Kräfte zusammensetzen; aus der Mittelkraft die ihr gleich geltenden Seitenkräfte bestimmen heiſst die Mittelkraft in ihre Seitenkräfte zerlegen.

6. Wirken zwei Kräfte auf einen materiellen Punkt nach Richtungen, die nicht in eine gerade Linie fallen, so liegt deren Mittelkraft mit ihnen in derselben Ebene und theilt den von ihnen gebildeten Winkel.

Denn wenn die Mittelkraft auſserhalb derselben Ebene nach einer Seite fiele, so würde kein Grund entgegen stehen, weshalb sie nicht auch in gleicher Lage auf die andere Seite der Ebene fallen sollte; da nun beides zugleich nicht möglich ist, so geschieht keins von beiden und die Mittelkraft fällt mit beiden Kräften in dieselbe Ebene.

Beide Kräfte schlieſsen nach einer Seite hin einen hohlen Winkel ein, im Fall der Bewegung würde also der materielle Punkt einen Weg nehmen, der zwischen beiden nach der hohlen Seite hingerichteten Schenkeln liegt, der also den Winkel theilt und in dieser den Winkel der Kräfte theilenden Wegerichtung liegt die Mittelkraft.

7. Sind beide Seitenkräfte (Satz 6) einander gleich, so wird deren Winkel von der Mittelkraft halbirt.

Denn wollte man annehmen, sie liegen der einen Seitenkraft näher, so hätte man denselben Grund für die Annahme, dafs sie der andern Seitenkraft eben so nahe liegt; beides aber ist nur möglich wenn sie gegen beide Seitenkräfte eine gleiche Lage hat

8. Werden auf den Richtungen zweier auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte von dem materiellen Punkt aus zwei Längen genommen, die sich wie die nach denselben Richtungen wirkenden Kräfte verhalten, und man vollendet zu diesen als anliegenden Seiten das Parallelegramm, so ist die durch den materiellen Punkt gezogene Diagonale desselben die Richtung der Mittelkraft.

Duchayla beweist diesen Satz, indem er erst zeigt, dafs wenn er gültig ist zwischen einer Kraft P und einer Kraft Q, ferner für dieselbe Kraft P und einer anderen Kraft Q', dafs er dann auch für die Kraft P und die Kraft $Q + Q'$ richtig ist.

Fig. 748.

Es wirke auf den materiellen Punkt A nach der Richtung AB die Kraft P, nach der Richtung AH die Kraft Q und die Kraft Q'; es sei ferner

$$AB : AC : CH = P : Q : Q'$$

so betrachte man zuerst die beiden Kräfte P und Q für sich allein. Man construire also das Parallelogram $ABCD$, ziehe die Diagonale AD, so ist nach Voraussetzung diese die Richtung der den Seitenkräften P und Q zugehörigen Mittelkraft M. Nun kann man statt der Kräfte P und Q die Mittelkraft M allein thätig denken, und deren Angriffspunkt A nach jedem beliebigen anderen Punkt der Linie AD, also z. B. nach D verlegen, so dafs M in D nach DE, der Verlängerung von AD wirkt. Man kann jetzt statt der Mittelkraft M wieder deren Seitenkräfte P und Q, erstere $\neq AB$ nach DF, der Verlängerung von CD und letztere $\neq AC$ nach DJ, der Verlängerung von BD auf den Punkt D wirken lassen und die Wirkung auf den materiellen Punkt A bleibt dieselbe wie zu Anfang.

Betrachtet man nun die beiden Kräfte P und Q' für sich allein, so kann man letztere Kraft von dem Angriffspunkt A nach dem Punkt C verlegen, und dieselbe dort nach ungeänderter Richtung CH wirken lassen; desgleichen die in D nach DF wirkende Kraft P nach demselben Punkt C mit der ungeänderten Richtung CF. Nun sind $CD : CH = P : Q'$ vollendet man also das Parallelegramm $CDHJ$, so ist der Voraussetzung nach CJ die Richtung der in dem Angriffspunkt C wirkenden beiden Kräften P und Q' zugehörigen Mittelkraft M'. Statt der beiden Kräfte P und Q' kann man deren Mittelkraft M' in C nach CJ wirken lassen und diese Kraft M' nach jedem beliebigen Punkt der Linie, also auch nach dem Punkt J verlegen und nach JK, der Verlängerung von CJ wirken lassen. Endlich kann man die in dem Punkt J wirkende Kraft M' dort wieder in ihre Seitenkräfte P, nach JN der Verlängerung von HJ gerichtet und Q' nach JL, der Verlängerung von BJ gerichtet zerlegen. Verlegt man nun noch den von der Kraft Q zuletzt behaupteten Angriffspunkt D ebenfalls nach J, so hat man in dem Angriffspunkt J nach der Richtung JN die Kraft P, nach JL die Kräfte Q und Q' wirkend. Diese 3 Kräfte in J wirkend sind aber nach und nach dahin der Art translocirt worden, dafs die Wirkung auf den anfänglichen Angriffspunkt A ungeändert geblieben ist, und aus diesem Grunde mufs die Mittelkraft der in J wirkenden Kräfte P, Q und Q' durch den Punkt A gerichtet sein; d. h. die Richtung der diesen drei Kräften gleichgeltenden Mittelkraft ist die Diagonale AJ.

Ist nun $Q = Q' = P$, so ist nach Satz 7 der Satz 8 für P und Q, so wie für P und Q' richtig, denn die die zwischen P und Q und zwischen P und Q' befindlichen Winkel halbirende Mittelkraftsrichtung ist die Diagonale. Mithin ist nach Satz 8 das Gesetz auch richtig für die Kräfte P und $Q + Q'$, d. h. für P und $2P$. Hierzu der Satz für die Kräfte P und P richtig, gibt den Schlufs, dafs der Satz auch für P und $P + 2P$. D. h. für P und $3P$ u. s. w. dafs der Satz für P

und nP richtig ist. Der Satz ist also richtig wenn die eine Kraft ein beliebig Vielfaches der anderen Kraft ist.

Ueberhaupt ist der Satz richtig für zwei Kräfte, die wie np und mp commensurabel sind. Denn setzt man $P = mp$ und $Q = np$, so ist der Satz richtig für P und p, also auch für P und $p + p = 2p$, demnach für P und $3p$ u. s. w.

Der Satz ist aber auch gültig, wenn P und Q incommensurabel sind. Denn nimmt man auf den Richtungen dieser Kräfte 2 Längen AB, AC, die sich wie $P : Q$ verhalten, so vollende das Parallelogram $ABCD$ und ziehe die Diagonale AD.

Wollte man nun annehmen, die Mittelkraft M zwischen P und Q solle nicht in AD, sondern in irgend eine andere Richtung z. B. AE fallen, so theile AC in eine so grofse Anzahl gleicher Theile, dafs der einzelne Theil kleiner ist als DE, trage dieselben Theile von C aus auf CD ab, so wird einer der Theilpunkte zwischen E und D, etwa in F fallen. Nun

Fig 749.

sind AC und CF commensurabel, und es sei $AC : CF = Q : P$. Zieht man daher $FG \neq AC$, so ist die Diagonale AF die Richtung der Mittelkraft zwischen den Kräften Q und P'.

Nun ist $P > P'$ und es sei $P = P' + P''$

Nimmt man die Kräfte Q und P' fort und setzt dafür die ihnen gleich geltende nach AF gerichtete Mittelkraft M, so hat man auf den Punkt A wirkend die nach AF gerichtete Kraft M und die nach AB gerichtete Kraft P''. Die Mittelkraft zwischen diesen beiden Kräften ist = der Mittelkraft zwischen P und Q und mufs nach Satz 6 den $\angle FAB$ theilen, mithin kann sie nicht links von AF wie nach AE gerichtet sein. Ebenso wird bewiesen, dafs die Mittelkraft zwischen P und Q nicht rechts der Diagonale AD fallen kann.

9. Aus diesem Satz geht zugleich hervor, dafs wenn man von einem Punkt H der Mittelkraft auf die Richtungen der beiden ihr angehörigen Seitenkräfte Parallelen zieht, von diesen auf den Kräfterichtungen Stücke AJ, AK abgeschnitten werden, die von dem Angriffspunkt aus gemessen sich wie die Kräfte P, Q selbst verhalten.

10. Die im vorigen Satz gedachte Diagonale ist nicht nur die Richtung der Mittelkraft, sondern auch im Verhältnifs der die Seitenkräfte in Gröfse darstellenden Seiten des Parallelogramms die Gröfse der Mittelkraft.

Denn es seien, Fig. 750, die auf den materiellen Punkt A gerichteten Kräfte P und Q; $AB : AC = P : Q$, $ABCD$ das vollendete Parallelogramm und also AD die Richtung der Mittelkraft zwischen P und Q; deren Gröfse sei $= R$.

Verlängert man DA über A hinaus, bringt nach der Richtung AE eine Kraft $= R$ an, so besteht zwischen R, P und Q Gleichgewicht. Verlängert man CA nach F hin, so wird AF die Richtung der Mittelkraft zu P und der nach AE gerichteten Kraft R sein, weil die Kräfte

Fig. 750.

P, Q und R nur dann im Gleichgewicht sein können, wenn ihre Mittelkraft der Kraft Q gleich und ihr gerade entgegengesetzt gerichtet ist.

Macht man also $AF = AC$, verbindet B mit F
so ist $\triangle BAF \cong \triangle DCA$,
also $BF \mathrel{\#} AD$
und zieht man $FG \mathrel{\#} AB$, so ist nach Satz 9: $AB : AG = P : R$ und da $AG = AD$ so ist AD die Gröfse der zu P und Q gehörenden Mittelkraft.

11. Das Parallelogramm, welches die Gröfse und Richtung der Mittelkraft zweier gegebenen Seitenkräfte bestimmt, heifst das Parallelogramm der Kräfte.

12. Drei auf einen Punkt wirkende Kräfte, zwei Seitenkräfte und ihre Mittelkraft sind proportional dem Sinus der Winkel, die die jedesmaligen anderen beiden Kräfte mit einander bilden; und gleiche Producte erhält man, wenn man von 2 Kräften jede mit dem Sinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der dritten Kraft bildet.

Bei der Bezeichnung Fig. 750 ist:

$AB : AC : AD = P : Q : R$

Nun ist

$AB : BD : AD = \sin ADB : \sin BAD : \sin ABD$

oder

$AB : AC : AD = \sin CAD : \sin BAD : \sin BAC$

also

$P : Q : R = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\gamma$

mithin auch

$P \sin\alpha = Q \sin\beta$

$P \sin\gamma = R \sin\beta$

$Q \sin\gamma = R \sin\alpha$

13. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich bei gegebenen 3 Stücken die übrigen drei Stücke finden.

A. Sind zwei Kräfte und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel gegeben, z. B. P, Q und $\angle\alpha$
so hat man unmittelbar

$$\sin\beta = \frac{P}{Q}\sin\alpha$$

hieraus $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$

$$R = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,Q = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,P$$

Aus P, Q und $\angle\beta$ hat man dieselbe Auflösung für α, γ und R.

Aus P, R und $\angle\beta$ oder $\angle\gamma$ dieselbe Auflösung für α, γ oder β und Q.

Aus Q, R und $\angle\alpha$ oder $\angle\gamma$ dieselbe Auflösung für β, γ oder α und P.

B. Sind 2 Seitenkräfte P, Q und der von ihnen eingeschlossene $\angle\gamma$ gegeben, so hat man in dem $\triangle ABD$:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos ABD$

oder

$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos BAC$

also

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos\gamma$

C. Ist eine Seitenkraft P und die Mittelkraft R mit dem von ihnen eingeschlossenen $\angle\alpha$ gegeben, so hat man in dem $\triangle ABD$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos BAD$

oder

$Q^2 = P^2 + R^2 - 2P \cdot R \cos\alpha$

D. Aus den gegebenen Seitenkräften P, Q und dem eingeschlossenen $\angle\alpha$ hat man in dem $\triangle ABD$

$$\operatorname{tg} BAD = \frac{BD \sin ABD}{AB - BD \cos ABD}$$

oder $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q\sin\gamma}{P + Q\cos\gamma}$$

oder $$\cot\alpha = \frac{P + Q\cos\gamma}{Q\sin\gamma} = \frac{P}{Q}\operatorname{cosec}\gamma + \cot\gamma$$

E. Aus der gegebenen Seitenkraft P, der Mittelkraft R und dem von ihnen eingeschlossenen $\angle\alpha$ hat man im $\triangle ABD$

$$\operatorname{tg} ADB = \frac{BD \cdot \sin BAD}{AD - BD \cdot \cos BAD}$$

oder $$\operatorname{tg}\beta = \frac{Q\sin\alpha}{R - Q\cos\alpha}$$

oder $$\cot\beta = \frac{R - Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha} = \frac{R}{Q}\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha$$

F. Um die Formeln für $\cot\alpha$ und $\cot\beta$ für Rechnung mit Logarithmen geeignet zu machen setze man $\frac{P}{Q}\operatorname{cosec}\gamma =$ der Cotangente eines Winkels μ;
also $\log\cot\mu = \log P - \log Q + \log\operatorname{cosec}\gamma$

Ist hiernach μ bestimmt, so hat man

$$\cot\alpha = \cot\mu + \cot\gamma = \frac{\cos\mu}{\sin\mu} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\gamma + \mu)}{\sin\gamma \cdot \sin\mu}$$

also $$\log\cot\alpha = \log\sin(\gamma + \mu) - \log\sin\gamma - \log\sin\mu$$

Ebenso hat man $\frac{R}{Q}\operatorname{cosec}\alpha = \cot\psi$ gesetzt

$$\log\cot\beta = \log\sin(\alpha - \psi) - \log\sin\psi - \log\sin\alpha$$

II. Statik des materiellen Punkts.

14. Auf einen materiellen Punkt A wirken nach Richtungen, die alle in einer Ebene liegen, gegebene Kräfte, so bestimmt sich die Gröfse und Richtung deren Mittelkraft wie folgt.

Um zuerst die Richtungen AP; AP_1; AP_2; AP_3... der Kräfte P; P_1; P_2... zu bestimmen, nehme man eine beliebige Linie AB als gegeben an, und bezeichne die Winkel, welche die Kräfterichtungen mit derselben nach einer Seite hin von 0 bis 360° gezählt bilden, in derselben Folge mit α; α_1 α_2....

Im Punkt A errichte man auf AB das Loth AC, so fallen die Kräfte in die Linien AB, AC und deren Verlängerungen AB' und AC' oder zwischen dieselben und man kann letztere nach Satz 10 in Seitenkräfte zerlegen, welche in diese Linien AA' und BB' fallen. Aus diesem Grunde sollen diese normal auf einander befindliche Linien Axen heifsen, AB soll die Hauptaxe und AC die Nebenaxe sein.

Durch solche Zerlegung erhält man zwei Systeme von Kräften, welche den gegebenen Kräften gleich gelten und von denen sämmtliche Kräfte des einen Systems in die Axe AB und sämmtliche Kräfte des anderen Systems in die Axe AC fallen. Die Mittelkraft der Kräfte jedes einzelnen Systems ist offenbar der Ueberschufs der nach einer Seite hin wirkenden gröfseren Summe der Kräfte gegen die nach entgegengesetzter Seite hin wirkende kleinere Summe; diese beide Mittelkräfte sind gleichgeltend den ursprünglich gegebenen Kräften und setzt man sie beide zu einer neuen Mittelkraft zusammen, so ist diese die gesuchte Mittelkraft der gegebenen Kräfte.

Fig. 751.

Zerlegt man nun P durch das Parallelogramm nm in die Seitenkräfte Am und An, wenn Ap die Kraft P vertritt, so ist

$$Am = P^x = P \cos \alpha$$

$$An = P^y = P \sin \alpha$$

Diese Ausdrücke gelten für alle übrigen Kräfte P_1; P_2; P_3... P_n

Denn für P_1 ist die Richtung Am_1 negativ, die Richtung An_1 positiv, also

$$-Am_1 = P_1^x = -P_1 \cos p_1 AB' = +P_1 \cos \alpha_1$$

$$An_1 = P_1^y = P_1 \sin p_1 AC = P_1 \sin \alpha_1$$

Für P_2 sind die Richtungen Am_2 und An_2 negativ, also

$$-Am_2 = P_2^x = P_2 \cos p_2\, AB' = -P_2 \cos(\alpha_2 - 180^\circ) = +P_2 \cos \alpha_2$$

$$-An_2 = P_2^y = P_2 \sin p_2\, AB' = -P_2 \sin(\alpha_2 - 180^\circ) = +P_2 \sin \alpha_2$$

Für P_3 ist die Richtung Am_3 positiv, die Richtung An_3 negativ, also

$$Am_3 = P_3^x = P_3 \cos p_3\, AB = P_3 \cos(360^\circ - \alpha_3) = P_3 \cos \alpha_3$$

$$-An_3 = P_3^y = P_3 \sin p_3\, AB = -P_3 \sin(360^\circ - \alpha_3) = +P_3 \sin \alpha_3$$

Fällt die Kraft in eine der beiden Axen, so sei die Richtung der Kraft 1) nach AB gerichtet.

Dann ist $\alpha = 0$ also

$$Am = P^x = P \cos \alpha = P \cos 0 = P$$

$$An = P^y = P \sin \alpha = P \sin 0 = 0$$

Ist 2) die Richtung der Kraft nach AC, dann ist $\alpha_1 = 90^\circ$, also

$$Am_1 = P_1^x = P_1 \cos \alpha_1 = P_1 \cos 90^\circ = 0$$

$$An_1 = P_1^y = P_1 \sin \alpha_1 = P_1 \sin 90^\circ = P_1$$

Ist 3) die Richtung der Kraft nach AB', dann ist $\alpha^2 = 180^\circ$, also

$$-Am_2 = P_2^x = P_2 \cos \alpha_2 = P_2 \cos 180^\circ = -P_2$$

$$An_2 = P_2^y = P_2 \sin \alpha_2 = P_2 \sin 180^\circ = 0$$

Ist 4) die Richtung der Kraft nach AC', dann ist $\alpha_3 = 270^\circ$, also

$$Am_3 = P_3^x = P_3 \cos \alpha_3 = P_3 \cos 270^\circ = 0$$

$$An_3 = P_3^y = P_3 \sin \alpha_3 = P_3 \sin 270^\circ = -P_3$$

Diese so erhaltenen den gegebenen Kräften gleich geltenden Seitenkräfte

setzen sich nun zu zwei Mittelkräften zusammen, deren Richtungen in BB' und CC' fallen.

Die nach AB oder AB' fallende eine Mittelkraft ist die algebraische Summe der in dieser Linie befindlichen Seitenkräfte

$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots$

Die nach AC oder AC' fallende zweite Mittelkraft ist die algebraische Summe der in dieser Linie befindlichen Seitenkräfte

$P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots$

Die an sich additiven Glieder beider Reihen beziehen sich auf die Richtungen AB und AC, die an sich subtractiven Glieder der Reihen beziehen sich auf die Richtungen AB' und AC'.

Beide Kräfte haben den Angriffspunkt A und bilden mit einander rechte Winkel.

Bezeichnet man deren Mittelkraft mit R, dessen Winkel, den sie mit der Axe AB bildet mit ϱ, so hat man deren Seitenkraft nach der Richtung $AB = R\cos\varrho$ und die nach der Richtung $AC = R\sin\varrho$ und es ist

$$R\cos\varrho = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots \quad (1)$$

$$R\sin\varrho = P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots \quad (2)$$

$$R^2 = (P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \ldots)^2 \quad (3)$$

$$\cos\varrho = \frac{1}{R}(P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots) \quad (4)$$

$$\sin\varrho = \frac{1}{R}(P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \ldots) \quad (5)$$

$$tg\,\varrho = \frac{P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \ldots}{P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots} \quad (6)$$

Entwickelt man in dem Ausdruck für R^2 die Quadrate der Polynome, so erhält man

$$R^2 = P^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + P_1^2(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1) + \ldots\ldots$$
$$+ 2PP_1(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \sin\alpha\cdot\sin\alpha_1) + 2PP_2(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_2 + \sin\alpha\cdot\sin\alpha_2)$$
$$+ \ldots\ldots + 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2) + \ldots$$

also

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2PP_1\cos(\alpha_1 - \alpha) + 2PP_2\cos(\alpha_2 - \alpha)$$
$$+ \ldots + 2P_1P_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2P_1P_3\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \ldots$$
$$+ 2P_{n-1}P_n\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

Nun sind $\alpha_1 - \alpha$; $\alpha_2 - \alpha \ldots\ldots \alpha_2 - \alpha_1$; $\alpha_3 - \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n - \alpha_{n-1}$ die Winkel, welche je zwei Kräfte P, P_1; $P_2 P \ldots P_2 P_1$; $P_3 P_1 \ldots P_n P_{n-1}$ unter sich bilden. Man hat demnach das Quadrat der Mittelkraft gleich der Summe der Quadrate aller einzelnen Seitenkräfte plus dem doppelten Product aus je zweien dieser Kräfte mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Richtungswinkels multiplicirt.

15. **Für Kräfte, die in einerlei Ebene liegen und sämmtlich auf einen materiellen Punkt wirken, ist demnach Gleichgewicht, wenn sie keine Mittelkraft liefern, wenn also nach der Bezeichnung No. 14:**

$P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots\ldots = 0$

und zugleich

$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots\ldots = 0$

Die Kräfte sind also im Gleichgewicht, wenn sie nach zweien unter sich normalen Richtungen zerlegt nach jeder dieser Linien Seitenkräfte liefern, deren algebraische Summe = Null ist.

16. **Erklärung.** Das Product einer Kraft mit dem Abstand ihrer Richtung von einem Punkt heifst das **Moment der Kraft** in Beziehung auf diesen Punkt, welcher der **Momentenpunkt** heifst. Werden die Momente mehrerer Kräfte auf diesen Punkt bezogen, so heifst der Punkt **Mittelpunkt der Momente.**

17. **Wirken mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt nach Richtungen, die alle in einerlei Ebene liegen, so ist das Moment deren Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente sämmtlicher gegebenen Kräfte, wenn der Momentenpunkt in derselben Ebene liegt. Zieht man durch den materiellen Punkt und den Momentenpunkt eine gerade Linie, so werden die Momente der nach entgegengesetzten Seiten dieser Linie gerichteten Kräfte entgegengesetzt in Rechnung gebracht.**

Es seien Fig. 752, P; P_1; P_2; P_3 vier

Fig. 752.

Kräfte, der Allgemeinheit der Untersuchung wegen in den vier verschiedenen Quadranten belegen, alle auf den materiellen Punkt A wirkend. Der beliebig gelegene Punkt M sei der Momentenpunkt, A und M durch eine gerade Linie verbunden. Die Winkel der Kräfte mit der geraden Linie AM sind von dieser aus nach einerlei Richtung genommen mit α; α_1; α_2; α_3; Die von M auf die Kräfterichtungen gefällten Lothe mit p; p_1; p_2; p_3 bezeichnet. Setzt man die Länge $AM = a$, die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte $= R$ unter dem $\angle \varrho$ mit AM, so hat man nach No. 15 Formel 2.

$$R \sin \varrho = P \sin \alpha + P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \dots \quad (1)$$

Nun hat man $\sin \alpha = \frac{p}{a}$

$$\sin \alpha_1 = \sin MAP_1 = \frac{p_1}{a}$$

$$\sin \alpha_2 = \sin MAP_2 = \sin (MAp'' + 180^\circ) = -\sin MAp'' = -\frac{p_2}{a}$$

$$\sin \alpha_3 = \sin (MAA' + A'AP_3) = \sin (360^\circ - MAP_3) = -\sin MAP_3 = -\frac{p_3}{a}$$

Setzt man den Abstand des Momentenpunkts von der Richtung der Mittelkraft $= r$, so hat man $\sin \varrho = \pm \frac{r}{a}$, und alle diese Werthe in Gleichung 1 substituirt entsteht die Gleichung

$$\pm \frac{r}{a} R = \frac{p}{a} P + \frac{p_1}{a} P_1 - \frac{p_2}{a} P_2 - \frac{p_3}{a} P_3 \pm \dots$$

oder

$$\pm rR = pP + p_1 P_1 - p_2 P_2 - p_3 P_3 \pm \dots$$

womit der Satz als richtig nachgewiesen ist.

18. Ist $\varrho = 0$ oder 180°, so geht die Mittelkraft durch den Momentenpunkt, $\sin \varrho$ ist $= 0$ und $r = 0$, die algebraische Summe der Seitenkräfte ebenfalls $= 0$. Wenn daher für irgend einen Momentenpunkt die algebraische Summe der Momente der Kräfte $= 0$ wird, so kann dies daher rühren, daſs der Momentenpunkt in der Richtung der Mittelkraft liegt oder auch daher, daſs die Mittelkraft selbst $= 0$ ist, d. h. daſs die Kräfte das Gleichgewicht sich halten.

19. Wenn Kräfte in einerlei Ebene befindlich auf einen materiellen Punkt P wirken und es ist die algebraische Summe deren Momente für zwei Momentenpunkte M, M' genommen, die mit dem materiellen Punkt nicht in einer geraden Linie liegen, für jeden einzelnen $= 0$, so sind die Kräfte unter einander im Gleichgewicht.

Da die algebraische Summe der Momente sämmtlicher Kräfte in Beziehung auf den Punkt $M = 0$ ist, so kann, wenn eine Mittelkraft R existirt, diese nur nach der Linie PM gerichtet sein. Es existirt also keine durch die Linie PM' gerichtete Mittelkraft. Dasselbe findet für den Momentenpunkt M' statt und es existirt also keine Mittelkraft durch die Linie PM. Da aber beides zugleich statt finden muſste und nicht statt finden kann, nämlich daſs die Mittelkraft durch PM und zugleich durch PM' geht,

so existirt überhaupt keine Mittelkraft oder was dasselbe ist, die Mittelkraft ist $= 0$.

20. Erklärung. In dem Art. Geschwindigkeit, pag. 153 am Schlufs ist virtuelle Geschwindigkeit erklärt. Sie ist eine ideelle Geschwindigkeit, eine Geschwindigkeit die aus einer Bewegung hervorgehen würde, wenn die Kräfte nicht im Gleichgewicht, nicht in der Ruhe wären.

Denkt man sich das System der Kräfte Fig. 752, in fortschreitender Bewegung und der materielle Punkt A mache mit sämmtlichen auf ihn wirkenden Kräften den Weg $AM = a$, so ist, wenn man den Weg a in der Zeiteinheit zurückgelegt denkt, a die Geschwindigkeit von A also die virtuelle G. des Punktes A.

Die Kraft P wirkt jetzt in dem Punkt M nach einer mit ihrer ursprünglichen Richtung AP parallelen Richtung, sie hat sich also ihrem nach AP gerichteten Ziele um die Länge $Aa_0 = a \cos\alpha$ genähert und die virtuelle G. von P ist $= a \cos\alpha$.

Die Kraft P_1 wirkt $\pm$ mit sich selbst in M, sie hat sich von ihrem nach AP_1 gerichteten Ziele um die Länge $Aa_1 = a \cos MAa_1 = -a \cos\alpha_1$ entfernt, d. h. um die Länge $a \cos\alpha_1$ genähert und es ist $a \cos\alpha_1$ die virtuelle G. von P_1. Desgleichen $a \cos\alpha_2$ die virtuelle G. von P_2 und $a \cos\alpha_3$ die von P_3.

Man spricht auch blofs von der virtuellen G. des materiellen Punkts, und sagt: $AM = a$ ist die virtuelle G. des materiellen Punkts A an sich. Aa_0 die virtuelle G. des materiellen Punkts nach der Richtung der Kraft $P_1 - Aa_1$ die nach der Richtung der Kraft P_1 u. s. w.

Stellt man sich eine drehende Bewegung vor, die in derselben Ebene der Kräfte um den Punkt M geschieht, so geschehe die Bewegung in der Zeiteinheit rechts um den Bogen φ (für den Halbmesser = 1), so ist offenbar die virtuelle G. des materiellen Punkts $A = a\varphi$; die der Kraft $P = p\varphi = a\varphi \cdot \sin\alpha$; die der Kraft $P_1 = -p_1\varphi = -p\varphi \cdot \sin\alpha_1$ u. s. w.

21. Wirken mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt A, deren Richtungen in eine Ebene fallen, so ist das Product aus ihrer Mittelkraft R und der virtuellen G. derselben (= der virtuellen G. des materiellen Punkts auf die Richtung derselben) gleich der algebraischen Summe derselben Producte für jede der einzelnen Seitenkräfte, wenn die virtuellen G., welche in die Richtungen der Kräfte fallen, additiv und die, welche in deren Verlängerungen fallen, subtractiv in Rechnung gebracht werden.

Denn nach No. 14, Formel 1, in Beziehung auf Fig. 751 also auch auf Fig. 752 ist

$$R \cos\varrho = P \cos\alpha + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots \quad (1)$$

Setzt man wie vorher $AM = a$, die virtuelle Geschwindigkeit für die Mittelkraft $R = V$, die für P; P_1; P_2; P_3 aufeinander folgend $= v$; v_1; v_2; v_3 so ist

$$V = \pm a \cos\varrho; \quad \text{also } \cos\varrho = \pm \frac{V}{a}$$

$$v = Aa_0 = a \cos\alpha; \quad \text{also } \cos\alpha = + \frac{v}{a}$$

$$v_1 = Aa_1 = -a \cos\alpha_1; \text{ also } \cos\alpha_1 = -\frac{v_1}{a}$$

$$v_2 = Aa_2 = -a \cos\alpha_2; \text{ also } \cos\alpha_2 = -\frac{v_2}{a}$$

$$v_3 = Aa_3 = a \cos\alpha_3; \quad \text{also } \cos\alpha_3 = +\frac{v_3}{a}$$

Diese Werthe in Gleichung 1 substituirt geben

$$\pm R \frac{V}{a} = P \frac{v}{a} - P_1 \frac{v_1}{a} - P_2 \frac{v_2}{a} + P_3 \frac{v_3}{a} \pm \ldots\ldots$$

und mit a multiplicirt:

$$\pm VR = vP - v_1P_1 - v_2P_2 + v_3P_3 \pm \ldots\ldots$$

22. Liegt der Punkt M aufserhalb der Ebene der Kräfte, so projicire die Linie AM auf diese Ebene, diese wird AM_1 wenn M_1 die Projection des Punktes M ist, verbinde M_1 mit den Projectionspunkten a_0; a_1; a_2 .... des Punkts M auf die Kraftrichtungen, so sind die Linien M_1a_0; M_1a_1; M_1a_2 .... auf den Kraftrichtungen normal, folglich hat man den Satz No. 21 für dieselben virtuellen Geschwindigkeiten, der Punkt M mag in oder aufserhalb der Ebene der Kräfte liegen.

23. Ist ϱ (s. No. 21) $= 90°$, so ist $V = 0$.

Also

$$0 = vP - v_1 P_1 - v_2 P_2 + v_3 P_3 \pm \ldots\ldots$$

Ist also die virtuelle G. des materiellen Pnnkts an sich auf der Richtnng der Mittelkraft normal, se ist die algebraische Summe der virtuellen Geschwindigkeitsprodncte = Null.

24. Nimmt man zwei virtuelle Geschwindigkeiten des materiellen Pnnkts an sich, die beide nicht in einerlei geraden Linie liegen, und es sind die algebraischen Summen der virtuellen Geschwindigkeitsproducte nach den Richtungen der Kräfte jede für sich = 0, so sind die Kräfte mit einander im Gleichgewicht

Denn die algebraische Summe der virtuellen Geschwindigkeitsproducte kann = 0 sein, sowohl weil die virtuelle G. nach der Richtung der Mittelkraft = 0 oder die Mittelkraft selbst = 0 ist. Für die angenommenen virtuellen G. des materiellen Punkts an sich können aber die ihnen entsprechenden virtuellen G. nach der Richtnng der Mittelkraft nicht beide zugleich = 0 sein, weil sonst beide erstgenannten virtuellen G. auf der Richtung der Mittelkraft normal sein müfsten, welches nicht möglich ist, weil beide virtuellen G. nicht in einer geraden Linie liegen; mithin mufs nach den Bedingungen des Satzes die Mittelkraft selbst = 0 sein, d. h. die Kräfte halten einander das Gleichgewicht.

25. Wirken auf einen materiellen Punkt drei Kräfte, deren Richtnngen nicht in einer Ebene liegen und nimmt man von dem materiellen Pnnkt aus auf diesen Richtungen Stücke, die sich wie die nach ihnen wirkenden Kräfte verhalten, construirt dann zu diesen Stücken als Nebenkanten ein Parallelepiped, so ist die durch den materiellen Punkt liegende Diagonale die Richtung und in dem Verhältnifs zu den auf den Kraftrichtungen genommenen Stücken die Gröfse der Mittelkraft der drei Seitenkräfte.

Denn wirken auf den materiellen Pnnkt A drei Kräfte P, Q, S nach den Richtungen AB, AD, AE nnd sind

$$P : Q : S = AB : AD : AE$$

so entsteht das Parallelepiped, Fig. 751, nnd AG ist die Diagonale, welche die Richtung nnd Gröfse der zu den Kräften P, Q, S gehörigen Mittelkraft sein soll.

Die Diagonale AC ist die der Richtung nnd Gröfse nach zu P nnd Q gehörige Mittelkraft R_1 (s. Satz 10) nnd es ist

$$P : Q : R_1 = AB : AD : AC$$

Fig. 753.

Nun gibt diese Mittelkraft R_1 mit der dritten Seitenkraft S eine Mittelkraft R, welche zugleich die Mittelkraft aller drei Kräfte P, Q und S ist, und diese Mittelkraft ist nach demselben Satz 10 die Diagonale AG des Parallelogramms $ACEG$.

Es ist somit

$$P : Q : S : R = AB : AD : AE : AG$$

26. Sind die Richtungen AB, AD, AE gegenseitig auf einander normal, so hat man

$$AG^2 = AC^2 + AE^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2$$

folglich aus der letzten Proportion

$$R^2 = S^2 + R_1^2 = P^2 + Q^2 + S^2$$

Ist $\angle GAB = \alpha$; $\angle GAD = \beta$; $\angle GAE = \gamma$, so ist

$$AB = AG \cos\alpha;\ AD = AG \cos\beta;\ AE = AG \cos\gamma$$

Daher auch für rechtwinklig unter einander befindliche Kräfte

$$P : Q : S : R = AG \cdot \cos\alpha : AG \cdot \cos\beta : AG \cdot \cos\gamma : AG$$
$$= \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1$$

woraus

$$P = R \cdot \cos\alpha;\ Q = R \cdot \cos\beta;\ S = R \cdot \cos\gamma$$

Sind also die drei Winkel bekannt, welche eine Kraft mit dreien unter sich normalen Linien bildet, so erhält man die nach diesen drei Linien gerichteten

Seitenkräfte zu der gegebenen als Mittelkraft, wenn man diese mit den Cosinus der Winkel multiplicirt, die zwischen den Richtungen der Mittelkraft und den der drei unter sich normalen Linien statt finden.

Es folgt zugleich, wenn die Seitenkräfte gegeben sind

$$\cos\alpha = \frac{P}{R};\ \cos\beta = \frac{Q}{R};\ \cos\gamma = \frac{S}{R}$$

und da $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$, so sind die Richtungswinkel der Mittelkraft gegen die Seitenkräfte bestimmt und die Mittelkraft auch ihrer Lage nach bekannt.

27. Das Parallelepipedum, welches die Gröfse und Richtung der Mittelkraft dreier auf einen Punkt wirkende in verschiedenen Ebenen liegenden Kräfte bestimmt, heifst das **Parallelepipedum der Kräfte.**

28. Auf einen materiellen Punkt wirken nach beliebigen Richtungen im Raum gegebene Kräfte, ihre Mittelkraft nach Gröfse und Lage zu bestimmen.

P; P_1; P_2 ..... seien die gegebenen Kräfte, A der materielle Punkt, auf den

Fig. 754.

sie wirken. Zu Bestimmung ihrer Richtungen nehme man von A aus drei beliebig gelegene aber unter sich normale Linien AB, AC, AD und bestimme die Winkel, welche jede Kraftrichtung mit diesen Normalen als Richtungsaxen macht, wobei die Winkel von 0 bis 180° gezählt werden.

Für die Kräfte P; P_1... seien die Richtungswinkel mit $AB = \alpha$; α_1... mit $AC = \beta$; β_1..., mit $AD = \gamma$; γ_1...

Sind zuerst α, β, γ spitze Winkel, so fällt die Richtung der Kraft P innerhalb der Körperecke von den Kanten AB, AC, AD, und liefert nach Satz 26 in drei in diese Kanten fallenden Seitenkräfte zerlegt nach AB die Seitenkraft $P\cos\alpha$, nach AC die Kraft $P\cos\beta$ und nach AD die Kraft $P\cos\gamma$.

Ist zweitens α stumpf und sind die beiden andern β, γ spitz, so fällt die Kraft P innerhalb der Ecke $DCB'A$, die Seitenkräfte von P sind nach AC, AD und AB' gerichtet, die Kraft P bildet mit AB' den $\angle(180° - \alpha)$ und diese Seitenkräfte sind also $-P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ und $P\cos\gamma$, mit welchen Werthen die Richtungen der Seitenkräfte ausgesprochen sind.

Eben so verhält es sich, wenn β und γ stumpf sind, wo dann die subtractiven Vorzeichen andeuten, dafs die Seitenkräfte nach den Richtungen AC' und AD' hin liegen. Und so verhält es sich mit den übrigen Kräften P_1; P_2 ... mit den ihnen zugehörigen Winkeln α_1; α_2 ... β_1; β_2 ... γ_1; γ_2 ... Man hat demnach mit Zerlegung sämmtlicher Kräfte die Seitenkräfte nach AB und AB':

$$\pm P\cos\alpha \pm P_1\cos\alpha_1 \pm P_2\cos\alpha_2 \pm \ldots.$$

nach der Richtung AC, AC'

$$\pm P\cos\beta \pm P_1\cos\beta_1 \pm P_2\cos\beta_2 \pm \ldots.$$

nach der Richtung AD, AD'

$$\pm P\cos\gamma \pm P_1\cos\gamma_1 \pm P_2\cos\gamma_2 \pm \ldots$$

Diese drei Summen geben drei Kräfte, welche die Mittelkräfte jener Seitenkräfte sind und für die gegebenen Kräfte P; P_1; P_2 ... eingesatzt dieselbe Wirkung ausüben.

Bezeichnet man diese drei Mittelkräfte mit Q; Q_1; Q_2, so setzen sich diese wieder zu einer Mittelkraft R zusammen, welche der den gegebenen Kräften zugehörigen Mittelkraft an Gröfse und Richtung identisch ist. Sind die Winkel der Mittelkraft R mit den Axen AB, AC, $AD = \alpha'$, β', γ', so hat man

$$R\cos\alpha' = Q;\ R\cos\beta' = Q_1;\ R\cos\gamma' = Q_2$$

Quadrirt man diese 3 Gleichungen, so hat man

$$R^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') = Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2 \qquad (1)$$

Nun ist nach dem Art. „Körpertrigonometrie" No. 17 mit Fig. 740, pag. 36, der Werth der Klammergröfse = 1, mithin hat man

$$R^2 = Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2$$
$$= (P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots)^2 + (P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots)^2 \qquad (2)$$

Ferner hat man die Richtungswinkel der Mittelkraft R mit den Axen

$$\cos\alpha' = \frac{Q}{R} = \frac{P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots}{R}$$

$$\cos\beta' = \frac{Q_1}{R} = \frac{P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots}{R}$$

$$\cos\gamma' = \frac{Q_2}{R} = \frac{P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots}{R}$$

29. Entwickelt man die Quadrate der Polynome von R^2, so erhält man

$$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + P_1^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) \\ & + P_2^2(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) + \ldots + 2PP_1(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1) \\ & + 2PP_2(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_2) + \ldots \\ & + 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2) + 2P_1P_3(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3 + \ldots) + \ldots \\ & + 2P_2P_3(\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3 + \ldots)\ldots \\ & + \ldots \\ & + 2P_{n-1}P_n(\cos\alpha_{n-1}\cdot\cos\alpha_n + \ldots) \end{aligned} \qquad (1)$$

Nun ist jede der ersten Klammergrößen, die Summe der Quadrate von drei Cosinus enthaltend, nach dem ad 27 gedachten Satz = 1, und nach dem folgenden Satz 18, die Klammergrößen, welche die Summe der Producte je zweier der drei Cosinus enthalten = dem Cosinus des Winkels, den die beiden zu ihnen gehörigen Kraftrichtungen mit einander bilden. Bezeichnet man daher den Winkel je zweier solcher Kraftrichtungen mit den neben einander gestellten Kraftzeichen selbst, so hat man

$$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2 + P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2PP_1\cos(PP_1) + 2PP_2\cos(PP_2) + \ldots \\ & + 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + \ldots + 2P_{n-1}P_n\cos(P_{n-1}P_n) \end{aligned} \qquad (2)$$

30. **Die Mittelkraft mehrerer Seitenkraft multiplicirt mit der virtuellen Geschwindigkeit des Angriffspunkts der Kräfte nach der Richtung der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Producte aus jeder Seitenkraft multiplicirt mit der nach ihr gerichteten virtuellen Geschwindigkeit des materiellen Punkts.**

Der Beweis davon ist wie der No. 21. Bezeichnet auch hier V die virtuelle G. des materiellen Punkts nach der Richtung der Mittelkraft; bezeichnen ferner v; v_1; v_2 .... die virtuellen G. desselben Punkts nach den Richtungen der Kräfte P; P_1; P_2 ... so erhält man die Schlußgleichung

$$VR = vP + v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots v_nP_n$$

31. **Bei derselben Bezeichnung der Kräfte und deren Richtungswinkel sind die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewicht wenn**

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$$
$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$$
$$P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots = 0$$

Denn nach No. 28 sind die drei = 0 gesetzten algebraischen Summen die nach den drei gewählten Axen gerichteten Mittelkräfte der nach diesen Axen in Seitenkräfte zerlegten gegebenen Kräfte P; P_1; P_2..; sind also mit den gegebenen Kräften gleichgeltend, und es kann bei diesen nur Gleichgewicht bestehen, wenn es unter diesen drei Mittelkräften besteht. Da sich nun drei Kräfte, deren Richtungen nicht in einerlei Ebene liegen, (s. Satz 24) nach dem Parallelepipedum der Kräfte zu einer Mittelkraft zusammen setzen, so kann das System nur im Gleichgewicht sein, wenn diese Mittelkraft = 0, wenn also jede der algebraischen Summen von je in einerlei geraden Linie wirkenden Seitenkräften = 0 ist.

32. Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn deren Mittelkraft = 0 ist; daher kann man das Gleichgewicht auch ausdrücken, wenn man in No. 29, Gleichung 2, $R = 0$ setzt. Folglich besteht das Gleichgewicht zwischen den gegebenen Kräften, wenn die algebraische Summe aus den Quadraten dieser Kräfte und den doppelten Producten je zweier derselben mit dem Cosinus ihres Richtungswinkels = 0 ist.

Diese Bedingung begreift die drei Bedingungen No. 31 in sich, denn jene al-

gebraische Summe ist wie No. 29, Gleichung 1 und No. 28, Glaichung 2 besagt

$$(P\cos\alpha + P_{,}\cos\alpha_{,} + \ldots)^2 + (P\cos\beta + P_{,}\cos\beta_{,} + \ldots)^2 + (P\cos\gamma + P_{,}\cos\gamma_{,} + \ldots)^2$$

so dafs also jedes einselne der drei Glieder = 0 sein mnfs.

III. Statik der materiellen Ebenan.

33. **Wirken auf swei Pnnkte einer Ebene swei Kräfte, deren Richtungen $\ddagger$ lanfen, so ist ihre Mittelkraft die Snmme oder der Unterschied der Seitenkräfte, je nachdem sie nach einerlei oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, dia Richtung der Mittelkraft ist denen der Seitenkräfte $\ddagger$ nnd theilt die Verbindungslinie der heiden Angriffspnnkte dergestalt, dafs jede Kraft dem Theil der Verbindungslinie proportional ist, der swischen den Richtungen der heiden übrigen Kräfte begriffen ist.**

Sind A und B die heiden materiellen Punkte, anf welche die Kräfte P und Q

Fig. 755.

nach den parallelen Richtungen AP und BQ wirken, so bringe nach den Verlängerungen der Linie AB nach AH und BJ swei gleich grofse Kräfte p, p an, so werden dadurch nach Satz 2 die Wirkungen der Kräfte P nnd Q nicht geändert. Nnn kann man aber die anf den Punkt A wirkenden Kräfte P nnd p (nach No. 10) su einer Mittelkraft susammen setzen; deren Richtnng sei AE, und eben so die auf B wirkenden Kräfta Q nnd p an einer Mittelkraft, die nach BF gerichtet sain möge. AE nnd BF verlängere man rückwärts bis sie sieh in G schneidan und wo sie nach No. 4 mit nngeänderten Richtnngen wirkend gedacht werden können. Zieht man nnn durch G eine Linie $CD \ddagger AB$ nnd verlängert PA und QB bis in die Linie CD, serlegt fernar die in dem Punkt G nach GE und GF wirkenden Kräfte nach den Richtungen GC, GD uud $GK \ddagger CP \ddagger DQ$, nämlich die Kraft GE uach GC und GK nnd die Kraft GF nach GD nnd GK, so sind die beiden nach GC und GD zerlegten Seitenkräfte $= p$, die sich einander das Gleichgewicht halten; es bleiben daher nnr die nach GK serlegten Kräfte $= P + Q = R$ übrig.

Nnn ist wegen des Parallelogramms der Kräfte

$$p : P = CG : GK = AK : GK$$

und

$$Q : p = GK : GD = GK : BK$$

woraus

$$P : Q : R = BK : AK : AB$$

Hieraus folgt umgekehrt, dafs eine Kraft R nach swei mit ihr parallelen Richtungen in swei Seitenkräfte sich zerlegen läfst, deren Summe gleich der Kraft R, und die sich umgekehrt verhalten, wie die Stücke, die zwischen ihren Richtuugen nnd der Kraft R auf einer Liuie begriffen sind, welche die Kräfterichtungen schneidet.

Sind nun sweitens die Kräfte P nnd Q parallel nnd entgegengesetzt gerichtet (Fig. 756) und ist $Q > P$, so kann man Q als die Mittelkraft zweier Kräfte P' und R ausehen, wo P' der Kraft P = und gerade entgegengesetzt ist, die andere R aber die verlängerte AB iu einem Punkt C durchschneidet, dergestalt dafs

$$Q : P' : R = AC : BC : AB$$

Nnn ist $P' = P$, folglich halten sich P und P' das Gleichgewicht; as bleibt daher statt der ursprünglich gegebenen Kräfte P und Q nnr R als ihnen gleichgeltend übrig, wenn man statt Q ihre beiden gleichgeltenden Seitenkräfte P' und R einsetzt. Mithin ist R dia Mittelkraft swischen P und Q und weil $Q = P' + R = P + R$, so ist $R = Q - P$.

Varwandelt man die Proportionen des Satzes in Producte der äufseren und der Mittelglieder, so erhält mau ad 1, Fig. 753

$$BK \cdot R = AB \cdot P$$

$$AK \cdot R = AB \cdot Q$$

ad 2, Fig. 756

$$AC \cdot R = AB \cdot Q$$

hierans $AC = \frac{Q}{R} AB = \frac{Q}{Q - P} AB$

Ist $Q = P$, so ist $AC = \frac{Q}{0} AB = \infty$; d. h.

Fig. 756.

Es findet in diesem Fall keine Mittelkraft statt.

34 Erklärung. Zwei gleiche parallel und entgegengesetzt wirkende Kräfte heifsen ein Kräftepaar, das Product zwischen einer derselben und ihrem Abstande heifst das Moment des Kräftepaars. Fig. 757 ist $P - P$ ein Kräftepaar; ist $CG = a$ normal auf P und P', also deren Abstand, so ist $CG \times P = aP$ das Moment von $P - P$.

35. Zwei gleiche und parallel entgegengesetzte Kräfte können mit einer dritten Kraft nicht im Gleichgewicht sein.

Denn sind AB und CD die beiden pa-

Fig. 757.

rallelen Richtungen der gleichen Kräfte P und $-P$, und es wäre möglich, dafs eine Kraft Q nach irgend einer in derselben Ebene befindlichen Richtung EF den beiden Kräften das Gleichgewicht hielt, so läfst sich eine Linie DH ‡ der Linie EF ziehen, die also dieselbe Lage wie EF gegen beide Kräfte P und $-P$ hat, und es müfste ebenso gut eine Kraft Q nach der Richtung DH wirkend, mit P und $-P$ im Gleichgewicht sein. Bringt man nun in der Linie DH zwei Kräfte Q' und Q'' an, jede $= Q$ und entgegengesetzt wirkend, so wird das Gleichgewicht wie vorher bestehen. Nun müfste aber, wie eben gesagt, auch Q' den Kräften P und $-P$ das Gleichgewicht halten, und folglich müfsten Q und Q'' mit einander im Gleichgewicht sein. Beide sind aber ‡ und nach einerlei Richtung, folglich haben sie nach No. 33 eine Mittelkraft $= 2Q$, es kann mithin eine einzige Kraft wie Q oder Q' den beiden Kräften P und $-P$ nicht das Gleichgewicht halten.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn die Kraft Q aufserhalb der Ebene der Kräfte P und $-P$ liegend angenommen wird.

36 Aus dem vorigen Satz folgt unmittelbar, dafs zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte keine Mittelkraft haben, denn gäbe es eine solche, so würde die ihr gleiche und entgegengesetzt wirkende Kraft beiden Kräften das Gleichgewicht halten, welchem Satz 35 widerspricht (ist auch No. 34 analytisch nachgewiesen).

37. Die Mittelkraft aus mehreren in einer Ebene und parallel wirkenden Kräften ist die algebraische Summe aller Seitenkräfte und das Moment der Mittelkraft = der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte, wenn man diejenigen Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung bringt, welche nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, und eben so die Vorzeichen der vom Momentenpunkt auf entgegengesetzten Seiten liegenden Abstände entgegengesetzt nimmt.

Denn es seien

1. zwei nach einerlei Seite gerichtete Kräfte P und Q, so nehme man in der Ebene deren Richtungen aufserhalb derselben einen Punkt M zum Momentenpunkt, ziehe von M aus auf die Richtungen eine winkelrechte Linie, welche dieselben in A und B schneidet, so hat man die Mittelkraft R beider Kräfte denselben parallel, $= P + Q$ und deren Lage ist nach Satz 34 zwischen A und B in C der Art, dafs $AC \cdot R = AB \cdot Q$ oder $BC \cdot R = AB \cdot P$

Aus $R = P + Q$

folgt $AM \cdot R = AM \cdot P + AM \cdot Q$

hierzu $AC \cdot R = AB \cdot Q$

gibt $(AC + AM) \cdot R = AM \cdot P + (AB + AM) \cdot Q$

oder $CM \cdot R = AM \cdot P + BM \cdot Q$ (1)

Nimmt man den Momentenpunkt M' zwischen beiden Kräften P und Q, so hat man, weil $R = P + Q$

Fig. 758.

$$MM' \cdot R = MM' \cdot P + MM' \cdot Q \quad (2)$$

Diese Gleichung von Gleichung 1 abgezogen gibt

$$(CM - M'M) \cdot R$$
$$= (AM - M'M) \cdot P + (BM - M'M) \cdot Q$$

oder $CM' \cdot R = - AM' \cdot P + BM' \cdot Q$

Das Moment der Mittelkraft ist also = der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte; die Abstände, welche auf entgegengesetzten Seiten des Momentenpunkts liegen, entgegengesetzt in Rechnung gebracht.

Wird der Momentenpunkt M' in C genommen, so ist $MC = MM'$ und $CM' = 0$, mithin nach Gleichung 2

$$0 = - AC \cdot P + BC \cdot Q$$

D. h. Für einen in der Richtung der Mittelkraft gelegenen Momentenpunkt ist die algebraische Summe der Momente der Seitenkräfte = 0.

Liegt der Punkt M' zwischen B und C, so wird $M'M > CM$ und dann wird $CM - M'M = - CM'$. Man hat also für diesen Fall

$$- CM' \cdot R = - AM' \cdot P + BM' \cdot Q$$

2. Sind zwei Kräfte P, $Q \neq$ nach entgegengesetzten Seiten gerichtet und nimmt man aufserhalb beider Kräfte in deren Ebene einen Momentenpunkt M, zieht von diesem auf die Richtungen der Kräfte

Fig. 759.

eine Normale, welche die Kräfte P und Q in A und B schneidet, so hat man, wenn $Q > P$, die Mittelkraft $R = Q - P$ und die verlängerte MB schneidet deren Richtung in einem Punkt C, so dafs $AC \cdot R = AB \cdot Q$

Aus $R = Q - P$ folgt (3)

$$AM \cdot R = AM \cdot Q - AM \cdot P$$

hierzu $AC \cdot R = AB \cdot Q$

gibt addirt

$$CM \cdot R = BM \cdot Q - AM \cdot P \quad (4)$$

D. h. das Moment der Mittelkraft ist = der algebraischen Summe der Momente beider Seitenkräfte, wenn man die der gröfseren Kraft Q entgegengesetzt wirkende Kraft P subtractiv in Rechnung bringt.

Nimmt man einen Momentenpunkt M' zwischen den Kräften P und Q, so hat man aus Gleichung 3

$$MM' \cdot R = MM' \cdot Q - MM' \cdot P$$

Diese von Gleichung 4 subtrahirt gibt

$$(CM - M'M) \cdot R = (BM - M'M) \cdot Q - (AM - MM') \cdot P$$

oder

$$CM' \cdot R = BM' \cdot Q + AM' \cdot P$$

Hier erscheinen die Kräfte Q und R additiv, die ihnen entgegengesetzt gerichtete Kraft P subtractiv, die Abstände BM', CM' additiv, der ihnen vom Momentenpunkt aus entgegengesetzt liegende Abstand AM' subtractiv in Rechnung gebracht.

Ist $Q < P$, so ist $R = P - Q$. Behält man aber die Gleichung $R = Q - P = - (P - Q)$, so gibt das subtractive Vorzeichen an, dafs die Mittelkraft in diesem Falle der zuerst betrachteten Kraft Q entgegengesetzt gerichtet ist. Nimmt man nun zuerst den Momentenpunkt M aufserhalb der Richtung aller drei Kräfte und verlegt ihn dann beliebig innerhalb der Richtungen, so erhält man auf dieselbe Art wie zuvor die Gleichheit zwischen den Momenten der drei Kräfte, in sofern man die Vorzeichen der darin vorkommenden Gröfsen wie im ersten Fall bestimmt. In allen Fällen also, wo auch der Momentenpunkt angenommen werden mag, hat man allgemein die beiden Gleichungen

$$R = P + Q$$
$$CM \cdot R = AM \cdot P + BM \cdot Q$$

3. Sind mehrere Kräfte P, P', P'' ... nach einerlei Seite gerichtet und sind

a, a', a'' ... die Abstände ihrer Richtungen von irgend einem Momentenpunkt M, ist R die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte, r ihr Abstand von dem Momentenpunkt, so hat man allgemein

$$R = P + P' + P'' + \ldots$$
$$rR = aP + a'P' + a''P'' + \ldots$$

sofern man diejenigen Abstände subtractiv nimmt, die gegen den Abstand a auf entgegengesetzter Seite des Momentenpunkts liegen.

Dann ist R' die Mittelkraft von P und P', R'' die Mittelkraft von R' und P'' u. s. w. und sind die den Mittelkräften zugehörigen Abstände r', r'' ..., so hat man aus 1)

$$R' = P + P'$$
$$R'' = R' + P'' = P + P' + P''$$
$$R''' = R'' + P''' = P + P' + P'' + P'''$$

u. s. w.

Ferner

$$r'R' = aP + a'P'$$
$$r''R'' = r'R' + a''P'' = aP + a'P' + a''P''$$

u. s. w.

4. Sind von den Kräften P, P', P'' ... mehrere $\pm$ entgegengesetzt gerichtet, so nimmt man zuerst die nach einerlei Seite und dann die nach der entgegengesetzten Seite hin gerichteten Kräfte. Ist R' die Mittelkraft der ersteren, r' deren Abstand vom Momentenpunkt, R'' und r'' dieselben Gröfsen für die entgegengesetzten Kräfte, so hat man für das ganze System

$$R = R' + R''$$
$$rR = r'R' + r''R''$$

38. **Zwei gleiche entgegengesetzte parallele Kräfte bleiben in ihrer Wirkung ungeändert, wie ihre Richtungen in der Ebene liegen mögen, wofern nur der Abstand derselben voneinander ungeändert bleibt.**

Denn es sei AB der Abstand der beiden Kräfte P und $-P$. Ist C die Mitte von AB, und man nimmt

1. die geänderte Lage des Abstandes DE durch die Mitte C von AB, so ziehe durch C eine beliebige gerade Linie DE, mache $CD = CE = CA$, also $DE = AB$. In D und E bringe man normal auf DE gerichtete Kräfte an, die alle einander gleich und $= P$ sind, und je zwei und zwei in entgegengesetzten Richtungen, auf D und E die Kräfte P und $-P$ und die Kräfte $-P''$ und P'', so werden die Wirkungen der ursprünglichen Kräfte P und $-P$ nicht geändert. Verlängert man die Kraftrichtungen $D(-P'')$ und $B(-P)$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt F, so kann man beide Kräfte $-P$ und $-P''$

Fig. 760.

mit ungeänderten Richtungen in F wirkend annehmen (Satz 4), wo beide zu einer Mittelkraft vereinigt werden können, die, weil $P = P''$, den $\angle DFB$ halbirt (Satz 7); d. h. die nach der Linie CF gerichtet ist.

Eben so geben die Kräfte $+P$ und $+P''$, beide mit ungeänderten Richtungen in dem Punkt G angebracht, eine nach CG gerichtete Mittelkraft, die mit CF in einerlei gerade Linie fällt, weil CF den $\angle BCD$ und CG den $\angle ACE$ halbirt.

Da nun $\mp P = \mp P''$, so sind auch beide Mittelkräfte einander gleich, gerade entgegengesetzt gerichtet, mithin heben sie sich einander auf, und folglich heben sich einander auf oder halten einander das Gleichgewicht die vier Kräfte P, $-P$, P'' und $-P''$ und die Wirkung der übrigen beiden Kräfte P' und $-P'$ haben mit den ursprünglich gegebenen beiden Kräften P und $-P$ dieselbe Wirkung.

Hieraus geht hervor, **dafs man den Abstand AB um seine Mitte in der Ebene beliebig herumdrehen kann, ohne dafs die Wirkung der Kräfte dadurch geändert wird.**

Man kann aber auch beiden Kräften in derselben Ebene eine beliebige Lage geben, ohne dafs ihre Wirkung geändert wird, wenn nur ihr Abstand dem ersten Abstand = bleibt.

Nimmt man

2. den neuen Abstand $DE \neq AB$, so

setze auf die Endpunkte D und E, normal DE zwei Paar einander entgegengesetzte nnd der Kraft P gleiche Kräfte

Fig. 761.

$-P'$, P'' nnd P', $-P''$, so werden durch diese neu hinzngekommenen Kräfte die Wirkungen der ersten Kräfte nicht geändert. Nun ziehe die beiden Geraden AD nnd BE, so schneiden sich dieselben als Diagonalen eines Parallelogramms in ihrem beiderseitigen Halbirungspunkt C. Die beiden gleichen Kräfte P und P'' in A nnd D lassen sich also zu einer durch C gerichteten, mit P nnd P'' parallelen Mittelkraft $= 2P$ zusammensetzen. Eben so setzen sich die beiden Kräfte $-P$ und $-P''$ zu einer durch C mit ihnen $\ddagger$ gerichteten Mittelkraft $-2P$ zusammen.

Aus den vier zuletzt betrachteten Kräften entstehen also zwei gleiche und gerade entgegengesetzt gerichteten Kräfte $2P$ und $-2P$, die nun mit einander im Gleichgewicht sind nnd die also aus dem System hinweggenommen werden können, ohne dafs die ursprünglich gegebene Wirkung gestört wird. Da nun bei solcher Hinwegnahme die beiden Kräfte P' und $-P'$ übrig bleiben, so wirken diese eben so wie die zuerst gegebenen Kräfte P und $-P$, womit der Satz erwiesen ist.

Nimmt man

3. eine in derselben Ebene mit AB befindliche ihr gleiche Linie $D'E'$ mit den der Kraft P gleichen Kräften P, $-P_{,}$, so drehe diese Linie um deren Mitte F in die der AB parallele Lage DE, so ist nach dem ersten Theil des Satzes das an DE befindliche Kräftepaar mit dem an $D'E'$ befindlichen gleichgeltend; dieses aber nach dem zweiten Theil gleichgeltend mit dem an AB befindlichen Kräftepaar, folglich das Kräftepaar an $D'E'$ gleichgeltend mit dem an AB und somit der Satz als allgemein gültig erwiesen.

39. **Zwei Kräftepaare in einerlei Ebene wirkend sind gleichgeltend, wenn das Product aus dem Abstand des einen Paars und einem seiner Kräfte dem Product der selben Factoren des anderen Paares gleich ist, und beide Paare nach derselben Seite hin nach Drehung wirken; d. h. übereinstimmend gerichtet sind; oder diese Producte, Momente der Paare genannt, wenn ihre Momente gleich sind.**

Denn es sei AB (Fig. 762) der Abstand des einen Kräftepaars P und $-P$, CD der Abstand des anderen Q und $-Q$ nnd $AB \times P = CD \times Q$. Bringt man an die Kräfte Q nnd $-Q$ die ihnen gleichen Kräfte Q' nnd $-Q'$ entgegengesetzt, so sind diese 4 Kräfte im Gleichgewicht, und es bleibt für die Wirkung in der Ebene nur das Kräftepaar P nnd $-P$.

Verlängert man nun AB bis E, so dafs $BE = CD$, so kann man nach No. 38, 3 das Paar Q' nnd $-Q'$ so verlegen, dafs ihr Abstand BE ist; dann sind P nnd Q' nach einer und $-P$ und $-Q'$ nach der anderen Seite gerichtet. Da nun $Q' = Q$, $BE = CD$, nnd $AB \cdot P = CD \cdot Q = BE \cdot Q'$, so geht (nach Satz 37) die Mittelkraft von P nnd Q' durch B, ist $\ddagger$ P nnd Q' und $= P + Q'$. Dieser nun wirken gerade entgegengesetzt die Kräfte $-P$; $-Q' = -(P + Q')$, folglich sind die vier Kräfte P, $-P$, Q', $-Q'$ im Gleichgewicht, ändern die Wirkung der an CD befindlichen Kräfte Q und $-Q$ nicht, und folglich ist die Wirkung der Kräfte P nnd $-P$ an AB = der Wirkung des an CD zurückgebliebenen Kräftepaars Q und $-Q$.

Fig 762.

40. **Zwei Kräftepaare in einerlei Ebene sind einem Paare gleichgeltend, dessen Moment die algebraische Summe der Momente beider ersten Paare ist, wenn man bei gleichen Richtungen der Kräfte die Momente additiv, bei entge-**

gengesetzten Richtungen aber das eine Moment subtractiv in Rechnung bringt

Es seien P und $-P$ an $AB = a$ das eine Paar, Q und $-Q$ an $CD = b$ das andere Paar; alsdann kann man nach dem vorigen Satz statt des letzten Paares ein gleichgeltendes Q' und $-Q'$, unter dem Abstand $AB = a$ anbringen, wenn $a \cdot Q' = bQ$, und das neue Paar an AB ist mit dem Paar P und $-P$ in denselben geraden Linien wirkend.

Sind diese beide Paare gleich gerichtet, so vereinigen sie sich zu einem Kräftepaare R und $-R$, wo $R = P + Q'$; sind dagegen beide Kräftepaare entgegengesetzt gerichtet, so entsteht aus ihnen ein Kräftepaar R und $-R$, wo $R = P - Q'$ also $-R = -(P - Q')$. Man hat also in beiden Fällen $R = P \pm Q'$

oder da $Q' = \frac{b}{a} Q$; $R = P \pm \frac{b}{a} Q$

oder $aR = aP \pm bQ$.

41. Sind mehrere Kräftepaare $P - P$; $P' - P'$; $P'' - P''$ ... unter den Abständen a, a', a'' .... wirkend, so vereinigen sich dieselben zu einem Kräftepaar $R - R$ unter dem Abstand b, so dafs

$$bR = aP + a'P' + a''P'' + \ldots..$$

Dann ergibt sich aus 2 Paaren $P - P$ und $P' - P'$ das Paar $R' - R'$ unter dem Abstand b, so hat man $bR' = aP + a'P'$. Das Paar $R' - R'$ vereinigt sich wieder mit dem Paar $P'' - P''$ zu einem Paar $R'' - R''$ unter demselben Abstand b und es ist

$$bR'' = bR' + a''P'' = aP + a'P' + a''P''$$

u. s. w.

42. Mehrere in einer Ebene wirkende Kräftepaare halten einander das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente $= 0$ ist.

Denn die gegebenen Kräftepaare sind nach dem vorigen Satz einem Kräftepaar gleichgeltend, dessen Moment der algebraischen Summe der Momente jener Paare gleich ist. Ist nun diese algebraische Summe $= 0$, so ist auch das Moment jenes Mittelpaars $= 0$, und da dessen Hebelsarm $= b$, so ist $R = 0$ und $-R = 0$. Oder augenfällig dargestellt: Wenn sämmtliche unter verschiedenen Abständen gegebene Kräftepaare auf den Abstand b reducirt werden, so heben sich in jedem der beiden Endpunkte die dorthin reducirten Kräfte einander auf, indem in jedem Endpunkt die nach einer Richtung hinfallenden Kräfte den ihnen gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften gleich sind.

43. Mehrere in einer Ebene ≠ gerichteten Kräfte sind mit einander im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe derselben so wie die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf irgend einen in der Ebene befindlichen Punkt, jede für sich $= 0$ ist, sofern man die nach entgegengesetzten Seiten gerichteten Kräfte und ihre auf entgegengesetzten Seiten des Momentenpunkts befindlichen Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung bringt.

Fig. 763 sind die vier Kräfte P; P_1; P_2; P_3 angenommen und der Momentenpunkt M zwischen den Kräften P_1 und P_2. Parallel diesen Kräften denke man sich in M zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte P' und $-P' = P$ und

Fig. 763.

$-P$ angebracht, so bleibt die Wirkung der gegebenen Kräfte dieselbe; man erhält aber ein Kräftepaar P und $-P'$ in A und M unter dem Abstand $AM = a$ und zugleich in M eine mit P gleiche und gleich gerichtete Kraft P'.

Auf eben dieselbe Art lassen sich die Kräfte P'; P_2; P_3 ... in gleiche und in M gleich gerichtete Kräfte P_1'; P_2'; P_3'... und in Kräftepaare $P_1 - P_1'$; $P_2 - P_2'$; $P_3 - P_3'$ unter den Abständen $BM = a_1$; $CM = a_2$; $DM = a_3$ verwandeln.

Man erhält hierdurch in dem Momentenpunkt M die gegebenen Kräfte unter den gegebenen Richtungen in einerlei graden Linie wirkend vereinigt, und aufserdem so viele Kräftepaare als gegebene Kräfte. Diese Kräftepaare lassen sich nun nach dem vorigen Satz zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen, dessen Moment dann gleich ist der algebraischen

Summe der Momente sämmtlicher construirten Paare.

Wäre nun die Mittelkraft und das zusammengesetzte Kräftepaar wirklich vorhanden, so könnte nach Satz 35 kein Gleichgewicht sein; eben so wenig kann Gleichgewicht sein, wenn die in M wirkende Mittelkraft allein $= 0$ oder das anletzt erhaltene Kräftepaar allein $= 0$ ist, weil im ersten Fall ein Kräftepaar, im zweiten Fall eine Mittelkraft existirt.

Demnach hat man als Bedingung des Gleichgewichts für parallel in einerlei Ebene gerichtete Kräfte.

1. Die Kräfte mit ungeänderten Richtungen auf einen Punkt angebracht müssen einander aufheben, d. h. die algebraische Summe der Kräfte mufs $= 0$ sein.

2. Die durch Verlegung der Kräfte auf einen Punkt entstehenden Kräftepaare müssen für sich im Gleichgewicht sein, d. h. die algebraische Summe ihrer Momente mufs $= 0$ sein.

Bringt man nun sämmtliche Kräftepaare auf den Abstand AM, so haben die Paare $P - P$ und $P_3 - P_3$ einerlei Richtung, die Paare $P_1 - P_1$ und $P_2 - P_2$ die ihnen entgegengesetzte Richtung.

Demnach ist das Moment des aus ihnen zusammengesetzten Kräftepaars

$$= aP - a_1P_1 - a_2P_2 + a_3P_3$$

Uebrigens ersieht man aus der Figur, dafs die Richtungen der Kräfte P_1 und P_2 den Richtungen der Kräfte P und P_3 entgegengesetzt sind. Eben so sind die Abstände a_2; a_1 den Abständen a und a_3 entgegengesetzt. Die Regel heifst nun, dafs man die Momente nach den Vorschriften der Buchstabenrechnung bildet, indem man die entgegengesetzt liegenden Kräfte und Abstände als subtractiv in Rechnung bringt. Verfährt man nach dieser Regel, so hat man nicht nöthig die Kräftepaare auf einen und denselben Abstand zu reduciren. Fig. 763 enthält alle Fälle, welche in Hinsicht auf Lage von Kräften vorkommen können, und der Satz ist also allgemein gültig erwiesen.

44. Beliebig in einer Ebene gerichtete Kräfte sind mit einander im Gleichgewicht 1. wenn die Kräfte auf einen Punkt mit unveränderlichen Richtungen angebracht, einander das Gleichgewicht halten und 2. wenn die algebraische Summe der Momente der in ihren ursprünglichen Richtungen befindlichen Kräfte in Beziehung auf einen beliebigen in derselben Ebene genommenen Momentenpunkt $= 0$ ist, sofern die entgegengesetzt gerichteten Kräfte bei der Momentenbildung entgegengesetzt in Rechnung gebracht werden.

Es sei M der Momentenpunkt für die Kraft P; P_1; P_2 ... unter den Abständen a; a_1; a_2 .. Zerlegt man nun nach dem vorigen Satz jede der Kräfte in eine ihr gleiche und durch den Momentenpunkt

Fig. 764.

ihr $\neq$ gerichtete Kraft und in ein Kräftepaar unter dem jeder Kraft angehörigen Abstande von M, so erhält man die den gegebenen Kräften gleiche und parallel in M wirkende Kräfte und die Kräftepaare, deren Momente $= aP$; a_1P_1; a_2P_2 .... sind.

Sollen also die Kräfte P; P_1; P_2 ... mit einander im Gleichgewicht sein, so müssen

1. nach Satz 15 die auf den Punkt M reducirten Kräfte im Gleichgewicht sein; sie dürfen nämlich keine Mittelkraft liefern;

2. mufs nach Satz 43 die algebraische Summe ihrer Momente $aP + a_1P_1 + a_2P_2 .... = 0$ sein.

45. Die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden für Kräfte, die nach beliebigen Richtungen in einer und derselben Ebene sich befinden.

Zu allgemeiner Untersuchung und Auffindung des allgemeinen Gesetzes für die Bedingung sind Fig. 765 vier Kräfte genommen, welche nach Richtungen wirken, die in den vier verschiedenen Quadranten belegen sind. Die Angriffspunkte der Kräfte P; P_1; P_2; P_3 sind mit m; m_1; m_2; m_3 bezeichnet.

MX, MY sind zwei unter sich normale Coordinatenaxen und deren Durchschnitts-

Fig. 765.

punkt M der Anfangspunkt der Coordinaten, durch welche die Lagen der Angriffspunkte mit Hülfe der von denselben auf MX gefällten Lothe $mA = y$; $m_1A_1 = y_1$ u. s. w. und der Abscissen $MA = x$; $MA_1 = x_1$ u. s. w. bestimmt werden.

Um die Lagen der Kräfte zu bestimmen, ziehe man aus jedem der Angriffspunkte Parallelen mit MX und MY und bezeichne die Winkel zwischen den Kraftrichtungen und den ersten dieser Parallelen mit α; α_1; α_2; α_3 . . und die zwischen den Kraftrichtungen und den zweiten Parallelen mit β; β_1; β_2; β_3 ....; sämmtliche Winkel bis 180° gemessen.

Zerlegt man nun jede Kraft ‡ mit den Coordinatenaxen, so erhält man ‡ mit der Axe der X die Seitenkräfte $P \cos \alpha$; $P_1 \cos \alpha_1$ u. s. w. und ‡ mit der Axe der Y die Seitenkräfte $P \cos \beta$; $P_1 \cos \beta_1$ u. s. w., und je nachdem diese Ausdrücke positiv oder negativ sind, haben diese Seitenkräfte die Richtung nach den Axen oder deren Verlängerungen.

Bringt man nun diese Seitenkräfte mit ungeänderten Richtungen auf den Punkt M, so erhält man zwei Systeme von Kräften, deren jedes nach einer der Axen oder nach deren rückwärtiger Verlängerung gerichtet ist. Nun findet aber für diese beiden Systeme nur Gleichgewicht statt, wenn es in jedem von beiden für sich statt findet; folglich ist die erste Bedingung des Gleichgewichts

I. $P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + \ldots = 0$

II. $P \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + \ldots = 0$

Um die dritte Bedingung des Gleichgewichts, nämlich die Momentengleichung zu erhalten, kann man statt der gegebenen Kräfte deren so eben gefundene Seitenkräfte nehmen, und da es gleichgültig ist, in welchem Punkt ihrer Richtung eine Kraft angreift, so kann man den Angriffspunkt jeder einzelnen Seitenkraft in demjenigen Punkt der Axe annehmen, in welchem die Richtung der Seitenkraft dieselbe schneidet.

Für die ‡ mit MX gerichteten Seitenkräfte $P \cos \alpha$; $P_1 \cos \alpha_1$ ... sind dann deren Abstände von M die Ordinaten y; y_1...; für die mit MY ‡ gerichteten $P \cos \beta$, $P_1 \cos \beta_1$... sind deren Abstände von M die Abscissen x; x_1.....

Folglich sind die Momente der ersten dieser Seitenkräfte $y P \cos \alpha + y_1 P_1 \cos \alpha_1$ u. s. w. und die der letzten Seitenkräfte $x P \cos \beta + x_1 P_1 \cos \beta_1$ u. s. w.

Sind nun α, β spitze Winkel und betrachtet man die Seite nach welcher die Seitenkraft $P \cos \alpha$ in Beziehung auf den Punkt M gerichtet ist (in der Figur die Drehung um M von links nach rechts oberhalb M oder von Y rechts nach X hin) als positiv, so ist die Richtung der Kraft $P \cos \beta$ der ersteren entgegengesetzt, also negativ; nämlich von A aus links über M oder von X links nach Y hin. Demnach ist die algebraische Summe der Momente dieser beiden Kräfte

$$= y P \cos \alpha - x P \cos \beta$$

In der Figur ist α_1 stumpf, β_1 spitz. Demnach ist die Kraft $P_1 \cos \alpha_1$ der Kraft $P \cos \alpha$ entgegengesetzt, folglich muſs das Moment $y_1 P_1 \cos \alpha_1$ subtractiv in Rechnung kommen. Dieses subtractive Vorzeichen ergibt sich aber schon von selbst für einen stumpfen Winkel; das Moment der Kraft $P_1 \cos \beta_1$ ist wie das von $P \cos \beta$ subtractiv, mithin hat man die algebraische Summe der Momente der bis jetzt betrachteten vier Kräfte

$$= y P \cos \alpha - x P \cos \beta + y_1 P_1 \cos \alpha_1 - x_1 P_1 \cos \beta_1$$

Man ersieht, daſs $P_2 \cos \alpha_2$ der Kraft $P \cos \alpha$ entgegen wirkt, aber α_2 ist stumpf und $\cos \alpha_2$ an sich negativ. $P_3 \cos \alpha_3$ wirkt wieder mit der Kraft $P \cos \alpha$ übereinstimmend, aber α_3 ist auch spitz und demnach $\cos \alpha_3$ positiv. Man hat demnach für alle Lagen der Kräfte P; P_1; P_2... die Seitenkräfte $P \cos \alpha$; $P_1 \cos \alpha_1$.... positiv zu nehmen.

Desgleichen ersieht man, daſs die Seitenkraft $P_2 \cos \beta_2$ der Kraft $P \cos \beta$ entgegen wirkt, es ist aber auch β spitz und β_2 stumpf; das Entgegengesetzte wird also durch die beiden Cosinussen zukom-

menden entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt. Dasselbe findet mit der Kraft $P_2 \cos \beta_2$ statt. Demnach hat man für alle Lagen der Kräfte P; P_1; P_2 u. s. w. die Seitenkräfte $P \cos \beta$; $P_1 \cos \beta_1$ u. s. w. subtractiv in Rechnnng zu bringen. Die allgemeine dritte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte ist demnach

$$\text{III} \quad P(y \cos \alpha - x \cos \beta) + P_1(y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1) + \ldots\ldots = 0$$

Anmerk. Bei Anfstellung der Momentengleichnngen sind sowohl die Abscissen als die Ordinaten anf einerlei Seite der Coordinatenaxen genommen. Liegt eine Ordinate auf der entgegengesetzten Seite der Axe, während die Kraft dieselbe Richtung behält, so erhält das Moment dieser Kraft das entgegengesetzte Vorzeichen, weil die Kraft die entgegengesetzte Wirknng thut, indem sie in Beziehnng anf den Momentenpnnkt die entgegengesetzte Drehnng vernrsacht.

46. Die in der Momentengleichnng III. des vorigen Satzes vorkommenden binomischen Factoren sind die Abstände der ihnen zngehörigen Kraftrichtnngen vom Momentenpnnkt M, welche in Satz 44, Fig. 764, mit a; a_1; a_2 bezeichnet sind und zngleich bestimmt der Vorzeichen

Fig. 766.

jedes der Factoren die Richtung der Kraft in Beziehung auf den Momentenpunkt.

Um dies nachzuweisen, sei Fig. 766 der Theil der Fignr 766, der sich auf die eine Kraft P bezieht, so ist

$$Am \cos \angle mAb = y \cos \alpha = Ab$$
$$AM \cos \angle MAb = x \cos \beta = Ac$$

Mithin $y \cos \alpha - x \cos \beta = Ab - Ac = bc = Md =$ dem Abstande der Kraft P von dem Momentenpnnkt M.

2. Liegt M anf der entgegengesetzten Seite der Richtung von P, z. B. in M' nnd ist $M'Y'$ die Ordinatenaxe, so bleibt $Ab = y \cos \alpha$.

Nnn ist aber $AM' = x'$

nnd $AM' \cos \angle AM'e = AM' \cos \beta = M'e$

folglich $y \cos \alpha - x' \cos \beta = Ab - M'e = - M'f$

Es hat aber die Kraft P gegen den Momentenpnnkt M' das Bestreben znr entgegengesetzten Drehnng im Vergleich gegen den Pnnkt M nnd demnach mnſs das Moment $M'e \times P$ selbst negativ in Rechnnng kommen, folglich bestimmt das snbtractive Vorzeichen des Abstandes, nach den Regeln der Bnchstabenrechnnng angewendet, das erforderliche Vorzeichen des Moments.

3. Sind beide Winkel α nnd β stnmpf (Fig. 765 bei P_2), so bleiben die Abstände der Kraft von den Punkten M oder M' dieselben, allein die Richtnng der Kraft P_2 ist der der Kraft P entgegengesetzt, folglich sind anch beide Bestrebnngen zur Drehung um diese Momentenpnnkte einander einzeln entgegengesetzt. Demnach wird für P_2 der Abstand Md negativ, der Abstand $M'e$ positiv.

Dies ergiebt sich auch aus den so eben synthetisch gefundenen Formeln (No. 2)

$$P(y \cos \alpha - x \cos \beta) \text{ nnd } - P(y \cos \alpha - x' \cos \beta)$$

Denn setzt man statt α nnd β deren Supplemente, so erhält man die entgegengesetzten Vorzeichen und man hat die Momente von P_2

$$- P_2 (y \cos \alpha - x \cos \beta) \text{ nnd } P_2 (y \cos \alpha - x' \cos \beta)$$

4. Ist α stumpf, β spitz (Fig. 765 bei P_1) so ist der Abstand der Kraft vom Momentenpnnkt M nämlich $Md = Ab + Ac$

Nnn ist $Ab = Am \cdot \cos \angle mAb = Am \cdot \cos (180^\circ - \angle mAc)$
$= y \cos (180^\circ - \alpha)$

$Ac = AM \cos \angle MAc = x \cos \beta$

Mithin $Md = y \cos (180^\circ - \alpha) + x \cos \beta$

Fig. 767.

Aber die Kraft P_1 ist in Beziehung auf den Punkt M gegen die Kraft P entgegengesetzt gerichtet, mithin mufs der Abstand MD entgegengesetzt genommen werden und es ist

$$Md = -y\cos(180^\circ - \alpha) - x\cos\beta$$
$$= y\cos\alpha - x\cos\beta$$

welcher letztere Ausdruck der allgemein gültige ist.

5. Ist M' der Momentenpunkt, so ist die Kraft P' in ihrer Wirkung gegen den Punkt M entgegengesetzt. Deren Abstand ist $M'f$.

Nun ist $M'f = M'e - Ab$,

Es ist

$$M'e = AM'\cos\angle AM'e$$
$$= AM'\cos\beta = x'\cos\beta$$

Nun ist die Abscisse $AM' = x'$ in Beziehung auf den Momentenpunkt M' gegen die Abscisse x in Beziehung auf den Punkt M entgegengesetzt gerichtet, mithin hat man x' subtractiv in Rechnung zu bringen und es ist

$$M'e = -x'\cos\beta$$

Ab bleibt $y\cos(180^\circ - \alpha) = -y\cos\alpha$

Demnach ist $M'f = -x'\cos\beta + y\cos\alpha$ und auch hier also der Abstand der Kraft von dem Momentenpunkt in der allgemein gültigen Formel ausgedrückt.

6. Ist endlich die Kraft der Kraft P_1 Fig. 767 gerade entgegengesetzt gerichtet, (Fig. 763 bei P_3) so bleiben die Abstände derselben von den Punkten M und M' dieselben, allein da die Richtung der Kraft P_3 der der Kraft P_1 entgegengesetzt ist, beide Kräfte also auch in Beziehung auf Bestrebung zur Drehung um die Momentenpunkte entgegengesetzt sind, so wird dor Abstand von P_3 der entgegengesetzte von P_1 mithin $= -(y\cos\alpha - x\cos\beta)$ und da P_3 mit P_1 entgegengesetzt ist, so hat man das Moment

$$P_3(y\cos\alpha - x\cos\beta)$$

wie in allen vorangegangenen Lagen der Kräfte.

47. Es sind Kräfte, deren Richtungen alle in einerlei Ebene liegen, ihrer Gröfse und Richtung nach und deren Angriffspunkte gegeben, es soll deren Mittelkraft nach Gröfse und Richtung bestimmt werden.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen Satz sei R die Mittelkraft, ϱ und ϱ' seien die Winkel ihrer Richtung mit den Coordinatenaxen der X und der Y, x' und y' seien die Coordinaten irgend eines Punkts ihrer Richtung. Da die gegebenen Kräfte zusammen wie ihre Mittelkraft wirken, so wird eine der Mittelkraft gleiche und ihr gerade entgegengesetzt wirkende Kraft jenen Kräften das Gleichgewicht halten. Die Richtungswinkel dieser Kraft mit den Coordinatenaxen sind dann $180^\circ - \varrho$ und $180^\circ - \varrho'$. Man hat demnach aus dem vorigen Satz die drei Bedingungen des Gleichgewichts

1. $R\cos(180^\circ - \varrho) + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$
2. $R\cos(180^\circ - \varrho') + P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$
3. $R[y'\cos(180^\circ - \varrho) - x'\cos(180^\circ - \varrho')] + P(y\cos\alpha - x\cos\beta)$ $+ P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots = 0$

Oder:

1. $-R\cos\varrho + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$
2. $-R\cos\varrho' + P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = 0$
3. $R(-y'\cos\varrho + x'\cos\varrho') + P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = 0$

Setzt man

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = X$$
$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = Y$$
$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = M$$

So hat man aus den letzten drei Gleichungen

4. $R\cos\varrho = X$
5. $R\cos\varrho' = Y$
6. $R(y'\cos\varrho - x'\cos\varrho') = M$

oder wenn man in die letzte Gleichung für $R\cos\varrho$ und $R\cos\varrho'$ die Werthe X und Y aus den beiden vorherstehenden Gleichungen 4, 5 setzt

7. $Xy' - Yx' = M$

Quadrirt man die Gleichungen 4 und 5 und addirt, so erhält man, weil $\cos^2\varrho + \cos^2\varrho' = 1$ ist

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

woraus

8. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

9. $\cos\varrho = \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

10. $\cos\varrho' = \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Die Gleichung 7 ist in Beziehung auf die Coordinaten x' und y' unbestimmt, weil sie die Lage eines beliebigen Punkts der Mittelkraftsrichtung angibt. Nimmt man für x' einen bestimmten Werth, so erhält man den zugehörigen Werth von y' für den zu x' gehörigen Punkt in der Richtung der Mittelkraft.

Die Lage der Mittelkraft ist ferner bestimmt, wenn man die Punkte kennt, in welchen sie die Coordinatenaxen schneidet.

Für den Durchschnittspunkt zwischen der Mittelkraft und der Axe der X ist $y' = 0$, folglich hat man aus Gleichung 7:

$$-Yx' = M \text{ oder } x' = -\frac{M}{Y}$$

Der Durchschnittspunkt mit der Axe der X liegt also in diesem Abstande vom Anfangspunkt der Coordinaten entweder in der Axe selbst oder in deren rückwärtigen Verlängerung, je nachdem M und Y verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.

Für den Durchschnittspunkt zwischen der Mittelkraft und der Axe der Y ist $x' = 0$, folglich ist aus Gleichung 7:

$$Xy' = M \text{ oder } y' = \frac{M}{X}$$

In diesem Abstande vom Anfangspunkt der Coordinaten liegt also der Durchschnittspunkt der Mittelkraft mit der Axe der Y oder in deren Verlängerung, je nachdem M oder X gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Die Lage der Mittelkraft aus den letzten Bestimmungen ist unabhängig von den Winkeln ϱ und ϱ'. Soll dagegen die Seite bestimmt werden, nach welcher in dieser Richtung die Mittelkraft wirkt, so sind die Winkel ϱ und ϱ', also auch die Ausdrücke für $\cos\varrho$ und $\cos\varrho'$ aus Gl. 9 und 10 erforderlich.

48. Die Bedingung, unter welcher wirklich eine Mittelkraft statt findet, ist dafs in Gleichung 7 nicht X und Y zugleich 0 sind. Sind aber X und Y beide $= 0$ und auch $M = 0$, so ist Gleichgewicht vorhanden. Ist bei $X = Y = 0$, M nicht $= 0$, so existirt ein Kräftepaar.

Um in einem speciellen Fall dies Kräftepaar zu finden hat man $X = Y = 0$ also auch $R = 0$; es existirt keine Mittelkraft. Demnach findet man aus Gleichung 1 und 2, wenn man das Positive mit dem ihm gleichen Negativen zusammen stellt; die beiden $\mp$ der Axe der X wirkenden Kräfte aus Gl. 1

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0 = Q - Q$$

Die beiden der Axe der Y $\mp$ wirkenden Kräfte aus Gleichung 2

$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0 = V - V$$

Diese beiden Kräfte zusammen gesetzt ergeben $\pm R = \pm\sqrt{Q^2 + V^2}$ als eine ganz bestimmte Gröfse.

Da nun $R = 0$ ist, so ist das erste Glied in Gleichung 3 ebenfalls $= 0$ und man erhält in der Summe der übrigen Glieder das Moment des Kräftepaars $= M$, woraus der Abstand des Kräftepaars

$$+\sqrt{Q^2 + V^2} - \sqrt{Q^2 + V^2} = \frac{M}{\sqrt{Q^2 + V^2}}$$

IV. Statik des materiellen Körpers.

49. Die Wirkung eines Kräftepaars bleibt ungeändert, wenn man dasselbe in eine Ebene verlegt, die mit der Ebene, in der es thätig ist, $\mp$ läuft und wenn beide Ebenen fest mit einander verbunden sind.

Fig. 768.

FG und HJ seien die beiden paralle-

len und fest verbundenen Ebenen. In FG wirke das Kräftepaar $P-P$ unter dem Abstand AB; in HJ sei $DE=$ und $\mp AB$. Auf den Punkt D versetze die beiden Kräfte P' und $-P'$, auf den Punkt E die Kräfte P' und $-P'$, die alle unter sich und mit P gleich sind, sämmtlich normal DE, also $\mp$ unter einander, so besteht noch die Wirkung von $P-P$ ungeändert.

Ziehe AE und BD, so halbiren sich diese beiden Linien gegenseitig in C, folglich setzen sich die beiden Kräfte P in A und P' in E zu einer Mittelkraft $P+P'$ in $C \mp$ mit P und P' zusammen. Eben so geben die beiden Kräfte $-P$ und $-P'$ eine in C mit ihnen $\mp$ gerichtete Mittelkraft $-(P+P')$. Nun sind die Mittelkräfte $P+P'$ und $-(P+P')$ gerade entgegengesetzt gerichtet, einander gleich, sie heben sich auf, und man kann sie, ohne eine Aenderung der ursprünglichen Wirkung hervorzubringen, aus dem System entfernen. Alsdann aber bleiben nur die Kräfte P' an D und $-P'$ an E übrig und folglich sind $P-P$ an DE mit $P-P$ an AB gleichgeltend.

50. Mehrere Kräftepaare, die in verschiedenen unter einander parallelen und fest verbundenen Ebenen wirken, können also zu einem Mittelpaar zusammengesetzt werden, indem man sie alle in eine Ebene und dort unter denselben Abstand verlegt, wie No. 41 dazu Anweisung gibt. Beliebig viele Kräftepaare in verschiedenen parallelen Ebenen halten einander das Gleichgewicht, wenn sie kein Mittelpaar liefern.

51. Wenn zwei Ebenen AD, AE, von welchen jede ein Kräftepaar enthält, sich schneiden, und man nimmt auf den Schenkeln BD, BE eines beliebigen Neigungswinkels der Ebenen Stücke BF, BG, die sich wie die Momente der Kräftepaare verhalten, vollendet das Parallelogramm $BFHG$ zu diesen Stücken, zieht die Diagonale BH durch die Spitze des Neigungswinkels, so ist die durch AB und BH gelegte Ebene die Ebene des Mittelpaares, und dessen Moment verhält sich zu den Momenten der Seitenpaare wie die Diagonale BH zu den Seiten BF und BG des Parallelogramms.

Es seien $P-P$ und $Q-Q$ unter den Abständen a und b die in den Ebenen AD und AE wirkenden Kräftepaare. Man verwandle das zweite Paar in ein gleichgeltendes, dessen Kräfte $P'-P'$, jede $=P$ sind, deren Abstand sei a', also $a'P'=bQ$. Nimm nun $BF=a$, $BG=a'$ und verlege

Fig. 769.

beide Kräftepaare auf BF und BG (s. Satz 38) nach den in der Figur angegebenen Richtungen, vollende das Parallelogramm $BFGH$.

Die durch die Kraftrichtung GP' und die Seite GH zu denkende Ebene ist $\mp$ der Ebene AD; man kann also das Kräftepaar $P-P$ aus FB in GH verlegen. Alsdann wirken in G zwei gleiche Kräfte $P-P$ einander gerade entgegen, heben einander auf und es verbleibt nur die Kraft P in H und die Kraft $-P'$ in B wirkend, also ein Kräftepaar $P-P$ in dem Abstand BH, welches den beiden Kräftepaaren $P-P$ in BF und $P'-P'$ in BG wirkend zusammengenommen gleichgeltend ist.

$P-P$ in BH ist also das Mittelpaar zwischen $P-P$ in dem Abstand $BF=a$ $+P-P$ in dem Abstand $BG=a'$. Es sind also

$BH \cdot P$, $BF \cdot P$ und $(BG \cdot P = bQ)$ die drei Momente, der Mittelkraft und der beiden Seitenkräfte und sie verhalten sich zu einander wie $BH : BF : BG =$

Zwei sich schneidende Ebenen haben zwei Neigungswinkel, die sich zu 180° ergänzen. Aus dem vorstehenden Satz mit Fig. 769 geht hervor, dafs die Construction innerhalb desjenigen Neigungswinkels vorgenommen werden mufs, bei welchem, wenn er mit allmählicher Verminderung auf 0 gebracht wird, so dafs BE mit BD zusammen fällt, beide Kräftepaare in Beziehung auf den ihnen ge-

meinschaftlichen Pnnkt B einerlei Richtung haben. Wäre also die in G fallende Kraft des Kräftepaars $P' - P'$ senkrecht abwärts gerichtet, $= -P'$, so würde die Construction in dem Nebenwinkel des Winkels DBE anageführt werden müssen.

52. Es lassen sich, Satz 51 aufolge, Kräftepaare eben so znsammensetzen, wie einfache Kräfte, und man erhält für die Paare dieselbe Gleichung, welche für die einfachen Kräfte gefunden worden, wofern man für die einfachen Kräfte die Momente der Paare und für die Richtungswinkel der einfachen Kräfte die Neigungswinkel der den Kräftepaaren zngehörigen Ebenen setzt.

Bezeichnet man daher $\angle FBH$ mit α, $\angle GBH$ mit β, $\angle FBG$ mit γ, die Momente der Kräfte P, Q, R mit aP, bQ, cR, so hat man

$$aP : bQ : cR = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\gamma$$

Also hat man auch

$$aP \sin\alpha = bQ \sin\beta$$

$$aP \sin\gamma = cR \sin\beta$$

$$bQ \sin\gamma = cR \sin\alpha$$

$$c^2R^2 = a^2P^2 + b^2Q^2 + 2ab\, PQ \cos\gamma$$

53. Die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften zu bestimmen, die auf ein System fest mit einander verbundener materieller Pnnkte nach beliebigen Richtnngen im Raum wirken.

1. Um die Lage der Angriffspunkte zn bestimmen, auf welche die Kräfte wirken nehme man drei unter sich normale Ebenen (Coordinatenebenen) und bestimme von jedem angegriffenen Punkt den Abstand von jeder dieser drei Ebenen, indem man zugleich die Lage der Abstände zn beiden Seiten jeder Ebene durch positive und negative Vorzeichen unterscheidet.

Um die Richtnngen der Kräfte zn bestimmen, siehe man durch ihre Angriffspunkte Parallelen zu den drei Durchschnittslinien der Coordinatenebenen (zu den Coordinatenaxen) und zwar nach den Richtungen, nach welchen die Axen von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (dem Anfangspunkt der Coordinaten) auf der positiven Seite der Coordinatenebenen hin liegen und bezeichne nun die Winkel, welche die Richtung jeder Kraft mit der durch ihren Angriffspunkt mit jeder der Parallelen macht, indem man die Winkel von 0 bis 180° zählt.

2. Es seien hiernach AX, AY, AZ die Coordinatenaxen; m, m', m'' u. s. w. die Angriffspunkte der Kräfte P; $P_,$; P_2..; die Abstände dieser Pnnkte von den drei Coordinatenebenen seien gleich mit den Axen bezeichnet, mit denen sie ⫲ laufen: Für den Pnnkt m mit x, y, z; für m' mit $x_,$; $y_,$; z, u. s. w. Die Winkel der Kräfterichtungen mit den Parallelen zur Axe X seien α; $\alpha_,$; α_2... zu der Axe $Y = \beta$; β, β_2... und zu der Axe $Z = \gamma$; $\gamma_,$; γ_2 u. s. w.

Nun zerlege man nach No. 44 jede Kraft in eine durch den Anfangspnnkt A gehende, ihr gleiche und gleichgerichtete Kraft nnd in ein Kräftepaar, indem man in A ⫲ mit P zwei ihr gleiche und entgegengesetzte Kräfte anbringt. Alsdann wird das Gleichgewicht nur bestehen, wenn es sowohl für die anf A gebrachten und den gegebenen Kräften gleich gerichteten und gleichen Kräfte als auch für das System der Kräftepaare bei jedem System für sich besteht

Denn bestände das Gleichgewicht nicht für das erste System, so würde sich aus demselben eine Mittelkraft ergeben, die für den Fall, dafs das zweite System ein

Fig. 770.

Mittelpaar ergiht nach Satz 35 mit demselben kein Gleichgewicht halten kann.

3. Um nun diese Bedingung durch die gegebenen Gröfsen auszudrücken, zerlege jede Kraft ⫲ an den Coordinatenaxen in drei Seitenkräfte. Dann sind die ⫲ mit AX gerichteten $= P\cos\alpha$; $P_, \cos\alpha_,$; $P_2 \cos\alpha_2$ u. s. w. Die ⫲ mit $AY = P\cos\beta$; $P_, \cos\beta_,$; $P_2 \cos\beta_2$ u. s. w. Die ⫲ mit $AZ = P\cos\gamma$; $P_, \cos\gamma_,$; $P_2 \cos\gamma_2$ u. s. w.

Jede dieser Seitenkräfte zerlege man wieder in eine durch A ⫲ gerichtete gleiche Kraft nnd in das zngehörige Kräftepaar, so erhält man an dem Punkt A drei Systeme von Kräften, die nach den drei Axen gerichtet sind, die im Gleich-

 Kräfte im Gleichgewicht.

gewicht sein müssen, so dafs also jedes einzelne System für sich im Gleichgewicht ist. Aus dieser Bedingung entstehen also folgende drei Gleichungen:

I. $P\cos\alpha + P_{,}\cos\alpha_{,} + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$

II. $P\cos\beta + P_{,}\cos\beta_{,} + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$

III. $P\cos\gamma + P_{,}\cos\gamma_{,} + P_2\cos\gamma_2 + \ldots = 0$

4. Ferner zerlege man jedes Kräftepaar in 2 Seitenpaare, die in den Coordinatenebenen liegen, mit welchen die Richtungen der Kräfte $\nparallel$ laufen.

Betrachtet man zuerst das senkrecht aufwärts gerichtete Kräftepaar $P\cos\gamma - P\cos\gamma$ von dem Abstande AC, der Diagonale des Rechtecks $ADCB$, so ist dies gleichgeltend zweien Kräftepaaren in den Ebenen XAZ und YAZ, deren Abstände $AB = x$ und $AD = y$ sind. Deren Momente sind (s. Satz 44) $x\,P\cos\gamma$ und $y\,P\cos\gamma$. Eben so liefern die übrigen gleich gerichteten Seitenpaare in denselben Coordinatenebenen, deren Momente $x_{,}P_{,}\cos\gamma_{,}$ und $y_{,}P_{,}\cos\gamma_{,}$; $x_2P_2\cos\gamma_2$ und $y_2P_2\cos\gamma_2$ u. s. w.

Behandelt man ebenso die Kräftepaare, die mit $AY \nparallel$ gerichtet sind, so erhält man Seitenpaare in den Ebenen YAZ und YAX; deren Momente sind $zP\cos\beta$ und $xP\cos\beta$; $z_{,}P_{,}\cos\beta_{,}$ und $x_{,}P_{,}\cos\beta_{,}$ u. s. w. Endlich liefern die mit $AX \nparallel$ gerichteten Paare die Seitenpaare in den Ebenen XAY und XAZ: deren Momente sind $yP\cos\alpha$ und $zP\cos\alpha$; $y_{,}P_{,}\cos\alpha_{,}$ und $z_{,}P_{,}\cos\alpha_{,}$ u. s. w.

Demnach erhält man aus jeder der gegebenen Kräfte in jeder Coordinatenebene zwei Paare, und nach dem Obigen müssen sämmtliche in einer Ebene befindlichen Paare für sich im Gleichgewicht, d. h. die algebraische Summe ihrer Momente $= 0$ sein.

5. Um nun die Momente der aus einer Kraft P für jede Ebene hervorgehenden beiden Seitenpaare mit den erforderlichen Vorzeichen in die Formel zu bringen betrachte Folgendes:

Man geht wie früher von spitzen Winkeln aus, deren Cosinus positiv sind und betrachtet die Drehung um den Momentenpunkt (A) nach einer bestimmten Seite hin als positiv. Nun sind α, γ beide spitz, man hat also zunächst die aus P für die Ebene XAZ hervorgehenden Kräftepaare zu betrachten, von denen die negative Kraft jedesmal in dem Anfangspunkt A der Coordinaten wirkt.

Das mit dem Abstand z in den Punkten m und C horizontal wirkende Kräftepaar $P\cos\alpha$ wird von m und C auf G und B und von dort auf F und A reducirt; $P\cos\alpha$ hat die Richtung FG und ihr Moment ist $z\,P\cos\alpha$.

Das mit dem Abstand x in den Punkten m und E vertikal wirkende Kräftepaar $P\cos\gamma$ wird von m und E auf G und F und von dort auf B und A reducirt; $P\cos\gamma$ hat die Richtung BG und ihr Moment ist $xP\cos\gamma$. Die Richtungen FG und BG sind aber in Bezug auf Drehung um den Punkt A einander entgegengesetzt, mithin kommt hier die Differenz beider Momente in Rechnung, und da $\cos\alpha$ und $\cos\gamma$ beide positiv sind, so hat man die Wirkung der Momente beider aus der Kraft P auf die Ebene ZAX entstandenen Kräftepaare $zP\cos\alpha - xP\cos\gamma$.

Diese Differenz findet also für jede zwei in einerlei Ebene fallende aus einer gegebenen Kraft hervorgebrachte Seitenkräftepaare statt, wenn die Richtungswinkel der Kraft mit den zu dieser Ebene gehörenden Coordinatenaxen beide spitz sind.

6. Es soll dieselbe Untersuchung für den Fall statt finden, dafs ein Winkel spitz, der andere stumpf ist; also für α und β oder für γ und β. Für den ersten Fall hat man die in die Ebene XAY fallenden Kräftepaare:

Das eine Seitenpaar $P\cos\alpha$ wirkt in den Punkten m und G, wird reducirt auf C und B und von hier auf D und A. Die positive Kraft $P\cos\alpha$ hat also die Richtung DC mit dem Abstande $AD = y$.

Das andere Seitenpaar $P\cos\beta$ wirkt in den Punkten m und E, wird reducirt auf C und D und von hier auf B und A; die positive Kraft $P\cos\beta$ wirkt also nach der Richtung CB mit dem Abstand $AB = x$.

Die Richtungen DC und CB sind in Beziehung auf den Punkt A übereinstimmend, folglich hat man die in Rechnung zu bringenden Momente $yP\cos\alpha + xP\cos\beta$.

Nun ist aber β stumpf, der Cosinus von β also und mit ihm der letzte Summand an sich negativ. Setzt man daher für $\cos\beta$ seinen negativen Werth, so hat man $xP\cos\beta = -xP\cos(180^\circ - \beta)$ also das Moment $yP\cos\alpha - xP\cos(180^\circ - \beta)$. Es ist dies aber unrichtig, weil der Figur nach der zweite Summand eine additive Gröfse sein mufs; demnach hat man statt der obigen Momentensumme zu schreiben

$$yP\cos\alpha - xP\cos\beta.$$

7. Der Fall, dafs beide Winkel stumpf sind, ist in Figur 770 nicht vorhanden. Denkt man sich aber, dafs in dem Fall 6 der $\angle\alpha$ stumpf $= 180^\circ - \alpha$ wäre, so hätte

man den $\angle CmP$ in derselben Gröfse links von Cm mit derselben Spitze m; von dem Seitenpaar $P\cos\alpha$, welches in den Punkten m und G wirkt und auf D und A reducirt wird, hat dann die positive Kraft die Richtung CD mit demselben Abstand $AD = y$ und die Richtungen CD und CB sind einander entgegengesetzt. Da nun die Richtung CB die positive ist, so hat man die in Rechnung zu bringenden Momente $xP\cos\beta - yP\cos\alpha$ unter der Voraussetzung, dafs beide Glieder an und für sich positiv sind. Es sind aber $\cos\beta$ und $\cos\alpha$ beide negativ, folglich mufs, damit das erste Glied additiv, das zweite subtractiv bleibt geschrieben werden $-xP\cos\beta + yP\cos\alpha$. Folglich erhält man auch für diesen Fall die allgemein geltende Form

$$yP\cos\alpha - xP\cos\beta$$

Man hat also die letzten drei Bedingungsgleichungen, wenn man der Ordnung der Buchstaben wegen die erste Gleichung negativ nimmt

IV. Für die Ebene XAZ

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P_1(x_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\alpha_1) + \ldots = 0$$

V. Für die Ebene XAY

$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots = 0$$

VI. Für die Ebene YAZ

$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + P_1(z_1\cos\beta_1 - y_1\cos\gamma_1) + \ldots = 0$$

54. Im Fall die Kräfte der vorigen Aufgabe die Bedingung des Gleichgewichts nicht erfüllen, die Bedingungen anzugeben, unter welchen sie eine Mittelkraft geben und wenn diese erfüllt sind, die Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu bestimmen.

Eine Mittelkraft der gegebenen Kräfte mufs nach entgegengesetzter Richtung angebracht das Gleichgewicht herstellen. Diese Bedingung drückt man durch Gleichungen aus, wenn man die 6 Bedingungsgleichungen des vorigen Satzes dazu benutzt.

Setzt man die Mittelkraft $= R$, die Coordinaten eines beliebigen Punkts ihrer Richtung auf die Axen mit denselben gleichnamig x', y', z', die Winkel ihrer Richtung mit denselben Axen α', β', γ' und man bringt nun dieses R gerade entgegengesetzt gerichtet an, so sind die Richtungswinkel $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$, $180° - \gamma'$ und daher hat man statt der ersten 3 Bedingungsgleichungen des vorigen Satzes

$$R\cos(180° - \alpha') + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$$

oder

1. $-R\cos\alpha' + P\cos\alpha + \ldots = 0$

Ebenso

2. $-R\cos\beta' + P\cos\beta + \ldots = 0$
3. $-R\cos\gamma' + P\cos\gamma + \ldots = 0$

Für die Momente

4. $-R(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + \ldots = 0$
5. $-R(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = 0$
6. $-R(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \ldots = 0$

Setzt man der Abkürzung wegen die Werthe der 6 Gleichungen des vorigen Satzes nach einander A; A_1; $A_2 \cdot M$; M_1; M_2 so hat man

7. $R\cos\alpha' = A$
8. $R\cos\beta' = A_1$
9. $R\cos\gamma' = A_2$
10. $M - A_2x' + Az' = 0$
11. $M_1 - Ay' + A_1x' = 0$
12. $M_2 - A_1z' + A_2y' = 0$

Bestehen nun diese Gleichungen unter der obigen Bedingung, dafs A; A_1; A_2 nicht einzeln $= 0$ sind, so gibt es eine Mittelkraft. Den Gleichungen 7 bis 9 geschieht immer Genüge, denn quadrirt und addirt man sie, so hat man

$$R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A^2 + A_1^2 + A_2^2$$

Es ist aber nach dem Art. Körpertrigonometrie No. 17 die Klammergröfse $= 1$; deshalb ist

$$R^2 = A^2 + A_1^2 + A_2^2$$

Ist hieraus R bestimmt, dann hat man

aus Gleichung 7 bis 9

$$\cos\alpha' = \frac{A}{R};\quad \cos\beta' = \frac{A_1}{R};\quad \cos\gamma' = \frac{A_2}{R}$$

Multiplicirt man Gl. 10 mit A, Gl. 11 mit A_2 und addirt beide, so entsteht

$$A_1M + A_2M_1 - AA_2y' + AA_1z' = 0$$

Multiplicirt man Gleichung 12 mit A_1 so erhält man

$$AM_2 - AA_1z' + AA_2y' = 0$$

Beide addirt entsteht

$$AM_2 + A_1M + A_2M_1 = 0 \qquad (13)$$

Die Abstände x', y', z' fallen hier ganz fort, sind also unbestimmte Längen, wie es nicht anders sein kann, weil sie zu einem beliebigen Punkt der Mittelkraftsrichtung die Coordinaten sind.

Zur Bestimmung der Abstände genügen also 2 Gleichungen, indem die dritte, aus den ersten beiden hergeleitet, die letzte auf Null reducirte Gl. 13 ergibt, welche keinen Abstand enthält. Geht man nun auf Gl. 10 und 11 zurück, so kann man x' beliebig wählen und man erhält dann bestimmte Werthe für y' und z'.

55. Auf ein System fest verbundener materieller Punkte wirken nach parallelen Richtungen Kräfte, die Bedingungen ihres Gleichgewichts anzugeben.

Nimmt man wieder drei unter sich normale Coordinatenebenen, behält die Bezeichnung des vorigen Satzes bei, so sind die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit jeder der drei Axen für sich genommen machen, einander gleich oder ergänzen sich zu zwei Rechten. Es ist also

α entweder $= \alpha$, oder $= 180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2$ oder $= 180^\circ - \alpha_2$ u. s. w.
β entweder $= \beta$, oder $= 180^\circ - \beta$, u. s. w.
γ entweder $= \gamma$, oder $= 180^\circ - \gamma$, u. s. w.

Aus den ersten drei Bedingungen des Gleichgewichts No. 53 (Gl. I., II., III.) erhält man demnach

1. $(P + P_1 + P_2 + \ldots) \cos\alpha = 0$
2. $(P + P_1 + P_2 + \ldots) \cos\beta = 0$
3. $(P + P_1 + P_2 + \ldots) \cos\gamma = 0$

Diese drei Gleichungen bestehen nur, wenn

$$P + P_1 + P_2 + \ldots\ldots = 0$$

Denn da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist, so können die 3 Cosinus nicht zugleich $= 0$ sein. Daher reduciren sich die 3 Bedingungsgleichungen auf die eine:

I. $P + P_1 + P_2 + \ldots = 0$

D. h. die algebraische Summe der Kräfte mufs $= 0$ sein.

Die drei Momentengleichungen IV, V, VI, No. 53 verändern sich hier in

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P_1(x_1\cos\gamma - z_1\cos\alpha) + \ldots = 0$$
$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha - x_1\cos\beta) + \ldots = 0$$
$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + P_1(z_1\cos\beta - y_1\cos\gamma) + \ldots = 0$$

In diesen Gleichungen erhält die entgegengesetzt gerichtete Kraft das Minus-Vorzeichen.

Man kann die letzten drei Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$(Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots)\cos\gamma - (Pz + P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots)\cos\alpha = 0$$
$$(Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots)\cos\alpha - (Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots)\cos\beta = 0$$
$$(Pz + P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots)\cos\beta - (Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots)\cos\gamma = 0$$

Es ist leicht zu ersehen, dafs jede dieser drei Gleichungen eine Folgerung der beiden anderen ist. Denn multiplicirt man z. B. die erste Gleichung mit $\cos\beta$, die zweite Gleichung mit $\cos\gamma$, addirt und dividirt mit $\cos\alpha$ so erhält man

$$-(Pz + P_1z_1 + \ldots)\cos\beta + (Py + P_1y_1 + \ldots)\cos\gamma = 0$$

also die dritte Gleichung.

Man hat demnach für die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte im Raum nur drei Gleichungen: eine Kräftegleichung und zwei Momentengleichungen. Um diese kurz ausdrücken zu können, nenne man das Product einer Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts

von einer Ebene das Moment dieser Kraft in Beziehung auf diese Ebene, welche dann die **Momentenebene** ist. Hiernach lassen sich die beiden Momentengleichungen so bestimmen, dafs man die beiden Momentenebenen ⫲ den Kräften und rechtwinklig unter einander nimmt. Betrachtet man dieselben als Coordinatenebenen, so dafs die dritte Ebene von den Kräften normal getroffen wird, so hat man, wenn letztere die Ebene XAY, Fig. 768 ist, den $\angle\gamma = 0$, die $\angle\alpha = \beta = 90^\circ$ und die Abstände von den Momentenebenen sind $y; y_1; y_2 \ldots$ und $x; x_1; x_2 \ldots$ Demnach reduciren sich die letzten Momentengleichungen, von welchen die mittelste als $0 = 0$ fortfällt, auf folgende

II. $Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots = 0$

III. $Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots = 0$

Es besteht mithin Gleichgewicht zwischen parallelen im Raum wirkenden Kräften, wenn ihre algebraische Summe $= 0$ und die Summen ihrer Momente auf zwei unter sich normale mit den Kräften parallel laufende Ebenen ebenfalls $= 0$ sind.

56. Die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen parallele Kräfte eine Mittelkraft haben und diese Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu bestimmen.

Nach dem vorigen Satz sind parallele Kräfte im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Kräfte gleich 0 ist. Demnach entsteht die Bedingung für das Vorhandensein einer Mittelkraft aus Gleichung I des vorigen Satzes

$$P + P_1 + P_2 + \ldots \lesseqgtr 0$$

Ist R die Mittelkraft, so ist

$$R = P + P_1 + P_2 + \ldots$$

deren Lage ist ⫲ den gegebenen Kräften.

Eine weitere Bedingung ist nicht erforderlich; denn existirt eine Kraft R, so hat sie auch in Bezug auf einen gegebenen materiellen Punkt ein Moment; und hat sie kein Moment, d. h. ist ihr Moment $= 0$, so fällt R in den Momentenpunkt.

Nimmt man mit dem vorigen Satz zwei unter sich und mit den Kräfterichtungen normale Axen, bezeichnet die Abstände der Mittelkraft R von der Axe der Y mit x', von der Axe der X mit y', so ist $y'R = 0$, wenn R unter dem Abstand x' von A in AX fällt; ist $x'R = 0$, so fällt R in die Axe AY unter dem Abstande y' von A. Ist $x'R = y'R = 0$, so fällt R in den Anfangspunkt A beider Axen.

Um die Lage der Mittelkraft gegen den Momentenpunkt A mit Hülfe der gegebenen Axen AX, AY zu finden hat man

$$Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots = Rx'$$
$$Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots = Ry'$$

woraus

$$x' = \frac{Px + P_1x_1 + \ldots}{R} = \frac{Px + P_1x_1 + \ldots}{P + P_1 + \ldots}$$

$$y' = \frac{Py + P_1y_1 + \ldots}{R} = \frac{Py + P_1y_1 + \ldots}{P + P_1 + \ldots}$$

57. Ein System fest verbundener Punkte, auf welches Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raum wirken, begreift einen **unverrückbaren** Punkt um den sich dasselbe nach allen Seiten hin frei drehen kann. Die Bedingungen des Gleichgewichts anzugeben.

Das Gleichgewicht gegen Drehung kann nur dann statt finden, wenn aus dem Systeme eine Mittelkraft hervorgeht, deren Richtung durch den unverrückbaren Punkt A liegt, und der seiner Unverrückbarkeit wegen mit dem System durch die Mittelkraft nicht fortbewegt werden kann. Wenn man nun jede einzelne Kraft in eine ihr gleichgerichtete und gleiche auf den Punkt A wirkende Kraft und in ein Kräftepaar zerlegt (Satz 44), so müssen ferner sämmtliche Kräftepaare unter einander im Gleichgewicht sein, weil sonst aus ihrer Zusammensetzung ein Mittelpaar entstände, welches das System um A innerhalb der Richtung seiner Ebene herumdrehen würde.

Mithin sind die Bedingungen des Gleichgewichts dieselben der Kräftepaare, und die Kräfte wirken im Fall des Gleichgewichts auf den Punkt A, als wenn sie mit ungeänderten Richtungen unmittelbar darauf angebracht wären. Nimmt man daher drei unter sich normale Richtungsaxen, die sich in A schneiden und bestimmt in Beziehung auf diese sowohl die Lage der Angriffspunkte der Kräfte als auch die Richtungen derselben wie No. 53, so geben die dortigen drei Momentengleichungen die genügenden und nothwendigen Bedingungen des Gleichgewichts für den hier vorliegenden Fall.

58. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems fest verbundener materieller Punkte zu bestimmen, wenn zwei Punkte des Systems längs der durch sie hindurch gehenden geraden Linie verrückbar sind und die übrigen Punkte um diese Gerade sich frei drehen können.

Man nehme die gedachte Gerade, die **Drehaxe** des Systems zur Richtungsaxe der Z (die AZ Fig. 770) und in irgend einem Punkt A derselben normal darauf und unter sich normal die Axen

der X und der Y. Zerlegt man nun die Kräfte wie No. 53 in Beziehung auf Fig. 770, so erhält man die zerlegten Kräfte mit ungeänderten Richtungen nach den drei Axen mit A als Angriffspunkt und für jede gegebene Kraft in jeder Coordinatenebene ein Kräftepaar.

Kräfte, die auf die Axe der Z normal wirken, haben keinen Einfluſs auf die Gleitung der Axe, sie haben also keinen Einfluſs auf die Wirkung der übrigen Kräfte und auf die Bedingungen des Gleichgewichts des Systems. Es sind dies die Kräftesysteme

$$P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + \ldots$$
$$P \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + \ldots$$

Erstere in der Axe AX, letztere in der Axe AY wirkend.

Die nach der Axe der Z gerichteten Kräfte aber müssen im Gleichgewicht sein, weil eine aus ihnen hervorgehende Mittelkraft die Axe AZ nach ihrer Richtung verschieben würde. Demnach ist die erste Bedingung des Gleichgewichts

$$\text{I.} \quad -P \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \ldots = 0$$

Die Kräftepaare in den Ebenen XAZ und YAZ haben keinen Einfluſs auf die Drehung der Axe AZ und da sie normal auf der Axe stehen, auch keine Wirkung auf Verschiebung der Axe AZ. Diese Paare haben also auch keinerlei Einfluſs auf die Wirkung der übrigen Kräftepaare. Das einzige System der Kräftepaare, welches auf Drehung um die Axe AZ wirken kann, ist das der in der Ebene XAY befindlichen Paare. Deren Momente sind $P(y \cos \alpha - x \cos \beta)$ und man hat noch eine zweite Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\text{II.} \quad P(y \cos \alpha - x \cos \beta) + P_1(y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1) + \ldots = 0$$

59. Kann ein System von Kräften um eine Axe sich bloſs drehen ohne längs derselben gleiten zu können, so fällt die erste Bedingungsgleichung fort und es bleibt bloſs die zweite Gleichung, die Momentengleichung als Bedingung übrig.

60. Ein Körper, auf welchen Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raum wirken, wird von einer festen unverrückbaren Ebene, die von dem Körper in einem oder in mehreren Punkten berührt wird, im Gleichgewicht erhalten; die Bedingungen dieses Gleichgewichts aufzustellen.

Wird ein Körper durch eine Kraft gegen eine unverrückbare Ebene gedrückt und die Bewegung des Körpers durch die Ebene verhindert, so muſs die Kraft gegen die Ebene normal gerichtet sein, weil sie sich sonst in zwei Kräfte zerlegen läſst, von welchen die eine Kraft der Ebene normal, die andere mit ihr $\neq$ gerichtet ist. Die erste Seitenkraft bringt keine Bewegung hervor, die zweite dagegen wird durch nichts aufgehoben, sofern der Körper längs der Ebene ohne Hinderniſs gleiten kann und die Bewegung wird längs der Ebene wirklich erfolgen. Die Aufhebung einer Kraft durch eine feste Ebene ist aber dieselbe Wirkung mit einer der Kraft gerade entgegengesetzt wirkenden gleichen Kraft, folglich läſst sich der Widerstand der Ebene immer als eine solche Kraft betrachten und demgemäſs die Bedingungen für's Gleichgewicht aufsuchen.

1. Berührt nun der Körper die feste Ebene nur in einem Punkt, so nehme man diesen Punkt (A Fig 770) zum Anfangspunkt der Coordinaten und die Axen der X und Y in dieser Ebene, so ist die Axe der Z auf dieser Ebene normal und zugleich die Richtung des Widerstandes W. Denkt man sich also statt der Ebene eine Kraft W nach der Richtung der Axe AZ auf den Körper wirkend, so besteht das Gleichgewicht auch ohne Einwirkung der Ebene und folglich nach den Bedingungen, die Satz 53 und 54 aufgestellt sind. Man hat also nach dortiger Bezeichnung, sofern man noch die Kraft W einführt, die weil sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt ist, kein Kräftepaar liefert; $W + R \cos \gamma' = W + A_3 = 0$.

Ferner sind für diesen speciellen Fall $R \cos \alpha' = R \cos \beta' = 0$ und alle Momente $= 0$; d. h. die gegebenen Kräfte dürfen nur eine einzige Mittelkraft liefern, welche durch den Berührungspunkt des Körpers mit der Ebene geht und auf dieser senkrecht steht.

2. Berührt der Körper die Ebene in zwei Punkten, so nehme man den einen dieser Punkte zum Anfangspunkt A der Coordinaten, die Axe der X so, daſs sie durch den zweiten Punkt geht und die Axe der Z normal auf der Ebene. Die

Druckwirkungen der beiden Berührungspunkte gegen die Ebene, welche dem Obigen nach normal auf dieselbe erfolgen, seien auf den Anfangspunkt $A = w$, auf den zweiten Punkt $B = w'$. Bringt man den Pressungen gerade entgegengesetzt zwei ihnen gleiche Kräfte an, so besteht wieder das Gleichgewicht auch ohne die feste Ebene, und folglich müssen diese beiden Kräfte und die gegebenen den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. Da nun w in der Axe AZ und w' mit ihr ǂ in den Abstand $AB = a$ gerichtet ist, so sind diese Bedingungen $R \cos \alpha' = 0$; $R \cos \beta' = 0$; $R \cos \gamma' + w + w' = 0$; ferner die drei Momente in den 3 Coordinatenebenen $= 0$.

Die Kraft w in der Axe AZ hat kein Moment, mithin hat man die Momentengleichung für die Ebene XAZ

$$x' \cdot R \cos \gamma' + a \cdot w' = 0$$

Nun ist $R = -(w + w')$

folglich $x' = \dfrac{aw'}{R \cos \gamma'}$.

Ferner ist das Momant der auf die Coordinatenebene YAZ reducirte Seitenkraft der Mittelkraft $= y' R \cos \beta' = 0$ weil nach dem Obigen $R \cos \beta' = 0$ sein mufs, mithin ist $y = 0$ und die Mittelkraft liegt in der Ebene XAZ und läuft mit der Axe AZ unter dem Abstand x' parallel.

3. Berührt endlich der Körper die Ebene in drei oder mehreren Punkten, welche daranf die normalen Pressungen w, w', w'' ... ausüben, so wird das Gleichgewicht eines freien Körpers entstehen, wenn man auf denselben diesen Pressungen gerade entgegengesetzt wirkende Kräfte anbringt. Man nehme den Punkt für die Kraft w zum Anfangspunkt A der Coordinaten und die Axe der X so, dafs sie durch einen der übrigen Punkte (z. B. w') geht, während alle übrigen Punkte auf einer und derselben Seite dieser Linie liegen. Der Abstand des Punkts für w' von A sei a'. Nimmt man nun die Axe der Z auf der Ebene normal, so fällt die Axe der Y in die Ebene und es seien die Coordinaten der übrigen Berührungspunkte des Körpers mit der Ebene für die Kraft w'', w''' ... nach der Axe der $X = o''$, a''' ..., nach der Axe der $Y = b''$, b''' ... dann sind die Bedingungen des Gleichgewichts, weil die Kräfte w, w', w'' ... mit der Axe der Z ǂ laufen:

$$P \cos \alpha + P_{,} \cos \alpha_{,} + \ldots = 0$$

$$P \cos \beta + P_{,} \cos \beta_{,} + \ldots = 0$$

$$P \cos \gamma + P_{,} \cos \gamma_{,} + \ldots - (w + w' + w'' + \ldots) = 0$$

oder

$$R \cos \gamma' - (w + w' + w'' + \ldots) = 0$$

Ferner sind die drei Momentensysteme, deren Abstände in den Axen AX, AY, AZ liegen, einzeln $= 0$.

Nämlich 1. das System in der Coordinatenebene XAZ nach Gleichung 10, No. 54:

$$- x' R \cos \gamma' + z' R \cos \alpha' + M = 0$$

2. In der Coordinatenebene YAZ nach Gleichung 12, No. 54:

$$- z' R \cos \beta' + y' R \cos \gamma' + M_2 = 0$$

Die dritte Momentengleichung in der Ebene XAY ist an sich $= 0$, weil $R \cos \alpha' = R \cos \beta' = 0$ ist. Aus diesem Grunde vereinfachen sich auch die beiden ersten Momentengleichungen in folgende:

$$- x' R \cos \gamma' + M = 0$$

$$y' R \cos \gamma' + M_2 = 0$$

Hieraus ist

$$x' = \frac{M}{R \cos \gamma'}, \text{ und } y' = - \frac{M_2}{R \cos \gamma'}$$

Nun ist nach Obigem, der dritten auf Null reducirten Gleichung:

$$R \cos \gamma' = w + w' + w'' + \ldots$$

$M =$ der Momentensumme der in der Ebene XAZ wirkenden Kräftepaare $= a'w' + a''w'' + a'''w''' + \ldots$

$M_2 =$ der Momentensumme der in der Ebena YAZ wirkenden Kräftepaare $= b''w'' + b'''w''' + \ldots$

folglich

$$x' = \frac{a'w' + a''w'' + a'''w'''}{w + w' + w'' + \ldots}$$

$$y' = - \frac{b''w'' + b'''w''' + \ldots}{w + w' + w'' + \ldots}$$

Dieses Minuszeichen kann nicht auffallen, wenn man Gleichung IV. und VI. (die Werthe von M und M_2) mit einander vergleicht; es ergibt sich nämlich, dafs beide der Form nach einander entgegengesetzt sind.

4. Aus der vorstehenden Untersuchung ergibt sich, dafs nur drei Bedingungsgleichungen für's Gleichgewicht aufgestellt werden können; daher können auch nur drei Pressungen bestimmt werden.

Berührt der Körper die Ebene in mehr als drei Punkten, so sind die Druckwirkungen w, w', w'', w''' ... nicht zu bestimmen. Ueberdies dürfen die drei Berührungspunkte auch nicht in einer und derselben geraden Linie liegen, denn alsdann würden b, b', b'' ... einzeln $= 0$; es blieben zur Bestimmung der Druckwirkungen nur zwei Gleichungen übrig und

es wären nur 2 Kräfte w und w' zu finden möglich. In diesem allgemeinen Fall ist nur die Summe der senkrecht abwärts wirkenden Kräfte zu bestimmen und sie ist $= R \cos \gamma'$.

Krebs (♋) (s. „Absteigendes Zeichen" mit Fig. 19) ist das vierte Himmelszeichen der nördlichen Halbkugel. Es erstreckt sich, wie jedes Zeichen auf 30 Grad Länge und zwar vom Ende des Zeichens der Zwillinge im Sommerwendepunkt bis zum Anfang des Löwen.

Kreis. Der Kreis ist Kreislinie und Kreisfläche. Eine Kreislinie ist eine in einer Ebene liegende, in sich geschlossene Linie, deren jeder einzelne Punkt von einem innerhalb der Linie in derselben Ebene liegenden Punkt gleich weit entfernt ist.

Eine Kreislinie entsteht durch den beschreibenden Endpunkt einer geraden Linie, wenn diese um ihren zweiten festen Endpunkt innerhalb einer Ebene herumgedreht wird.

Der feste Endpunkt heifst der Mittelpunkt, das Centrum des Kreises, die beschreibende Linie der Halbmesser, der Radius des Kreises.

Die Kreisfläche oder Kreisebene ist der von der Kreislinie eingeschlossene ebene Raum.

Nennt man Kreis die Kreisfläche, so heifst die Kreislinie auch Kreisumfang, Peripherie.

In Fig. 771 ist *ABDE* eine Kreislinie, *C* ihr Mittelpunkt, *AC*, *BC*, *EC* sind

Fig. 771.

Halbmesser. Die Linie *BE*, welche aus zwei Halbmessern besteht ist ein Durchmesser des Kreises. Ein Durchmesser oder Diameter eines Kreises ist die Verbindungslinie zweier Peripheriepunkte, wenn sie zugleich durch den Mittelpunkt geht. Geht die gerade Verbindungslinie zweier Peripheriepunkte nicht durch den Mittelpunkt wie *BD*, so heifst sie Sehne oder Chorde. Jeder Theil einer Kreislinie wie *AB*, *ABD*, *BD* heifst Bogen, Kreisbogen. Jeder Theil einer Kreisebene, der von einer Sehne und einem Kreisbogen eingeschlossen wird, wie *BDF*, *BDAE*, heifst Kreisabschnitt oder Segment. Jede Sehne theilt die Kreislinie in zwei Bogen und die Kreisebene in zwei Abschnitte; der Durchmesser theilt den Kreis in zwei Abschnitte (Halbkreise) mit zwei Bogen (Halbkreisbogen). Der Theil der Kreislinie, welcher von zwei Halbmessern und dem zwischen liegenden Bogen eingeschlossen wird, wie *ACB*, heifst Kreisausschnitt, Sector. Jede zwei Halbmesser theilen den Kreis in zwei Kreisausschnitte; liegen die beiden Halbmesser in einerlei geraden Linie, machen sie einen Durchmesser aus, dann werden die Ausschnitte zu zwei gleichen Abschnitten, zu Halbkreisen. Der Winkel, der von zwei Radien gebildet wird, wie *ACB* heifst Winkel am Mittelpunkt, Mittelpunktswinkel, Centriwinkel; der Winkel, den zwei Sehnen bilden, wie $\angle ADB$ heifst Umfangswinkel, Peripheriewinkel.

Euklid, Buch III. hat noch

Erkl. 7. Der Winkel des Abschnitts ist der von der Grundlinie (der Sehne) und dem Umkreise eingeschlossene, wie $\angle BDKF$, $\angle DBMF$. (Es sind dies gemischtlinige einander gleiche Winkel)

Erkl. 8. Der Winkel im Abschnitt ist derjenige, welchen die geraden Linien (Sehnen) einschliefsen, die von irgend einem Punkt auf dem Umkreise des Abschnitts nach den Endpunkten der Grundlinie gezogen sind (Peripheriewinkel *BFD* im Abschnitt *DBF*).

Erkl. 9. Wenn die den Winkel einschliefsenden geraden Linien ein Stück des Umkreises (einen Bogen) abschneiden, so sagt man, der Winkel stehe auf dem Bogen ($\angle BFD$ steht auf dem Bogen *BAED*).

Erkl. 11. Aehnliche Kreisabschnitte sind, welche gleiche Winkel fassen oder in denen die Winkel beiderseits gleich sind.

Ueber die Aehnlichkeit der Kreise und deren Theile kann man folgende Erklärungen aufstellen:

Alle Kreise sind einander ähnlich.

Kreisbogen, die zu verschiedenen

Kreisen gehören sind ähnlich, wenn sie gleiche aliquote Theile der ihnen zugehörigen Kreislinien sind; d. h. also wenn sie gleichen Centriwinkeln angehören.

Kreisabschnitte sind ähnlich, wenn sie von ähnlichen Bogen begrenzt werden.

3. Das vierte Buch des Euklid, welches 16 Constructions-Aufgaben in Beziehung auf den Kreis begreift, beginnt mit sieben Erklärungen, von denen die letzten fünf den Kreis betreffen. Nämlich:

Erkl. 3. Eine geradlinige Figur heifst **in** einen Kreis beschrieben, wenn jeder Winkel (sollte heifsen: Ecke oder Winkelspitze) der eingeschriebenen Figur des Kreises Umring trifft.

Erkl. 4. Eine geradlinige Figur heifst **um** einen Kreis beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen Figur des Kreises Umring berührt.

Erkl. 5. Ein Kreis heifst gleichermafsen **in** eine geradlinige Figur beschrieben, wenn des Kreises Umring jede Seite der Figur, in welche er beschrieben, berührt.

Erkl. 6. Ein Kreis heifst **um** eine geradlinige Figur beschrieben, wenn des Kreises Umring jeden Winkel (soll heifsen: Winkelspitze) der Figur, um welche er beschrieben ist, trifft.

Erkl. 7. Eine gerade Linie heifst **in** einen Kreis eingetragen, wenn ihre Endpunkte in des Kreises Umringe sind.

Die siebente Erklärung hätte, da sie den einfachsten Gegenstand begreift, die erste der vorstehenden Erklärung sein sollen.

Für die übrigen Erklärungen gehörten wohl folgende Vorerklärungen:

In jedem Kreisumfang können beliebig viele Punkte gewählt werden; wenn man jede zwei nebeneinander liegende dieser Punkte durch eine gerade Linie verbindet, so entsteht eine geradlinige drei- oder mehrseitige Figur innerhalb des Kreises, deren Ecken in dem Umkreis liegen. Man sagt von solcher Figur, sie liege in dem Kreise, oder der Kreis liege um die Figur.

Wenn man durch die gewählten Punkte an den Kreis Berührungslinien zieht und diese verlängert bis sie sich schneiden, so entsteht eine drei- oder mehrseitige Figur aufserhalb des Kreises, deren Seiten sämmtlich Tangenten sind. Man sagt von solcher Figur, sie liege um den Kreis, oder der Kreis liege in der Figur.

Ferner ist noch zu erklären:

Zwei Kreise in einer Ebene von demselben Mittelpunkt heifsen concentrische Kreise; zwei Kreise von verschiedenen Mittelpunkten excentrische Kreise. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise heifst die Centrale.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich einem rechten Winkel (= 90°) sind, heifsen Quadranten; die Sehnen bilden ein Quadrat.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich ⅔ eines rechten Winkels (= 60°) sind, heifsen Sextanten; die Sehnen bilden ein regelmäfsiges Sechseck.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich einem halben rechten Winkel (= 45°) sind, heifsen Octanten; die Sehnen bilden ein regelmäfsiges Achteck.

4. Eine merkwürdige Eigenschaft des Kreises ist noch im Voraus zu erwähnen, nämlich die mit der geraden Linie gemeinschaftliche Eigenschaft, dafs die gleichen an einander liegenden Theile einerlei Lage neben einander haben; wiewohl die gerade Linie diese Eigenschaft in noch allgemeinerem Sinne hat, nämlich dafs auch die von einander entfernten, abgesonderten Theile einerlei Lage mit einander haben.

Man kann demgemäfs auch sagen, eine gerade Linie und eine Kreislinie sind durch das kleinste Stück ihrer Länge vollkommen bestimmt oder gegeben.

Die gemeinschaftliche Eigenschaft von gerader Linie und Kreis, dafs gleiche gerade Linien und gleiche Kreise auch congruent sind, kommt auch den regelmäfsigen Figuren und Körpern zu.

5. Die wichtigsten Sätze aus den Elementen der Lehre vom Kreise hat Euklid in seinem Buch III. zusammengestellt, welche unter Zufügung seiner Beweise, diese möglichst abgekürzt, in Folgendem, jedoch mit Hinfortlassung der Aufgaben, nämlich Satz 1, 17, 25, 30, 33, 34, wiedergegeben werden.

Euklid Erklärung 1. Gleiche Kreise sind, in denen die Durchmesser oder die Halbmesser gleich sind. Dieser Satz wird jetzt als Lehrsatz aufgestellt und durch Deckung bewiesen. Dasselbe gilt von den Halbkreisen, den Bogen und den Ebenen, und beide Lehrsätze sind in der Regel die ersten des Lehrsystems.

Erkl. 2. Von einer geraden Linie wird

gesagt, sie berühre den Kreis, wenn sie ihn trifft und verlängert ihn nicht schneidet.

Diese Erklärung ist nicht zu billigen, es mufs vielmehr erst die Möglichkeit einer solchen geraden Linie nachgewiesen werden, wie dies in seinem 16ten Satze inconsequenterweise wirklich geschehen ist.

Erkl. 3. Von Kreisen sagt man, sie berühren einander, wenn sie einander treffen ohne einander zu schneiden. — Ist desgleichen erst zu beweisen, dafs dies von zwei Kreisen möglich ist: der Beweis der Möglichkeit geschieht jedenfalls am einfachsten mit Hülfe der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente.

6. Euklids Lehrsätze. Lehrsatz 2. Eine gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte B, D in dem Umfang eines Kreises verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises.

Denn es sei ADB die gerade Linie, ziehe die beliebige CD, so ist, da $CA = CB$ auch $\angle CAD = \angle CBD$ und da

Fig. 772.

$\angle CDB$ als Aufsenwinkel $> \angle CAD$, also auch $> \angle CBD$, so ist $CB > CD$ oder $CE > CD$, welches nicht möglich ist. Folglich ist ADB keine gerade Linie.

Lehrsatz 3. Wenn im Kreise (Fig. 771) eine durch den Mittelpunkt C gehende gerade Linie CG eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende Linie AD in H halbirt, so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln, und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Denn ad 1, zieht man die Halbmesser CA, CD, so entstehen weil drei Seiten einzeln gleich, die congruenten Dreiecke ACH, DCH, woraus $\angle AHC = \angle DHC = R\angle$.

Ad 2 entstehen die congruenten Dreiecke aus zwei gleichen Seiten und dem rechten Winkel, woher $AH = DH$.

Lehrsatz 4. Wenn im Kreise (Fig. 771) zwei gerade Linien (AD, JK), die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander (in H) schneiden, so halbiren sie einander nicht.

Denn wäre $AH = DH$ und zugleich $JH = KH$, so halbirt auch CH beide Linien und es wäre nach dem vorigen Satz $\angle CHA = R = \angle CHJ$.

Lehrsatz 5. Zwei Kreise (Fig. 773), die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Fig. 773.

Denn wäre C Mittelpunkt beider Kreise, so ziehe CD und die beliebige CF, so ist $CD = CE$ und zugleich $CD = CF$, also $CE = CF$.

Lehrsatz 6. Zwei Kreise, Fig. 774, deren einer den anderen inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Denn wäre K deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt, so hätte man im äufseren

Fig. 774.

Kreise $KJ = KM$ und im inneren $KJ = KL$, mithin $KM = KL$.

Lehrsatz 7. Nimmt man auf eines Kreises Durchmesser BE (Fig. 771) einen vom Mittelpunkt C verschiedenen Punkt N, und zieht von diesem nach dem Umkreis mehrere gerade Linien NF, NM, NL, so ist die durch den Mittelpunkt NE die gröfste, das übrige Stück NB die kleinste; unter den übrigen Linien aber

immer die der gröfsten NE nähere gröfser als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwei auf beiden Seiten der kleinsten NB (heifst praeciser: des Durchmessers BE) einander gleich.

Denn ad 1. In dem $\triangle NCF$ ist $NC + FC > NF$, d. h. $NE > NF$.

ad 3. In den Dreiecken NCF und NCM sind $CF = CM$ und $NC = NC$ aber $\angle FCN > \angle MCN$, folglich $NF > NM$.

ad 2. Es ist $CN + MN > CM$, also auch $> CN + BN$, folglich $MN > BN$.

ad 4. Macht man $\angle BCL = \angle BCM$, so ist in den Dreiecken CLN und CMN:

$$NC = NC, \; CL = CM$$

folglich $\triangle CLN \cong \triangle CMN$

also $LN = MN$

Gesetzt es wäre nun noch eine Linie $FN = LN$, so wäre auch $FN = MN$ was gegen No. 3 des Satzes ist.

Lehrsatz 8. Nimmt man aufserhalb eines Kreises (Fig. 775) ABC einen Punkt D und zieht von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien, eine DA durch den Mittelpunkt M, die übrigen beliebig, so ist unter denen, welche den hohlen Umkreis treffen, DA, DE, DF, DJ, die durch den Mittelpunkt DA die gröfste; von den übrigen aber immer die der gröfsten DA nähere gröfser als die entferntere. Unter denen hingegen, welche den erhabenen Umkreis treffen, DG, DK, DL, DH ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, DG die kleinste, von den übrigen aber immer die der kleinsten DG nähere kleiner als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwei auf beiden Seiten der kleinsten DG einander gleich.

Denn ad 1 ist $DM + EM > DE$, also auch $DM + AM = AD > DE$

Fig 775.

ad 2. In den Dreiecken DME und DMF ist $DM = DM$, $ME = MF$, $\angle DME > \angle DMF$, folglich $DE > DF$. Die kleinste unter diesen Linien ist die berührende DB.

ad 3. Es ist $MK + DK > MD$

oder $MG + DK > MG + DG$

folglich $DK > DG$

Demnach ist DG die kleinste der den Umkreis blofs treffenden Linien.

ad 4. Aus den Dreiecken DLM und DKM ergibt sich $DL > DK$, und die berührende DB als die gröfste der den Umkreis blofs treffenden Linien.

ad 5. Macht man $\angle DMH = \angle DML$, so erhält man aus den congruenten Dreiecken DMH, DML, $DH = DL$. Wollte man nun annehmen, es sei auf der linken Seite noch eine Linie, z. B. DK ebenfalls $= DH$, so widerspricht dem der vierte Theil des Satzes.

Dasselbe findet statt mit den Durchschnittslinien DJ, DF, welche einander gleich sind, und dafs noch eine zweite Linie, etwa DE der Linie DJ gleich sein sollte widerspricht No. 4 dieses Satzes.

Lehrsatz 9. Gehen (Fig. 775) von einem Punkt innerhalb eines Kreises an dem Umkreis mehr als zwei gleiche gerade Linien, so ist solcher Punkt des Kreises Mittelpunkt.

Denn ist $ME = MF = ML$, und es wäre nun ein anderer Punkt als M, z. B. N der Mittelpunkt, so ziehe durch MN den Durchmesser AG. Dann wäre nach Lehrsatz 7: $MA > ME$, $ME > MF$, $MF > ML$.

Lehrsatz 10. Ein Kreis schneidet einen anderen in nicht mehr als zwei Punkten.

Denn gesetzt, beide Kreise, Fig. 773, schnitten sich in den drei Punkten A, B, D, so ziehe AB und DB, halbire diese in G, H, errichte die Normalen GJ, HK, so liegt in diesen beiden, folglich in deren Durchschnittspunkt der Mittelpunkt der beiden Kreise, welches nach Lehrsatz 5 nicht möglich ist.

Lehrsatz 11. Berühren zwei Kreise, Fig. 774, einander innerhalb, so trifft die beide Mittelpunkte verbindende gerade Linie genugsam verlängert, den Berührungspunkt.

Denn ist K der Mittelpunkt des gröfseren Kreises und der des kleineren läge aufserhalb der Linie KJ etwa in G, so ziehe JG und durch G und K die MH.

Dann ist $GJ = GD$ und $KJ = KH$

Da nun $KG + GJ > KJ$

so ist $KG + GD > KH$

oder $KD > KH$
welches nicht möglich ist.

Lehrsatz 12. Berühren zwei Kreise ABD, EFG (Fig. 776) aufserhalb, so geht die gerade Linie, welche beides Mittelpunkte C, J verbindet, durch den Berührungspunkt T.

Denn wäre ein Punkt aufserhalb CJ,

Fig. 776.

etwa N der Mittelpunkt des zweiten Kreises, so ist $NT = NK$, und da $CT = CH$ so hat man $CT + JN = CH + NK$
woraus $CJ + TN < CN$

D. h. In einem Dreieck zwei Seiten zusammengenommen kleiner als die dritte.

Lehrsatz 13. Kreise berühren einander, sowohl innerhalb wie aufserhalb in nicht mehr als einem Punkt.

ad 1. Sind (Fig. 774) K und C die Mittelpunkte der sich innerhalb berührenden Kreise, so liegt nach Satz 11 der Berührungspunkt in der verlängerten geraden Linie KC; er kann also nur entweder in J oder in E sein, denn wäre er in J und in E zugleich, so wäre

$$CJ = CE$$

Es ist aber $KJ = KE$
folglich $CJ < KE$
um so viel mehr $CJ < CE$
welches der Annahme $CJ = CE$ widerspricht.

ad 2. wird mit Hülfe von Satz 12 eben so bewiesen.

Lehrsatz 14. In einem Kreise (Fig. 771) sind gleiche gerade Linien AD, BD gleich weit vom Mittelpunkt C entfernt, und gleich weit vom Mittelpunkt entfernte Linien sind einander gleich.

ad 1. Ist CH normal AD, CO normal BD, so ist nach Lehrsatz 3, $DO = \frac{1}{2} BD$, $DH = \frac{1}{2} AD$, also $DO = DH$; hierzu $DC = DC$ also $\triangle DCO \cong \triangle DCH$, woraus $CO = CH$.

ad 2. Aus $CD = CD$, $CO = CH$ und $\angle COD = \angle CHD = R$ folgt $\triangle CDO \cong \triangle CDH$ also $DO = DH$ und $BD = AD$.

Lehrsatz 15. In einem Kreise (Fig. 775) ist der Durchmesser OP die gröfste Linie, unter den übrigen aber immer die dem Mittelpunkt nähere $FJ >$ als die entferntere LH.

ad 1. Jede Sehne wie FJ bildet mit den Halbmessern MF, MJ ein Dreieck MFJ, in welchem also die Sehne kleiner ist als die Summe beider Halbmesser, mithin immer kleiner als der Durchmesser.

ad 2. Hat das $\triangle MLH$ eine gröfsere Höhe als das $\triangle MFJ$, so ist auch $\angle LMH < \angle FMJ$, folglich $LH < FJ$.

Lehrsatz 16. Das auf eines Kreises Durchmesser BE (Fig. 771) im Endpunkt E errichtete Perpendikel EP fällt aufserhalb des Kreises, und an diesen Punkt E fällt zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel keine andere gerade Linie. Auch ist der Winkel des Halbkreises $JSEC$ gröfser, der übrige vom Umkreise und dem Perpendikel eingeschlossene Winkel, SEP aber kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.

ad 1. Gesetzt das Perpendikel fiele innerhalb des Kreises etwa wie EJ, so ist $\angle CEJ = R$. Nun ist in dem $\triangle CJE$, $CJ = CE$, mithin $\angle CJE = \angle CEJ = R$, zwei Rechte in einem Dreieck; daher kann eine in E auf BE errichtete Normale keine Sehne sein.

ad 2. Gesetzt es fiele zwischen dem Bogen ES und dem Perpendikel EP eine gerade Linie EG, die also ebenfalls ganz aufserhalb des Kreises liegt, so ist $\angle CEG < R$ und ein auf EG gefälltes Perpendikel CG fällt oberhalb CE und $CE > CG$. Da nun $CS = CE$, so kann G nicht aufserhalb des Kreises fallen.

ad. 3 und 4. Es ist schon No. 1, Erkl. 7 angegeben, dafs Euklid gemischtlinige Winkel betrachtet. Diese aber mit geradlinigen Winkeln zu vergleichen, ist nicht angemessen, denn beiderlei Winkel sind ungleichartig. Es ist das Unangemessene daraus ersichtlich, dafs zwischen der geraden Linie EP und dem Kreisbogen EJ noch unzählige Kreisbogen möglich sind, die einen um so gröfseren Winkel mit

EC bilden, je weiter man von *E* über *EC* hinaus den Mittelpunkt des Kreises verlegt. (Vergleiche den späteren Art. „Kugeldreieck", pag. 120.)

Lehrsatz 18. Auf eines Kreises *ABDE* Berührungslinie *EG* (Fig. 771) ist die vom Mittelpunkt *C* nach dem Berührungspunkt *E* gezogene gerade Linie *CE* perpendiculär.

Wäre *CE* nicht perpendiculär, so müſste es eine andere sein, z. B. *CG*. Dann ist $\angle CGE$ ein rechter Winkel, also im $\triangle CEG$ die Seite $CE > CG$, also auch $CS > CG$.

Lehrsatz 19. Ist, Fig. 771, auf eines Kreises *ABDE* Berührungslinie *EG* im Berührungspunkt *E* eine gerade Linie *EB* perpendiculär, so liegt in solcher des Kreises Mittelpunkt.

Denn wäre in *EB* nicht der Mittelpunkt, sondern auſser ihr, etwa in *O*, so ist, wenn man *OE* zieht, (nach Satz 18) $\angle OEG = R$, folglich $\angle OEG = \angle BEG$.

Lehrsatz 20. In jedem Kreise (Fig. 777) ist der Winkel *DCE* am Mittelpunkt doppelt so groſs als der Winkel am Umfang, wenn beide auf einerlei Bogen *DE* stehen.

Ist 1. der Peripheriewinkel *DAE*, so daſs beide Schenkel desselben den Mittelpunkt *C* einschlieſsen, so ziehe den

Fig. 777.

Durchmesser *AB*. Dann ist $DC = AC$, also $\angle CDA = \angle CAD$, also $\angle DCB = 2\angle CAD$.

Eben so $\angle ECB = 2\angle CAE$, folglich $\angle DCE = 2\angle DAE$.

Ist 2. der Peripheriewinkel *DFE*, so daſs der Mittelpunkt auſserhalb beider Schenkel fällt, so ziehe den Durchmesser *FG* und man hat aus 1:

$$\angle GCD = 2\angle GFD$$
$$\angle GCE = 2\angle GFE$$

hieraus

$$\angle GCE - \angle GCD = 2\angle GFE - 2\angle GFD$$

oder $\angle DCE = 2\angle DFE$

Lehrsatz 21. Die Winkel *DAE*, *DFE* in einem Kreisabschnitte *DAFE* sind einander gleich (heiſst jetzt: Peripheriewinkel auf demselben Bogen (*DE*) sind einander gleich).

Denn zieht man den Mittelpunktswinkel *DCE*, so ist nach dem vorigen Satz $\angle DCE = 2\angle DAE = 2\angle DFE$, woher $\angle EAC = \angle DFE$.

Lehrsatz 22. Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise sind zweien rechten Winkeln gleich.

Es sei (Fig. 777) *ADBE* das Viereck, ziehe die Diagonalen *AB*, *DE*, so ist nach dem vorigen Satz

$$\angle ADE = \angle ABE$$
$$\angle BDE = \angle BAE$$

hieraus $\angle ADB = \angle ABE + \angle BAE$

hierzu $\angle AEB = \angle AEB$

folglich

$\angle ADB + \angle AEB = 2$ rechten Winkeln.

Lehrsatz 23. Auf einer geraden Linie (*AB*, Fig. 778) können nicht zwei ähnliche und dabei ungleiche Kreisabschnitte an einerlei Seite errichtet werden.

Denn zieht man die beliebigen Linien *AE* und *BE* aus den Endpunkten der Sehne, ferner die Linie *BD*, so hat man immer $\angle ADB > \angle AEB$, mithin sind die Abschnitte immer unähnlich.

Lehrsatz 24. Aehnliche Kreisabschnitte *ADB*, *FHG* auf gleichen geraden Linien *AB*, *FG* sind einander gleich.

Denn legt man beide so aufeinander,

Fig. 778.

daſs ihre Sehnen sich decken, so müssen auch die Bogen sich decken, weil sonst nach dem vorigen Satz die Abschnitte unähnlich sein würden.

Lehrsatz 26. In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel am Mittelpunkt sowohl als gleiche Winkel am Umkreise auf gleichen Bogen.

Ist $\angle BCG = \angle EHF$ und also auch

$\angle BAG = \angle EDF$, so ziehe BG, EF, so ist $\triangle BCG \cong \triangle EHF$, folglich $BG = EF$, und da $\angle A = \angle D$, so ist auch nach Satz 22, $\angle K = \angle L$, also die Abschnitte BKG

Fig. 779.

und ELF ähnlich (Erkl. 11), und wegen $BG = EF$ auch Abschnitt BKG = Abschnitt ELF. (Euklid spricht im Lehrsatz nur von gleichen Bogen, beweist aber auch gleiche Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte.)

Lehrsatz 27. In gleichen Kreisen sind die auf gleichen Bogen BG, EF stehenden Winkel am Mittelpunkt BCG und EHF sowohl, als am Umkreise BAG, EDF einander gleich.

Wäre $\angle BCG > \angle EHF$, so sei $\angle BCM = \angle EHF$. Dann wäre nach dem vorigen Satz Bogen BM = Bogen EF; es ist aber angenommen Bogen BG = Bogen EF, also wäre Bogen BM = Bogen BG, welches unmöglich ist. Demnach ist $\angle BCG = \angle EHF$ und mit diesen nach Satz 20, $\angle BAG = \angle EDF$.

Lehrsatz 28. In gleichen Kreisen schneiden gleiche gerade Linien BG, EF gleiche Bogen ab, so dafs die gröfseren Bogen BAG, EDF wie auch die kleineren BKG, ELF einander gleich sind.

Denn da die Halbmesser einander gleich sind, so ist $\triangle CBG \cong \triangle HEF$ also $\angle BCG = \angle EHF$, folglich (nach Satz 26) die gröfseren und die kleineren Bogen einander gleich.

Lehrsatz 29. In gleichen Kreisen sind die geraden Linien BG, EF, welche die Endpunkte gleicher Bogen mit einander verbinden, einander gleich.

Die Halbmesser beider Kreise sind einander gleich, die Bogen gleich, folglich (Satz 27) auch $\angle BCG = \angle EHF$, folglich in den congruenten Dreiecken BCG, EHF $BG = EF$.

Lehrsatz 31. Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter; aber der Winkel im gröfseren Kreisabschnitt ist kleiner und der im kleineren gröfser als ein rechter (heifst jetzt Umfangswinkel auf einem kleineren, auf einem gröfseren Bogen). Hingegen ist der Winkel des gröfseren Kreisabschnitts gröfser und des kleineren kleiner als ein rechter (beide letzten Winkel sind die gemischtlinigen Winkel (s. 1. Erkl. 7 und Lehrsatz 16, ad 3).

ad 1. Fig. 777. Es ist AEB der Winkel im Halbkreise. (Euklids Beweis ist etwas weitläufig). Nun ist (nach Lehrsatz 20)

$$\angle AEC = \tfrac{1}{2}\angle ACE$$
$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\angle BCE$$

$$\text{daher } \angle AEB = \tfrac{1}{2}(\angle ACE + \angle BCE) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \text{ Rechten} = R\angle.$$

ad 2. Es ist $\angle DEB$ der Winkel im gröfseren Abschnitt $DGAFEB$ oder der auf dem kleineren Bogen BD stehende Umfangswinkel und augenscheinlich $<$ $(AEB = R)$.

ad. 3. Es ist $\angle DBE$ der Winkel im kleineren Abschnitt DBE oder der auf dem gröfseren Bogen $DGAFE$. Mithin ist nach 2 des Satzes $\angle DAE < R$; aber nach Lehrsatz 22 ist $\angle DAE + \angle DBE = 2R$, mithin $\angle DBE > R$.

ad 4. Dafs der gemischtlinige Winkel $ED(GAFE) > R$ und der $ED(BE) < R$, wird augenscheinlich, wenn man durch D eine Normale auf DE errichtet.

Lehrsatz 32. Wird ein Kreis, Fig. 780, von einer geraden Linie EF berührt und von einer anderen aus dem Berührungspunkt B gezogenen BD geschnitten,

Fig. 780.

so sind die Winkel DBF, DBE, welche die schneidende Linie mit der berührenden macht, den Winkeln in den Nebenabschnitten des Kreises gleich.

Denn ad 1. In dem auf EF in B errichteten Perpendikel BA liegt der Mittelpunkt des Kreises, also ist $\angle BDA$

$= R = \angle ABD + \angle BAD = \angle ABF = \angle ABD + \angle DBF$. Folglich $\angle BAD = \angle DBF$.

ad 2. Nach Lehrsatz 22 ist $\angle A + \angle G = 2R = \angle DBF + \angle DBE$. Nun ist $\angle A = \angle DBF$ (ad 1) mithin $\angle G = \angle DBE$.

Lehrsatz 35. Schneiden einander in einem Kreise zwei gerade Linien, so ist das unter den Abschnitten der einen enthaltenen Rectangel dem unter den Abschnitten der anderen enthaltenen gleich.

Gehen die beiden sich schneidenden Linien durch den Mittelpunkt, so ist der Satz an sich klar. Ist aber C der Mittelpunkt, und der Durchschnittspunkt ein anderer, E, so ziehe CB, CG, CE, fälle die Perpendikel CF, CH, so ist $AF = GF$, $BH = DH$.

Fig. 781.

Mithin $AE \times GE + EF^2 = AF^2 = GF^2$ *)
hierzu $CF^2 = CF^2$

gibt $AE \times GE + EF^2 + CF^2 = CF^2 + GF^2$
oder $AE \times GE + CE^2 = CG^2 = CB^2$

Eben so ist
$$DE \times BE + CE^2 = CB^2$$
folglich ist $AE \times GE = DE \times BE$

Lehrsatz 36. Gehen von einem außerhalb eines Kreises (Fig. 775) genommenen Punkt D zwei gerade Linien nach dem Umkreis, von denen ihn die eine DA oder DF in AL schneidet, die andere DB berührt, so ist das unter der ganzen schneidenden Linie DA, DF und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitt DG, DL enthaltene Rectangel dem Quadrat der Berührungslinie DB gleich.

ad 1. Wenn die schneidende Linie DA den Mittelpunkt M trifft.

Fälle das Loth MB auf BD, so ist
$$DM^2 = DB^2 + BM^2$$
Ferner ist
$$AD \times BG + GM^2 = DM^2 \text{ **)}$$
oder
$$AD \times DG + BM^2 = DM^2 = DB^2 + BM^2$$
woraus $AD \times DG = DB^2$

ad 2. Wenn die schneidende Linie DF nicht den Mittelpunkt M trifft.

Fälle das Perpendikel MR auf DF, dann ist FL in R halbirt, und man hat
$$DF \times DL + LR^2 = DR^2$$
hierzu $MR^2 = MR^2$

gibt
$$DF \times DL + LR^2 + MR^2 = DR^2 + MR^2$$
oder
$$DF \times DL + LM^2 = DM^2 = BD^2 + BM^2$$
Nun ist $LM^2 = BM^2$

folglich ist $DF \times DL = BD^2$

Lehrsatz 37. Gehen von einem außerhalb eines Kreises (Fig 775) genommenen Punkt D zwei gerade Linien an den Umkreis, von denen die eine DF ihn schneidet, die andere DB an ihn fällt, und ist das unter der ganzen schneidenden Linie DF und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitt DL enthaltene Rectangel dem Quadrat der an den Umkreis fallenden Linie DB gleich, so ist letztere eine Berührungslinie des Kreises.

Denn denkt man sich (Fig. 775) rechts von AD eine berührende $DB_{,}$, so ist nach dem vorigen Satz: $DF \times DL = DB_{,}^2$

Nun ist zugleich $DF \times DL = DB^2$
folglich $DB_{,} = DB$

Nun sind in den beiden Dreiecken DMB und $DMB_{,}$: $DB = DB_{,}$; $DM = DM$ und $MB = MB_{,}$; folglich ist auch $\angle DBM = \angle DB_{,}M$ und da dieser ein rechter Winkel ist, so ist auch $\angle DBM$ ein rechter Winkel, und folglich DB eine Tangente (Satz 16).

7. Hier schliefst das dritte Buch und mit ihm das Lehrgebäude über die wissenswürdigsten Eigenschaften des Kreises mit Ausnahme der Aufgaben, welche durch Construction gelöst werden, von welchen allein 16 Aufgaben das 4te Buch ausmachen.

Auffallend könnte es erscheinen, dafs ein ganz einfacher Lehrsatz, der zu den ersteren der Kreislehre gehört, erst als

*) Anmerk. $AE = a$, $GE = b$ gesetzt: $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

**) Anmerk. $AD = a$, $DG = b$ gesetzt: $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2} + b\right)^2$

33ter Lehrsatz im 6ten Buch aufgeführt ist.

Nämlich: „In gleichen Kreisen verhalten sich sowohl die Winkel am Mittelpunkt als auch die Winkel am Umkreise, desgleichen die Kreisausschnitte wie die Kreisbogen, worauf sie stehen.“ Denn der Satz beruht auf dem Satz, dafs in gleichen Kreisen zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt auch gleiche Bogen u. s. w. gehören.

Man mufs aber erwägen, dafs Euklid die Lehre von den Verhältnissen erst im fünften Buch und zwar mit Hülfe von geraden Linien vorträgt.

8. Die geordnete Zusammenstellung der Lehrsätze für die Elemente der Kreislehre ist nach meiner Ansicht mit Zuziehung guter Lehrbücher folgende:

1. Kreise, welche gleiche Halbmesser also auch gleiche Durchmesser haben, sind gleich.

2. Gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser und also auch gleiche Durchmesser.

3. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Theile.

Diese drei Sätze sind durch Deckung zu erweisen.

4. In einem und in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und gleiche Abschnitte.

Beweis s. vorstehend Euklid Satz 26.

5. In einem und in gleichen Kreisen gehören zu ungleichen Winkeln am Mittelpunkt ungleiche Bogen u. s. w.

Ist mit Hülfe von Satz 4 indirect zu beweisen.

6. Die acht umgekehrten Sätze von Satz 4 und 5 (wie Euklid Satz 27).

7. In einem und in gleichen Kreisen verhalten sich die Bogen und die Ausschnitte (die Sehnen und die Abschnitte natürlich **nicht**) wie die zu ihnen gehörenden Winkel am Mittelpunkt.

Beweis aus Satz 4. Verhalten sich nämlich die Winkel wie $m:n$, so theile diese Winkel durch Radien in m und in n gleiche Theile, dann besteht der erste Winkel aus m, der zweite aus n gleichen Winkeln, für jeden gilt Satz 4, folglich haben n und m gleiche Winkel n und m gleiche Bogen und Ausschnitte.

Sind die Winkel (A und B) incommensurabel, so nehme den einen derselben z. B. A, rational an und theile denselben in n gleiche rationale Theile; der zweite Winkel B sei nun gröfser als $m-1$ und kleiner als m solcher Theile (α), so fällt dessen zweiter Halbmesser zwischen den $m-1$ten und den $m$ten Theilhalbmesser. Nun kann man n beliebig grofs und damit den einzelnen Theilwinkel α beliebig klein nehmen, und dadurch beide den Endhalbmesser des $\angle B$ einschliefsenden Halbmesser demselben (d. h. $\angle(m-1)\alpha$ und $\angle m\alpha$ dem $\angle B$) beliebig nahe bringen. Aber der zu $m\alpha$ gehörende Bogen bleibt immer gröfser und der zu $(m-1)\alpha$ gehörende Bogen immer kleiner als der gegebene, mithin ist der gegebene Bogen als Grenzwerth zwischen beiden der gesuchte Bogen und mit diesem der zugehörige Ausschnitt der gesuchte Ausschnitt.

8. In einem oder in gleichen Kreisen sind gleiche Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt; und Sehnen, die in einem oder in gleichen Kreisen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, sind gleich.

Der Satz ist mit Hülfe von Satz 4 zu beweisen. Siehe vorstehend Euklid Satz 14, und den Aufsatz Chorde No. 2 mit Fig. 286.

9. In einem oder in gleichen Kreisen ist der Mittelpunktswinkel doppelt so grofs als der mit ihm auf demselben Bogen stehende Umfangswinkel. (Beweis vorstehend Euklid Satz 20.)

Hieraus gehen unmittelbar folgende Sätze als richtig hervor:

10. Alle Umfangswinkel auf demselben oder auf gleichen Bogen in einem Kreise, oder auf gleichen Bogen in gleichen Kreisen sind einander gleich (mit Hülfe 8, Satz 4).

Jeder der beiden von einer Sehne abgeschnittenen Bogen ist der geometrische Ort für Dreiecke auf einerlei Grundlinie mit gleichen Winkeln an der Spitze.

11. Zu gleichen Peripheriewinkeln in einem und in gleichen Kreisen gehören gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

12. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel, denn der Centriwinkel ist = 2 rechten. Der Halbkreis ist demnach der geometrische Ort für rechtwinklige Dreiecke auf einerlei Hypotenuse. (Euklid, Satz 31.)

13. Der Peripheriewinkel, der auf einem Bogen steht, der kleiner ist als der Halbkreis, ist spitz, auf einem der gröfser ist als der Halbkreis stumpf. (Euklid, Satz 31)

14. Parallele Sehnen schneiden zwischen sich gleiche Bogen ab. (S. den Art. „**Chorde**“, No. 4)

15. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt in der auf einer Chorde in der Mitte errichteten Normalen, und die von dem Mittelpunkt auf eine Chorde gefällte Normale halbirt dieselbe. (Vorstehend Euklid, Satz 3.)

16. Eine gerade Linie schneidet einen Kreis nur in zwei Punkten. Denn schnitte sie den Kreis in drei Punkten und man zieht die drei Radien, so entständen mit drei Schenkeln, derselben Spitze und derselben Höhe drei gleichschenklige Dreiecke.

17. Drei in einer Ebene befindliche Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen einen Kreis. Denn verbindet man einen Punkt mit den beiden anderen Punkten durch gerade Linien, so kann man diese beiden Linien als Sehnen eines Kreises betrachten; dessen Mittelpunkt liegt nach Satz 15 in dem Durchschnittspunkt der in den Mitten der Sehnen auf denselben errichteten beiden Normalen.

18. In jedem Viereck im Kreise ist die Summe je zwei einander gegenüberliegender Winkel = 2 rechten Winkeln, weil deren Centriwinkel zusammen 4 Rechte ausmachen. (Euklid, Satz 22.)

19. Wenn in einem Viereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen gleich $2R$ sind, so kann man einen Kreis darum beschreiben.

Denn gesetzt der Kreis (Fig. 777) ginge durch A, D und E aber nicht durch B, sondern durch einen Punkt H oberhalb oder unterhalb B in AB, so würde nach dem vorigen Satz $\angle A + \angle H$ = zweien Rechten sein. Im ersten Fall aber wäre $\angle H > B$ und im zweiten Fall $\angle H < \angle B$ also $\angle A + \angle H$ entweder $>$ oder $< 2R$.

Anmerk. Man kann Satz 18 auch folgender Art ausdrücken:

Die beiden Umfangswinkel in jeden zwei Abschnitten, aus welchen ein Kreis besteht, sind zusammen = 2 Rechten.

20. In einem oder in gleichen Kreisen liegt die gröfsere Sehne dem Mittelpunkt näher als die kleinere.

21. Wenn in einem oder in gleichen Kreisen eine Sehne entfernter vom Mittelpunkt ist als eine andere, so ist die erstere kleiner als die letzte.

Die Beweise dieser beiden Sätze sind einfach (s. den Art. „Chorde", No. 3, pag. 22 mit Fig. 286).

22. Zwei sich schneidende Sehnen halbiren einander nicht. (Euklid, Satz 4.)

23. Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb des Kreises, so ist der von ihnen gebildete Winkel = der Summe, schneiden sie sich aufserhalb, = der Differenz der beiden Umfangswinkel, welche auf den zwischen den Sehnen abgeschnittenen Bogen stehen.

Beweis wie im Art. „Chorda", No. 6 mit Fig. 287 und 288.

24. Schneiden sich zwei Sehnen normal, und man zieht die vier Halbmesser nach deren Endpunkten, so ergänzen sich die gegenüberliegenden Umfangswinkel gegenseitig zu zwei Rechten.

Beweis im Art. „Chorde", No. 7 mit Fig 289.

25. Die auf einem Durchmesser in jedem Endpunkt errichtete Normale hat nur diesen einen Punkt mit dem Kreisumfang gemein, liegt mit allen übrigen Punkten aufserhalb des Kreises und ist somit eine Tangente an dem Kreis. (Euklid, Satz 16.)

Denn ist (Fig. 771) EG normal auf BE und man zieht aus dem Mittelpunkt C nach einem anderen dem Berührungspunkt E noch so nahe gelegenen Punkt G in EG eine gerade Linie CG, so ist diese als Hypotenuse in dem rechtwinkligen $\triangle CEG$ immer gröfser als CE; der Punkt G liegt also aufserhalb des Kreises.

Der weitläufige Beweis von Euklid, Satz 16 ist nicht erforderlich.

26. Eine Tangente steht auf dem durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser normal.

Denn gesetzt GE, (Fig. 771) wäre nicht normal EC, so fälle eine Normale CG auf EG. Dann ist $\angle CGE = R$, folglich in dem rechtwinkligen $\triangle CEG$ die CE als Hypotenuse $> CG$; da aber der Punkt G in der Tangente aufserhalb des Kreises liegt, so mufs $CG > CE$ sein.

27. Eine in dem Berührungspunkt auf einer Tangente errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt.

Denn ginge sie nicht durch C, Fig. 771, sondern etwa wie EO, und man zieht den Halbmesser CE, so ist nach dem vorigen Satz $\angle CEG = R$, also kann $\angle OEG$ nicht R sein.

28. Zwei nicht parallele Tangenten an einem Kreis bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert sind gleich; die vom Durchschnittspunkt durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ist normal auf der beide Berührungspunkte verbindenden Sehne und halbirt sie.

Denn denkt man sich (Fig. 775) rechts von AD eine zweite Tangente DB' so

ist $\triangle DBM \cong \triangle DB'M$, weil $DM = DM$, $BM = B'M$ und $\angle B = \angle B' = R$. Folglich ist $DB' = DB$.

Da nun auch $\angle DMB' = \angle DMB$, so ist, wenn man BB' zieht und den Durchschnittspunkt zwischen DM und BB' mit R bezeichnet, $MR = MR$, mithin $\triangle BMR \cong B'MR$ und hieraus $BR = B'R$ und $\angle BRM = \angle B'RM = R$.

29. Treffen sich eine Tangente und Sehne in dem Berührungspunkt, so ist der von ihnen gebildete Winkel = dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.

Beweis vorstehend, Euklid, Satz 32.

30. Ist von den beiden geraden Linien DB und DF, Fig. 775, erstere eine Tangente, letztere eine Durchschnittslinie, so ist das Rectangel, welches von dieser Durchschnittslinie mit dem äußeren Theil derselben gebildet wird, gleich dem Quadrat der Tangente. Also Fig. 775:

$DB^2 = DF \times DL = DA \times DG = DJ \times DH$

Beweis: Euklid, Satz 36 mit Fig. 775.

31. Der umgekehrte Satz von 30 mit Beweis s. vorstehend Euklid, Satz 37.

32. Zwei Kreise, die einander schneiden und die einander berühren haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Euklid hat darüber 2 Lehrsätze: Zwei Kreise, die einander schneiden haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Satz 5 mit Fig. 773) und: Zwei Kreise, deren einer den anderen inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Satz 6 mit Fig. 774). Daſs dies bei Kreisen, die sich auswendig berühren, der Fall ist, scheint ihm unnöthig bewiesen zu werden.

33. Zwei Kreise schneiden einander in nicht mehr als zwei Punkten. Beweis ist vorstehend in Euklid, Satz 10 mit Fig. 773.

34. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so steht (Fig. 782) die Centrale CC' auf der gemeinschaftlichen Sehne AB normal und halbirt dieselbe.

Fig. 782.

Denn da $AC' = BC'$, $AC = BC$ und $CC' = CC'$ hat man

$$\triangle ACC' \cong \triangle BCC'$$

Hieraus $\angle ACC' = \angle BCC'$

hierzu $AC = BC$, $DC = DC$ gibt

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$

woraus $AD = BD$ und $\angle ADC = \angle BDC = R$

35. Kreise berühren einander, sowohl innerhalb als außerhalb in nicht mehr als einem Punkt und haben daselbst eine gemeinschaftliche Tangente. (Beweis, Euklid, Satz 13 mit Fig. 774.)

36. Berühren zwei Kreise einander innerhalb oder außerhalb, so trifft die Centrale den Berührungspunkt. (Beweis s. Euklid, Satz 11 und 12.)

37. Zwei in einer Ebene liegende Kreise schneiden sich, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner ist als die Summe ihrer Halbmesser oder größer als die Differenz derselben.

Denn im ersten Fall liegt jeder Mittelpunkt außerhalb des zweiten Kreises, im zweiten Fall liegen beide Mittelpunkte in dem größeren Kreise; in beiden Fällen steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte (die Centrale) auf der gemeinschaftlichen Sehne normal und halbirt dieselbe.

38. Zwei in einer Ebene liegende Kreise berühren einander in einem einzigen Punkt, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich der Summe oder der Differenz ihrer Halbmesser ist. Sie haben eine gemeinschaftliche Tangente, die im ersten Fall zwischen beiden Kreisen, im zweiten Fall auf einer Seite beider Kreise liegt, weil die Berührung der Kreise im ersten Fall außerhalb, im zweiten Fall innerhalb geschieht.

39. Zwei in einer Ebene liegende Kreise liegen ganz auseinander, wenn die Centrale größer ist als die Summe der Halbmesser. Ist die Centrale kleiner als die Differenz beider Halbmesser, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren.

40. Wenn (Fig. 783 und 784) zwei Kreise einander berühren, und man zieht durch den Berührungspunkt zwei gerade Linien, welche jeden der beiden Umfänge in noch einem Punkt schneiden, so sind die beiden Sehnen, welche diese Durchschnittspunkte verbinden, einander parallel.

Denn in Fig. 783 sind DG und FH, in Fig. 784 AF und AD die beiden durch den Berührungspunkt A gezogenen ge-

raden Linien, *FD* und *GH* die deren Endpunkte verbindenden Sehnen.

Fig. 783.

Es ist also in Fig. 783

$\angle BAD = \angle AFD$
$\angle CAG = \angle AHG$

Aber $\angle BAD = \angle CAG$

also auch $\angle AFD = \angle AHG$

folglich $GH \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} DF$

Fig. 784.

In Fig. 784 ist

$\angle BAG = \angle AHG$
$\angle BAF = \angle ADF$

folglich $\angle AHG = \angle ADF$

und $GH \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} DF$

41. Schneiden sich zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne mit dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich grofs. Beweis s. Enklid, Satz 35 mit Fig. 781, pag. 94 und Art. Chorde, No 11 mit Fig. 287, Bd. II. pag. 24.

42. Schneidet eine Tangente eine verlängerte Sehne, so ist das Quadrat der Tangente = dem Rechteck aus der ganzen verlängerten Sehne und der Verlängerung.

Beweis s. Enklid, Satz 36 mit Fig. 775, pag. 94 und Art. „Chorde", No. 11 mit Fig. 290, Bd. II. pag. 24.

43. Schneiden sich zwei Sehnen aufserhalb des Kreises, so sind die Rectangel aus jeder ganzen verlängerten Sehne und ihrer Verlängerung einander gleich. Beweis im Art. „Chorde", No. 11 mit Fig. 288, Bd. II. pag. 24.

9. Zu den Lehren der Geometrie gehören die Anweisungen zu Lösung geometrischer Aufgaben mittelst Zeichnung, wie dies in dem Art. „Constructionen", pag. 49, als Einleitung auseinandergesetzt ist. Die Constructionen beginnen daselbst mit denen aus der Elementargeometrie und es sind für dieselbe 135 Aufgaben gelöst. Diejenigen Aufgaben, welche speciell auf den Kreis sich beziehen, fangen mit No. 29 an und zwar mit der einfachsten Aufgabe: In einem gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen.

Die den Kreis speciell betreffenden Aufgaben sind nun No. 29 bis incl. No. 41, No. 79 bis No. 81 und No. 135. Die Verzeichnung von regelmäfsigen Dreiecken und Vielecken in und um einen Kreis zeigen No. 89 bis incl. 95. Von den übrigen Aufgaben sind No. 62 bis No. 64 Construction von Vierecken in und um den Kreis, No. 70 bis No. 78 Construction von Dreiecken und Quadraten im Halbkreis und im Quadrant; No. 89 bis No. 95 Construction regelmäfsiger Vielecke in und um den Kreis. Auch in dem Art. „Chorde" mit 8 Figuren befinden sich Constructionen, welche die Chorde an sich und dieselbe in Zusammenhang mit der Tangente betreffen.

10. Der algebraische Theil der Elementarlehre vom Kreise ist in dem Wörterbuch schon in verschiedenen Artikeln behandelt. Der erste Artikel darüber: Arcus, Bogen, Kreisbogen enthält die Auffindung der Verhältnifszahl π zwischen dem irrationalen Kreisumfang und dem rationalen Durchmesser und die Werthe von π, $log\ br\ \pi$, $logn\ \pi$, jede in 15 Decimalstellen angegeben. Ferner enthält er die Eintheilung der Kreislinie, die Auffindung der Bogen bei gegebenen Centriwinkeln mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln; Tabellen für Bogenlängen bei Centriwinkeln Secunde für Secunde und Minute für Minute von 1 bis 60 und Grad für Grad von 1° bis 360°. Ferner die Entwickelung von Reihen für die Länge eines Bogens bei gegebenen Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante.

In dem Art. „Chorde", No. 12 mit Fig. 293 sind Formeln gegeben für den Zusammenhang des Halbmessers der zu-

gehörigen Sehne, der zu dem halben Bogen gehörenden Sehne, der Höhe des zur ganzen Sehne gehörenden Abschnitts und Anwendung auf die genannten Stücke als Theile regelmäfsiger Figuren im Kreise. Der Art. „Halbkreis" enthält dieselben Formeln für den Halkreis.

11. Geordnete Zusammenstellung der zum Kreise gehörenden Zahlen und Elementarformeln.

Die Verhältnifszahl zwischen dem Durchmesser zum Umfang des Kreises ist

1. $1 : \pi = 1 : 3{,}14159\ 26535\ 89793$
2. $\log br\ \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94134$
3. $\log n\ \pi = 1{,}14472\ 98858\ 49400$
4. $\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83791$
5. $\log br \frac{1}{\pi} = 9{,}50285\ 01273 \ldots - 10$
6. $\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 38509\ 05516$
7. $\log br \sqrt{\pi} = 0{,}24857\ 49364$
8. $\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}56418\ 95835\ 47756$
9. $\log br \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 9{,}75142\ 50636 \ldots - 10$
10. $\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89359$
11. $\log br\ \pi^2 = 0{,}99429\ 97454$
12. $\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132\ 11836\ 42338$
13. $\log br \frac{1}{\pi^2} = 9{,}00570\ 02546 \ldots - 10$
14. $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}80599\ 59770$
15. $\log br \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 9{,}90633\ 28741 \ldots - 10$

Der Umfang des Kreises:

16. $2\pi r = 6{,}28318\ 53071\ 79586 \times r$
17. $\log 2\pi r = 0{,}79817\ 98734 \ldots \log r$

Der Umfang des Quadrant:

18. $\frac{1}{2}\pi r = 1{,}57079\ 63288 \ldots \times r$
19. $\log \frac{1}{2}\pi r = 0{,}19611\ 98719 \ldots \times \log r$

Der Inhalt des Kreises:

20. $\pi r^2 = 3{,}14159 \ldots \times r^2$
21. $\log \pi r^2 = 0{,}99429\ 97454 \ldots \log r$

Bei dem Centriwinkel $= \alpha$

22. Der Kreisbogen $= \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$
23. Die Sehne $= 2r \sin \frac{\alpha}{2}$
24. Die Höhe des Bogens $= \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) r$
25. Der Kreisausschnitt $= \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$
26. Der Kreisabschnitt $=$ $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{180^\circ}\pi - \sin \alpha\right) r^2$
27. Der concentrische Kreisring $=$ $\pi (R^2 - r^2)$
28. Das concentrische Ringstück $=$ $\frac{\alpha}{360^\circ} \pi (R^2 - r^2)$

Sind die in einen Kreis eingetragenen Linien, als Sehnen, Höhen, Abschnitte statt in Zahlen gegeben zu sein mit Buchstaben bezeichnet, so erhält man noch folgende Formeln (Bd. II. pag. 23):

29. $AF : DF = EF : BF$ oder $AF \times BF = DF \times EF$ Fig. 288
30. $AF : BF = DF : AF$ oder $AF^2 = BF \times DF$ Fig. 290

Für den Halbkreis (Fig. 292)

31. $AE : DE = DE : BE$ oder $DE^2 = AE \times BE$
32. $AE : AD = AD : AB$ oder $AD^2 = AB \times AE$

Wird Fig. 293 der Halbmesser $AC = BC = r$, die Sehne $AB = a$ für den Centriwinkel $ACB = \alpha$, die Sehne $AD = BD = b$ für den Centriwinkel $ACD = \frac{1}{2}\alpha$, die Höhe DE des Abschnitts $ABD = h$ gesetzt, so erhält man

33. $a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}$
34. $b^4 - 4b^2r^2 + a^2r^2 = 0$
35. $b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$
36. $b = \sqrt{2rh} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
37. $h = \frac{b^2}{2r} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
38. $r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$

Setzt man α für $\frac{1}{2}\alpha$, also Fig. 293, $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, so hat man

39. $AB = a = 2r \sin \alpha = 2b \cos \frac{\alpha}{2}$

$\frac{a}{b} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$

40. $BD = AD = b = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} a \sec \frac{\alpha}{2}$

12. Die in dem Art. „Arcus", von No. 9 ab entwickelten Formeln für die Länge der Bogen in Reihen nach den fortlaufenden Potenzen der trigonometrischen Linien der Bogen sind:

41. $Arc(\sin = x) = x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}x^9 + \dots$

Das allgemeine ($n$te) Glied ist

$$\frac{3\cdot5\cdot7\dots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\dots(2n-2)(2n-1)}\cdot x^{2n-1}$$

42. $Arc(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \dots\right]$

43. $Arc(tg = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots \pm \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

$$= \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 + \dots \frac{2\cdot4\cdot6\dots2(n-1)}{3\cdot5\cdot7\dots(2n-1)}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n-1}\right]$$

44. $Arc(\cot = x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \dots$

$$= \frac{\pi}{2} - (x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \dots\right]$$

45. $Arc(\sec = x) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot3\cdot x} + \frac{3}{2\cdot4\cdot5\cdot x} + \dots\right]$

46. $Arc(\operatorname{cosec} = x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot3x^3} + \frac{3}{2\cdot4\cdot5x^5} + \dots$

47. $Arc(\operatorname{sinv} = x) = \frac{\pi}{2} - \left[(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2\cdot3} + \frac{3(1-x)^5}{2\cdot4\cdot5} + \dots\right]$

48. $Arc(\operatorname{cosv} = x) = (1-x) + \frac{(1-x)^3}{2\cdot3} + \frac{3(1-x)^5}{2\cdot4\cdot5} + \dots$

Man kann aus einigen dieser Formeln eine Reihs für den Werth von π entwickeln: Legt man Formel 41 zu Grunde, setzt den Centriwinkel für $x = 30°$, dann ist $arc \sin 30° = \frac{1}{6}\pi$ und $\sin 30° = \frac{1}{2}$, mithin

49. $\pi = 6\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4^2} + \frac{2\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot8^3} + \frac{2\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot16^3} + \dots\right]$

(s. den Art. „Arcus", No. 17, A am Schlufs).

Legt man Formel 43, 2 zn Grunde, so hat man für den Centriwinkel von $x = 45°$: $x = \frac{1}{4}\pi$, $tg\, x = 1$ und

50. $\pi = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot2}{3\cdot5} + \frac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7} + \dots\right)$

(s. den Art. „Arcus", No. 17).

13. Der Art „Brennpunkte der Kegelschnitte", pag. 420 mit Fig 257 zeigt den Kreis als einen Kegelschnitt, nämlich als den mit der Grundebene ∥ genommenen Durchschnitt EF eines Kegels, entwickelt aber für denselben keine Formel, weil der Kreis keinen Brennpunkt hat. Wie aber für die übrigen Kegelschnitte, so gehört auch für den Kreis eine allgemein geltende Gleichung.

Der Art. „Coordinaten", pag. 132, gibt mit Fig. 513 die rechtwinklige Coordinatengleichung des Kreises (des Kreisumfangs)

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2rx - x^2 \\ \text{oder}\quad y^2 + x^2 - 2rx &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Gleichung ist aber eingeschränkt, und zwar deshalb, weil die Abscissenlinie der Durchmesser, ein Endpunkt desselben Anfangspunkt der Coordinaten und diese rechtwinklig sind.

Der Art. „Curven", pag. 161 entwickelt gleich Anfangs mit Fig. 518 die Coordinatengleichung für den Kreis, wo die Abscissenlinie AX außerhalb des Kreises liegt, die Doppelordinaten wie DE, DF schiefwinklig und der Anfangspunkt A der Coordinaten ein willkührli-

cher Punkt darin ist. Man erhält dort die Gleichung:

$$y^2 - 2yx \cos\alpha + x^2 + 2y(a\cos\alpha - b) - 2x(a - b\cos\alpha) + a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

Es wird aus dieser Gleichung festgestellt, dafs die einfachste aller krummen Linien, der Kreis, schon durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird. Es ist also der Kreis schon eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Klasse von der diesen Curven zukommenden allgemeinen Form 1 (Bd. II, pag. 172).

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

Oder wenn man $a = 1$ setzt, oder wenn man die Gleichung mit a dividirt und die übrigen Coefficienten als mit a dividirt beibehält

$$y^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

Man erhält ferner zwei verschiedene Werthe von y, einen für DE und einen für DF.

A. Setzt man $\alpha = 90^0$, dann sind die Ordinaten normal der Abscisse und man erhält aus Gleichung 2:

$$y^2 + x^2 - 2by - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

B. Setzt man nun in diese Gleichung noch $b = r$, so erhält man die Abscissenlinie in den unteren Berührungspunkt mit dem Kreise und es ist:

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2ax + a^2 = 0 \quad (4)$$

C. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $b = 0$, so erhält man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \quad (5)$$

D. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $a = r$, so erhält man den Anfangspunkt in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2by - 2rx + b^2 = 0 \quad (6)$$

E. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $a = 0$, dann erhält man den Anfangspunkt in der Projection des Mittelpunkts und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \quad (7)$$

F. Setzt man in Gleichung 4 die Constante $a = r$, so hat man die Abscissenlinie in dem unteren Berührungspunkt mit dem Kreise und den Anfangspunkt A in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2rx + r^2 = 0 \quad (8)$$

G. Setzt man in Gleichung 4 die Constante $a = 0$, dann hat man die Abscisse in den unteren Berührungspunkt und den Anfangspunkt in der Projection des Mittelpunkts. Die Gleichung ist

$$y^2 + x^2 - 2ry = 0 \quad (9)$$

H. Setzt man in Gleichung 5 die Constante $a = r$ oder in Gleichung 6 die Constante $b = 0$, so hat man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C, den Anfangspunkt im Scheitel J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0$$

J. Setzt man in Gleichung 6 die Constante $b = r$, dann hat man die Abscissenlinie in dem unteren Berührungspunkt mit dem Kreise, den Anfangspunkt in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2rx + r^2 = 0$$

K. Setzt man in Gleichung 5 die Constante $a = 0$, so erhält man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C, den Anfangspunkt im Mittelpunkt C und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0$$

Kreis in einem Beweis ist wenn das zu beweisende, mehr oder weniger versteckt, als bewiesen vorausgesetzt wird.

Kreis, Borda'acher, s. „Borda'scher Kreis".

Kreisabschnitt. Erklärung, s. „Kreis", No. 1. Formel für den Inhalt No. 11, Formel 24.

Kreisausschnitt. Erklärung, s. „Kreis", No. 1. Bezeichnet man den Centriwinkel mit α, die Länge des Bogens mit b, die Sehne mit s, so hat man den Inhalt des Ausschnitts $J =$

$$\frac{\alpha}{360^0}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}br = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{360^0}\cdot\left(\frac{\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Für $\alpha = 108^0\ 36'\ 13''$ wird der Ausschnitt durch die Sehne halbirt.

Kreisbewegung, s. „Centralbewegung".

Kreisbogen, s. „Kreis", No. 1 und die Formel No. 11, 20.

Kreisebene, s. „Kreis", No. 1 und die Formeln No. 11, 18 und 19.

Kreislinie, s. v. w. „Kreis"; Formel s. Kreis, No. 11, 14 und 15.

Kreisring und Ringstück, s. „Kreis", No. 11, 25 und 26.

Krümmung ist die Abweichung von der geraden Richtung und die Krümmung ist um so gröfser und um so kleiner, je

größer und je kleiner diese Abweichung ist.

Die Krümmung findet bei Linien und Flächen statt; eine Linie, die gekrümmt ist, heißt eine krumme Linie, eine Fläche, die gekrümmt ist, heißt eine krumme Fläche. Die Krümmung darf sich jedoch nicht auf einzelne Theile der Linie oder der Fläche beschränken, so daß andere Theile derselben gerade sind; der noch so kleinste Theil der Linie und der Fläche darf nicht gerade sein.

Linien, die nach einem Gesetz gekrümmt sind heißen Curven (s. d.); Flächen, die gekrümmt sind, kommen in der Geometrie nur als Oberflächen vor.

Das Maaß der Krümmung ist die Kreislinie (der Krümmungskreis) von größerem und von kleinerem Halbmesser (Krümmungshalbmesser). Denn man kann eine sehr kleine krumme Linie mit einem Kreisbogen vergleichen, wenn sie diesem so nahe kommt, daß weder eine anders gekrümmte Linie noch ein Kreisbogen von kleinerem Halbmesser zwischen beide fallen kann, ohne daß er die eine oder die andere schneidet.

Je kleiner der Halbmesser des Krümmungskreises ist, desto größer, und je größer der Halbmesser, desto kleiner ist die Krümmung.

Der Krümmungsgrad einer Fläche wird in den Krümmungen von Durchschnittslinien gemessen, die durch dieselben in geraden Richtungen genommen werden.

Krümmungshalbmesser, s. d. vorigen und den folgenden Artikel.

Krümmungskreis ist in der Curvenlehre ein sehr wichtiges Mittel für die Untersuchung der Curven in bestimmten Punkten nach verschiedenen Eigenschaften hin. Wie derselbe dadurch gefunden wird, daß man seinen Halbmesser bestimmt s. „Curvenlehre" II., pag. 186. Die Curve, in welcher die Mittelpunkte der Krümmungskreise aller auf einander folgenden Curvenpunkte liegen, heißt die Curve der Mittelpunkte. Wie diese gefunden wird, zeigt der Art. „Curvenlehre" III. pag. 188; desgleichen die nächste Anwendung davon auf die Ermittelung von Wende- und Rückkehrpunkten dieselbe pag. No. IV.

Krumm ist nicht gerade. S. d. Art. „Krümmung".

Krumme Linien, Flächen, die nach einem Gesetz gekrümmt sind. S. die Art. „Curven" und „Curvenlehre".

Krummzapfen ist eine mechanische Vorrichtung, durch welche man vermöge einer um eine feste aber um ihre Axe drehbare Welle in Kreisbewegung befindlichen Kraft eine Last mittelst einer Lenkstange in hin und her gehende geradlinige Bewegung versetzt.

1. Ist (Fig. 785) C der Mittelpunkt der Welle und des Krummzapfens, CA die augenblickliche Lage des daran befestigten Arms, dessen Endpunkt A die Warze, an dieser die Lenkstange AB und an dieser wieder die gerade auf den Mittelpunkt C gerichtete Lastzugstange angebracht Ferner Q die Last, welche nach der Richtung BD, und Q' die Last, welche nach der Richtung DB widersteht, die Kraft, welche fortdauernd auf die Warze wirkt, und zwar in jedem Punkt des Kreises nach der Tangente gerichtet beim

Fig. 785.

Heruntergang, wenn die Last Q zu überwinden ist $= P$ und beim Hinanfgang zu Ueberwindung der Last $Q' = P'$. Dann legen P und P' jede den Umfang des Halbkreises als Weg zurück, wenn Q und Q' jede den Durchmesser durchläuft.

Berücksichtigt man keine Nebenhindernisse, so ist nach dem Cartesischen Princip: „Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die zu gleicher Zeit von ihnen zurückgelegten Wege".

$$P : Q = 2AC : \pi \cdot AC$$

woraus

$$P = \frac{2}{\pi} Q$$

desgleichen $P' : Q' = 2AC : \pi \cdot AC$

woraus $\qquad P' = \frac{2}{\pi} Q'$

So dafs die für die Bewegung der Lasten $Q + Q'$ die Kraft, welche fortdauernd thätig sein mufs

$$\frac{P + P'}{2} = \frac{Q + Q'}{\pi}$$

und das mechanische Moment dieser permanent erforderlichen Kraft, wenn v die Geschwindigkeit der Lasten Q und Q' bedeutet:

$$\frac{\pi}{2} v (P + P') = v (Q + Q')$$

2. Aufser dieser reinen Kraft und der reinen Last sind aber noch mehrere Nebenumstände vorhanden, welche als Widerstand Kraftzuschufs erfordern. Es sind dies die Reibungen der Zapfen in den Lagern der Kurbelwelle, die ungleichförmige Geschwindigkeit der Kurbelwarze und der Zugstange, welche vom Maximo zum Minimo herab einen nachtheiligen Gang veranlassen, so dafs zur möglichsten Ausgleichung dieser Unregelmäfsigkeiten ein Schwungrad erforderlich ist, welches nun durch seine Last wieder die Reibung vermehrt.

Um nun die geeignete Untersuchung und eine diese Nebenhindernisse mit berücksichtigende Formel aufzufinden sei

die Länge AC des Krummzapfens $= r$

die Länge AB der Lenkstange $= l$.

Die Kraft in der Krummzapfenwarze, nach der Richtung der Tangente wirksam, sei unveränderlich $= P$.

Die oben gedachten nach BD und DB gerade auf C gerichteten Widerstände seien Q und Q'.

Die Masse aller in Bewegung befindlichen Maschinentheile von dem Angriffspunkt der Kraft in der Maschine bis in den Krummzapfen und auf diesen in A reducirt sei $= \mathfrak{P}$.

Die Masse, welche von der Lenkstange AB in Bewegung gesetzt wird und auf den Punkt B reducirt sei $= \mathfrak{Q}$.

In dem Augenblick, wo der Krummzapfen um den Winkel φ von dem senkrechten Stande CE ab sich gedreht hat und in CA sich befindet, sei die Geschwindigkeit der Warze $= v$.

Die Geschwindigkeit des Punkts B der Lenkstange in demselben Augenblick sei $= w$.

Der Winkel, den hier die Lenkstange AB mit der senkrechten Linie BD bildet, sei ψ.

Bezeichnet man die Spannung im Lenker AB mit S, so wird aufser dem senkrecht aufwärts wirkenden Widerstand noch ein waagerecht wirkender gebildet und man hat die senkrechte Seitenwirkung

$$S \cos \psi = Q \qquad (1)$$

woraus $\qquad S = \frac{Q}{\cos \psi} \qquad (2)$

Von der in A wirkenden Kraft P mufs nun ein Theil thätig sein, um diese Spannung hervorzubringen, während der andere Theil derselben zur Bewegung der trägen Massen wirksam bleibt. Nennt man den ersten Theil von $P = p$, so müssen p und $\frac{Q}{\cos \psi}$ mit einander im Gleichgewicht sein, beide müssen also gleiche statische Momente haben. Der Hebelsarm von $\frac{Q}{\cos \psi}$ nach der Richtung AB thätig ist $= CK = r \sin CAK = r \sin (\varphi + \psi)$.

Man hat also

$$pr = \frac{Q}{\cos \psi} \cdot r \sin (\varphi + \psi) \qquad (3)$$

woraus $\qquad p = Q \cdot \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} \qquad (4)$

Mithin ist der zweite für die trägen Massen thätige Theil von $P =$

$$p' = P - p = P - Q \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} \qquad (5)$$

3. Wenngleich P selbst in der Rundbewegung als unveränderlich festgestellt ist, so ist aus den beiden Formeln zu ersehen, dafs die beiden Theile von P, in welche die Kraft P auf naturgemäfsem Wege zertheilt wird, jede einzeln für sich, veränderlich sind, indem sie von den veränderlichen Winkeln φ und ψ abhangen und dafs sich beide in jedem Augenblick zu der unveränderlichen Kraft P gegenseitig ergänzen.

Es ist daher die Bewegung des Krummzapfens eine ungleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung und es finden daher auch die Formeln dafür ihre Anwendung.

Bd. I., pag. 358, Formel 10 ist $G = \frac{1}{2} C \cdot \frac{\partial C}{\partial S}$

Bezeichnet man mit P die Kraft, mit M die Masse, so ist $G = g \cdot \frac{P}{M}$, die Geschwindigkeit C an dem Punkt B nach DB ist hier w, und s bleibe der Weg, der von Anfang der Bewegung an zurückgelegt worden ist, so hat man für den vorliegenden Fall, wenn man noch $\mathfrak{Q}$ für M setzt, die in B abwärts wir-

kende Kraft, wenn der Krummzapfen in A gekommen ist

$$= \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \mathfrak{Q} \tag{6}$$

und diese nach der Richtnng BA der Lenkstange redncirt

$$= \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g \cos\psi} \cdot \mathfrak{Q} \tag{7}$$

mithin nach der Richtnng AP der Krummzapfenbahn normal CA gerichtet

$$\frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \mathfrak{Q} \tag{8}$$

Bezeichnet man den Weg der Krummzapfenwarze während derselben Zeit, also den Bogen EA mit X, so hat man nach demselben Gesetz zn Ueberwindnng der trägen Masse $\mathfrak{P}$:

$$\frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P} \tag{9}$$

Mithin nach Gl. 5, 8 und 9 die für Ueberwindnng der Widerstände $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in A erforderliche Kraft

$$p' = \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \mathfrak{Q} + \frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P}$$

oder

$$P - \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot Q = \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \mathfrak{Q} + \frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P} \tag{10}$$

weiches die Fnndamentalgieichnng für die Bewegung des Krummzapfens ist.

4. Um diese Differenzialgleichnng integriren sn können müssen aile einzeinen Differenziale anf dieseibe Unveränderliche bezogen werden. Der trigonometrischen Fnnctionen wegen ist es am zweckmäfsigsten den Winkel φ als solche anzunehmen.

Zuerst ist $AE = x = r\varphi$

hieraus $r = \frac{x}{\varphi}$ und $\partial x = r\partial\varphi$ oder $\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r$

folglich $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi}$ (11)

Der von der Zngstange BD znrückgelegte Weg s ist $= AB + AC - BC$. Denn beim Beginn der Bewegnng war die Warze A in E, der Pnnkt B also in dem Abstand $AC + AB$ von C und gegenwärtig in der Entfernnng BC.

Mithin $s = l + r - (l\cos\psi + r\cos\varphi)$ (12)

Hieraus $\frac{\partial s}{\partial\varphi} = + l\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + r\sin\varphi$ (13)

Ans dem $\triangle ABC$ ist aber zngleich:

$$AB : AC = \sin\varphi : \sin\psi$$

oder $l : r = \sin\varphi : \sin\psi$

worans $\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$

und $\cos\psi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l}\cos\varphi$

worans

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \tag{14}$$

Diesen Werth in Formei 13 snbstituirt gibt

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi} = r \cdot \frac{\sin\psi \cdot \cos\varphi}{\cos\psi} + r\sin\varphi$$

oder $\frac{\partial s}{\partial\varphi} = r \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$

worans

$$\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi} \tag{15}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi} \cdot \frac{\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)} \tag{16}$$

Snbstitnirt man nnn ans den Formeln 11, 15, 16 die Werthe in die Gieichnng 10, so erhält man

$$P - \frac{Q}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{w}{2gr} \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi} \mathfrak{Q} + \frac{v}{2gr} \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \mathfrak{P}$$

oder

$$4gr\left(P - \frac{Q}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi}\right) = 2w \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi} \mathfrak{Q} + 2v \frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \mathfrak{P}$$

Diese Gleichnng integrirt gibt

$$4gr\left(P\varphi - \frac{Q}{r} s\right) = w^2\mathfrak{Q} + v^2\mathfrak{P} + \text{Const.} \tag{17}$$

Um die Constante bestimmen zu können, setze die Geschwindigkeit der Warze

in dem obersten Punkt $E = c$, so ist zugleich $\varphi = 0$, $w = 0$, der Weg s, den die Zugstange schon zurück gelegt hat, $s = 0$ und man hat die Gleichung

$$0 = c^2\mathfrak{P} + C$$

woraus $\quad C = -c^2\mathfrak{P}$

daher die Integralgleichung vollständig

$$4gr\left(P\varphi - \frac{Q}{r}s\right) = w^2\mathfrak{Q} + (v^2 - c^2)\mathfrak{P} \quad (18)$$

5. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Warze, wenn sie von E über A, H nach G gekommen ist, mit c_1, so ist $\varphi = \pi$, $s = 2r$, $w = 0$, und man hat aus Formel 18

$$4gr(\pi P - 2Q) = +(c_1^2 - c^2)\mathfrak{P} \quad (19)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung für die abwärts gerichtete Bewegung allein.

Aus der für beide Bewegungsrichtungen geltenden Gleichung 18 ist auch die Gleichung für die aufwärts von G über F nach E gehende Bewegung des Krummzapfens zu finden, wenn man mit φ' den Bogen bezeichnet, der von G aus beschrieben wird, statt Q den Widerstand Q' statt s den Weg s' des aufsteigenden Gatters, statt v die Geschwindigkeit v', statt c in E die Geschwindigkeit c_1 in G und statt w die Geschwindigkeit w, des Gatters setzt. Dann erhält man

$$4gr\left(P\varphi' - \frac{Q'}{r}\cdot s'\right) = w_1^2\mathfrak{Q} + (v_1^2 - c_1^2)\mathfrak{P} \quad (20)$$

und bezeichnet man mit c_2 die Geschwindigkeit der Warze, wenn sie wieder in E gekommen ist, so hat man

$$4gr(\pi P - 2Q') = (c_2^2 - c_1^2)\mathfrak{P} \quad (21)$$

6. Soll nun die Maschine im Beharrungsstande bleiben, so muſs die Geschwindigkeit c_2 mit welcher die Warze wieder in E ankommt, der Geschwindigkeit c mit der sie in E die Bewegung begonnen hat, gleich sein. Denn wäre $c_2 < c$, so würde die Maschine immer langsamer im Gange werden und zum Stillstande kommen und würde $c_2 > c$, so würde sie immer schneller laufen. Setzt man demnach $c_2 = c$ so hat man, Gleichung 19 und 21 mit einander addirt

$$8gr[\pi P - (Q + Q')] = 0$$

woraus $\quad \pi P = Q + Q'$

also $\quad P = \dfrac{Q + Q'}{\pi} \quad (22)$

7. Um das Gesetz der Bewegung für alle Werthe von φ in Beziehung auf v aus Gleichung 18 bestimmen zu können, ist es erforderlich, die darin vorkommende Geschwindigkeit w der Zugstange durch v auszudrücken. Man betrachte daher den Bogen φ als eine Function der Zeit t, welche während des Weges φ von A aus verflossen ist, so sind eben so die Geschwindigkeiten v und w und die Wege x und s Functionen von t, weil sie Functionen von φ sind.

Da aber die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte und verzögerte ist, so hat man, wie für die Formeln zu No. 3 von 6 ab nach Bd. I, pag. 358, Formel 1.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}$$

Nun ist $\quad x(EA) = r\varphi$

mithin $\quad \dfrac{\partial x}{\partial t} = r\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

folglich $\quad v = r\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (23)$

Eben so ist $\quad w = \dfrac{\partial s}{\partial t} \quad (24)$

Aber aus Gleichung 12

$$s = l + r - l\cos\psi - r\cos\varphi \quad (25)$$

mithin

$$\frac{\partial s}{\partial t} = +l\sin\psi\frac{\partial \psi}{\partial t} + r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ferner ist (s. zwischen Gleichung 13 und 14)

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$$

Daher diese Gleichung differenzirt

$$\cos\psi\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{r}{l}\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

woraus $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \dfrac{r}{l}\cdot\dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

Diesen Werth in die Gleichung für $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ gesetzt, gibt nach Reduction

$$w = \frac{\partial s}{\partial t} = r\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (26)$$

Diese Gleichung durch Gleichung 23 dividirt gibt

$$\frac{w}{v} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}$$

woraus $\quad w = v\cdot\dfrac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi} \quad (27)$

Setzt man nun in die Bedingungsgleichung 18 für die Bewegung des Krummzapfens die Werthe von s und w aus Gleichung 25 und 27 so erhält man

$$4gr\left[P\varphi - \frac{Q}{r}(l + r - l\cos\varphi - r\cos\varphi)\right] = (v^2 - c^2)\mathfrak{P} + \frac{\sin^2(\varphi + \psi)}{\cos^2\psi}v^2\mathfrak{Q}$$

Hieraus v entwickelt

$$v^2 = \frac{4gr\left[P\varphi - Q\left(1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}\left[1 - \cos\psi\right]\right)\right] + c^2\,\mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + \frac{\sin^2(\varphi+\psi)}{\cos^2\psi}\,\Omega} \qquad (28)$$

Das erste Glied des Zählers ist ein Product, die Klammergröfse desselben eine Differenz und die Bewegung des Krummzapfens von E bis G kann nur dann statt finden, wenn die Differenz nämlich

$$P\varphi - Q\left[1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}(1 - \cos\psi)\right] \qquad (29)$$

für keinen Werth von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ selbst einen so grofsen negativen Werth erhält, dafs der ganze Zähler negativ oder 0 wird.

8. Um nun die Bedingungen aufzufinden, nach welchen der Zähler immer gröfser als Null bleibt, hat man den Werth von φ zu bestimmen, bei welchem die Differenz 29, der allein veränderliche Theil des Zählers ein Minimum wird.

Setzt man die Differenz $29 = z$, so hat man daraus

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = P - Q\left(\sin\varphi + \frac{l}{r}\sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$

Nun ist Formel 14: $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$

Mithin

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\varphi} &= P - Q\left(\sin\varphi + \sin\psi\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)\\ \text{oder}\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} &= P - Q\,\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Für's Maximum und Minimum hat man

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$$

woraus

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = \sin\varphi + \sin\psi\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \sin\varphi + \sin\psi\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\psi}} \qquad (31)$$

Den oben ermittelten Werth für $\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$ gesetzt, gibt

$$\frac{P}{Q} = \sin\varphi\left[1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\right] = \sin\varphi\left[1 + \sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi}{\frac{l^2}{r^2} - \sin^2\varphi}}\right] \qquad (32)$$

Hieraus entsteht eine unreine cubische Gleichung, welche zum Probiren, auch wenn man das zweite Glied fortschafft, wenig geeignet ist. Nämlich

$$\sin^4\varphi + \frac{\frac{l^2-r^2}{r^2}Q^2 - P^2}{2PQ}\sin^2\varphi - \frac{l^2}{r^2}\sin\varphi + \frac{l^2P}{2r^2Q} = 0 \qquad (33)$$

Zweckmäfsiger ist es, die aus Formel 30 entwickelte Gleichung

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

dazu zu benutzen.

9. In dem von mir verfafsten Aufsatz „die vortheilhafteste Einrichtung von Sägemühlen" in Försters allgemeiner Bauzeitung, 1846, pag. 141 ist durch Berechnung ermittelt worden, dafs ohne Berücksichtigung der ad 2 dieses Artikels gedachten Nebenhindernisse das mechanische Moment der Last Q beim Niedergang des Krummzapfens und bei mittlerer Geschwindigkeit von 4 Fufs beträgt 12,914 Pferdekraft zu 500 (Pfund × Fufs).

Der Widerstand Q' beim Aufgang des Krummzapfens bei 4 Fufs Geschwindigkeit = 1,744 Pferdekraft.

$Q + Q'$ also in Summa 14,658 Pferdekraft.

Demnach beträgt $Q = \frac{12{,}914 \times 500}{4}$ = 1614,25 Pfund.

Und nach Formel 22

$$P = \frac{Q + Q'}{\pi} = \frac{14{,}658 \times 500}{4\pi} = 583{,}2223 \text{ Pfd.}$$

10. Setzt man nun vorläufig den $\angle\psi$ der Lenkstange mit der Schubstange, welcher bei möglichst langer Lenkstange nur sehr klein ist, $= 0$, so hat man für's Maximum und Minimum aus Gleichung 31

$$\sin\varphi = \frac{P}{Q} \qquad (34)$$

und es entsprechen zwei Bogen φ zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ belegen, der Be-

dingnng, dafs sich beide zu π ergänzen, dergestalt, dafs wenn der eine Bogen $\frac{\pi}{2} - \beta$ gesetzt wird, der andere $= \frac{\pi}{2} + \beta$ wird.

Geht man nnn zurück anf das Differenzial, Formel 30

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = P - Q\left(\sin\varphi + \sin\psi \frac{\cos\varphi}{\cos x}\right)$$

so wird dies für $\psi = 0$

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = P - Q \sin\varphi$$

und $\frac{\partial^2 s}{(\partial\varphi)^2} = -Q\cos\varphi$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ hat man dies zweite Differenzial

$$\frac{\partial^2 s}{(\partial\varphi)^2} = -Q\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -Q\sin\beta$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta$ hat man es

$$\frac{\partial^2 s}{(\partial\varphi)^2} = -q\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = +Q\sin\beta$$

Ans diesen beiden zweiten Differenzialen geht hervor, dafs für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ ein Maximnm nnd für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta$ ein Minimnm entsteht, nnd folglich hat man anch bei Berücksichtignng von ψ für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ein Maximnm nnd für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ein Minimnm als Werth der obigen Differenz.

11. Aus No. 9 nnd Formel 34 hat man näherungsweise

$$\sin\varphi = \frac{583,22}{1614,25}$$

worans $\log\sin\varphi = 9,5578616 - 10$

Für's Minimum ist hiernach
$\varphi = 180° - 21° 10' 47'' = 158° 49' 13''$

Nach Formel ist aber anch

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi} \qquad (35)$$

mithin also auch

$$\log\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi} = 9,557\,8616 - 10 \qquad (36)$$

Nnn hat man, um das richtige Minimum zn erhalten, anch das zn dem Winkel φ gehörige ψ mit in Rechnnng zn bringen nnd dies ist nicht anders möglich als dnrch Probiren. Nnn hat man No. 4 gefnnden

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$$

und wenn man annimmt, dafs der Knrbelarm r zu der Lenkstange l wie 1 : 6 sich verhält: $\sin\psi = \frac{1}{6}\sin\varphi$, so hat man die logarithmische Gleichnng

$$\log\sin\psi = \log\sin\varphi - \log 6 \qquad (37)$$

Nun schreibe man für den Versnch die vorletzte Logarithmengleichnng

$$\log\sin(\varphi - \psi) = 9,557\,8616 - 10 + \log\cos\psi \qquad (38)$$

Setze für den ersten Versnch $\psi = 0$, mithin $\cos\psi = 1$ und $\log\cos\psi = 0$, so hat man ans der letzten Gleichnng

$\log\sin\varphi =$ 9,557 8616 − 10
Hiervon (wegen Gleichnng 37) $\log 6 =$ 0,778 1513
Gibt $\log\sin\psi$ 8,779 7103 − 10
worans $\psi = 3° 27' 10''$

Hieran den folgenden Näherungsversnch angeknüpft in Folge von Gleichnng 38:

$\log\cos\psi = \log\cos 3° 27' 10''$ 9,999 2109 − 10
Hierzn den ersten Snmmand (Gl. 38) 9,557 8616 − 10
Gibt $\log\sin(\varphi + \psi)$ 0,557 0725 − 10
woraus $\varphi + \psi = 21° 8' 22''$ nnd $158° 51' 38''$
hiervon ab ψ $3° 27' 10''$
bleibt φ $155° 24' 28''$

Für den zweiten Annäherungsversuch hat man nnn den Supplementswinkel $\varphi = 24° 35' 32''$.

Von dem $\sin 24° 35' 32''$ den $\log$ genommen, $\log 6$ abgezogen gibt

$\log\sin\psi$ und hieraus $\psi = 3° 58' 38''$ u. s. w.

Endlich erhält man für $\varphi = 154° 48' 28\frac{1}{4}''$
das augehörige $\psi = 4° 4' 4\frac{1}{2}''$

Hierans $\varphi + \psi =$ 158° 52' 33"
$\pi - (\varphi + \psi) =$ 21° 7' 27"
$\log \sin (\varphi + \psi) = 9{,}556\,7730 - 10$
$\log \cos \psi = 9{,}998\,9045 - 10$
Differenz $= 9{,}557\,8685 - 10$

welches gegen den Gleichnng 36 gegebenen Logarithmns nnr in den beiden letzten Decimalstellen differirt. Das Minimnm des veränderlichen Zählers in der Bedingungsgleichnng 28 findet also statt bei

$$\varphi = 154° 48' 28\tfrac{1}{2}''$$
$$\psi = 4° 4' 4\tfrac{1}{2}''$$

In der veränderlichen Klammergrösse, Gl. 28 ist nnn

$P =$ 583,2223 Pfd.

$$\varphi = \frac{154° 48' 28\frac{1}{2}''}{180°} \cdot \pi = 2{,}7018$$

Hieraus

$P\varphi =$ 1576,7500 Pfd.
$\cos \psi = \cos 4° 4' 4\frac{1}{2}''$ $= 0{,}99748$
$1 - \cos \psi =$ 0,00252
$\frac{l}{r} =$ 6

hierans $\frac{l}{r}(1 - \cos \psi)$ $= 0{,}01512$
$-\cos \varphi =$ + 0,90488
$1 =$ 1
Summa 1,92000
$Q =$ 1614,25

mithin

$1{,}92 \times Q =$ 3099,36

folglich die Klammergrösse

$$P\varphi - Q\left[1 - \cos \varphi + \frac{l}{r}(1 - \cos \psi)\right]$$
$$= 1576{,}75 - 3099{,}36 = -1522{,}61$$

12. Die Bewegung der Maschine ist demnach für die ersten beiden Qnadranten aufser allem Zweifel gesetzt, wenn

$$4gr \times 1522{,}61 < c^2\mathfrak{P}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit In *BD* ist = 4 Fufs festgesetzt (s. No. 9); die Geschwindigkeit der Warze im Mittel $4 \cdot \frac{1}{2}\pi = 2\pi$. Nimmt man demnach die Geschwindigkeit c nur = dieser mittleren Geschwindigkeit $2\pi = 6{,}2832$ Fufs, $r = 7$ Zoll $= \frac{7}{12}$ Fnfs, nnd da $g = 15\frac{5}{8}$ Fnfs, so hat man die Bedingung: $P > 1406$ Pfund.

Diese Bedingung aber genügt nicht für die Praxis, der Unterschied zwischen dem natürlichen Maximum nnd dem natürlichen Minimnm während der Bewegung des Krummzapfens darf höchstens $\frac{1}{10}$ der mittleren Geschwindigkeit sein.

13. Es ist also der Winkel φ für das Maximum des Zählers zn bestimmen.

Aus den zweiten Differenzialen von z, No. 10 ist für's Maximum der Differenz im Zähler erkannt, dafs $\varphi <$ als $\frac{1}{2}\pi$ sein mnfs. Nimmt man zum ersten Versuch denselben für's Minimnm,

Nämlich $\varphi + \psi = 21°$ 8' 22"
hiervon ψ = 3° 27' 10"
bleibt φ = 17° 41' 12"
Hiernach $\log \sin \varphi$ = 9,482 6040 − 10
hiervon $\log 6$ = 0,778 1513
bleibt $\log \sin \psi$ = 8,704 4527 − 10
hierans ist ψ = 2° 54' 9"
Hierzu φ = 17° 41' 12"
gibt $\varphi + \psi$ = 20° 35' 21"

Fährt man so fort, so erhält man für's Maximnm der Differenz des Zählers Formel 28

$$\psi = 2° 58' 45{,}3''$$
$$\varphi = 18° 10' 13{,}75''$$

Nnn ist $P =$ 583,2223 Pfd.

$$\varphi = \frac{18° 10' 13{,}75''}{180°} \cdot \pi = 0{,}3173$$

also $P\varphi =$ 185,05643
$\cos \varphi =$ 0,99865

daher

$1 - \cos \varphi =$ 0,00135
$\frac{l}{r} =$ 6

daher

$\frac{l}{r}(1 - \cos \varphi) =$ 0,00810
$-\cos \varphi =$ − 0,95013

daher

$1 - \cos \varphi =$ 0,05797
$Q =$ 1614,25

also $0{,}05797 \times 1614{,}25 =$ 93,57807

Mithin

$$P\varphi - Q\left[1 - \cos \varphi + \frac{l}{r}(1 - \cos \psi)\right]$$
$$= +278{,}6345$$

14. In der Bedingungsformel 28 ist der Nenner ebenfalls eine veränderliche Gröfse nnd demnach wären mit dem Maximnm nnd Minimnm des Zählers nicht auch für v diese der Fall. Dagegen ist nach Formel 31 gerade für's Maximnm nnd Minimnm $\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} = \frac{P}{Q}$ also constant, nnd man kann den Zähler schreiben:

$$\mathfrak{P} + \left(\frac{P}{Q}\right)^2 \mathfrak{Q}$$

Demnach hat man Formel 28 zu schreiben

$$v^2 = \frac{4gr\left[P\varphi - Q\left(1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}[1 - \cos\psi]\right)\right] + c^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + \left(\frac{P}{Q}\right)^2 \cdot \mathfrak{Q}}$$

Nun ist die Klammergröfse des Zählers (s. No. 11 und 13)

für's Minimum $= - 1552{,}61$

für's Maximum $= + \ 278{,}6345$

c ist nach No. 12 $= 2\pi = 6{,}2832$

$\left(\frac{P}{Q}\right)^2$ ist nach No. 13 $= \left(\frac{583{,}2223}{1614{,}25}\right)^2 = 0{,}13054$

$\mathfrak{Q}$ kann bei der Sägemühle 200 Pfund betragen.

Demnach ist für's Minimum

$$v_n^2 = \frac{-4 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} \cdot 1552{,}61 + 6{,}2832^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 0{,}13054 \times 200} = \frac{-55511{,}82 + 39{,}4786 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 26{,}108}$$

für's Maximum

$$v_x^2 = \frac{4 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} \cdot 278{,}6345 + 6{,}2832^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 0{,}13054 \times 200} = \frac{10158{,}55 + 39{,}4786 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 26{,}108}$$

15. Man ersieht, dafs bei den übrigen durch Zahlen festgestellten Gröfsen die Geschwindigkeiten nur noch von der Gröfse $\mathfrak{P}$ der Masse abhangen, welche von der Krummzapfenwarze ab durch die Maschine bis zum Angriffspunkt der bewegenden Kraft hin vorhanden und vertheilt sind. Bei der oben gedachten Sägemühle ist $\mathfrak{P}$ auf 1406 Pfund im Minimo berechnet, nämlich in der Art, dafs v im Minimo gerade = 0 wird. Bei jeder Erhöhung von $\mathfrak{P}$ erhält v einen positiven Werth.

Bei $\mathfrak{P} = 1406$ erhält man also

$v\,(v_n)$ im Minimo $= 0$

$v\,(v_x)$ im Maximo $= 6{,}7$ Fufs.

Es sind nun diese Geschwindigkeiten in der Praxis nicht anwendbar; man ersieht aber aus den Formeln für v_n und v_x, dafs durch Vergröfserung von $\mathfrak{P}$ v_n zunimmt und v_x abnimmt. Augenscheinlich hat man dies, wenn man den gegen $\mathfrak{P}$ sehr geringen Summand 26,108 im Nenner fortläfst. Dann entsteht

$$v_n = -\frac{55511{,}82}{\mathfrak{P}} + 39{,}4786 \text{ und } v_x = +\frac{10158{,}55}{\mathfrak{P}} + 39{,}4786$$

Es ist daher möglich, für jeden beliebigen Unterschied $v_x - v_n$ (nur für $v_x = v_n$ nicht) die Gröfse von $\mathfrak{P}$ zu finden. Bei Maschinen soll nach No. 12 der Unterschied nur $\frac{1}{20}$ der mittleren Geschwindigkeit betragen; d. h. in diesem Falle

$$v_x - v_n = \frac{6{,}2832}{20} = 0{,}31416 \text{ Fufs.}$$

Nun ist zugleich

$$v_x^2 - v_n^2 = \frac{65670{,}37}{\mathfrak{P} + 26{,}108} \text{ Quadratfufs}$$

Die zweite Gleichung durch die erste dividirt gibt

$$v_x + v_n = \frac{212217{,}88}{\mathfrak{P} + 26{,}108} \text{ Fufs.}$$

Es ist aber

$v_x + v_n = 2 \times 6{,}2832 = 12{,}5664$ Fufs.

Hieraus $\mathfrak{P} = 16861{,}6$ Pfund.

16. **Hiermit ist gezeigt, wie man die Gröfse der Schwungmasse für eine auszuführende Maschine findet, wenn diese durch einen Krummzapfen betrieben werden soll.**

Hat man in dem vorliegenden speciellen Fall die schon vorhandene Masse $\mathfrak{P}$ berechnet, so ist das erforderliche Gewicht der auf die Warze A, den Angriffspunkt der Kraft, noch einzubringenden Schwungmasse $= 16861{,}6 - \mathfrak{P}$ Pfund.

Die einer Maschine noch erforderliche Masse wird in den bei Weitem meisten Fällen als Schwungring an Armen, Schwungrad genannt, eingerichtet und zwar dem Angriffspunkt A der Kraft möglichst nahe, also auf der Kurbelwelle C. Die Reduction in Betreff der verschiede-

nen Halbmesser geschieht nach dem Verhältnifs deren Quadrate. Ist 𝔓 die als Schwungring anzubringende Masse, der Halbmesser des Ringes = R, der Halbmesser AC des Kurbelarms = r, so ist die in A erforderliche Masse 𝔓 als Schwungring angebracht = $\frac{r^2}{R^2} \cdot$ 𝔓.

In der vorstehend zu Grunde gelegten Sägemühle ist die überhaupt in A erforderliche Masse 16861,6 Pfund, die in den Maschinentheilen vom Wasserrade ab bis zum Punkt A befindliche Masse ist ermittelt 5194,6 Pfund, also ist die in A noch hinzuzufügende Masse 11667 Pfund. Der Kurbelarm beträgt 7 Zoll, der äufsere Halbmesser des Schwungringes 30 Zoll, der innere 25 Zoll, folglich ist die erforderliche Masse im Schwungringe

$$= \frac{7^2}{\frac{1}{2}(30^2 + 25^2)} \cdot 11667 = 749 \text{ Pfund.}$$

Beim Anfange der Warze aus dem untersten Punkt über F nach E ist ziemlich Leergang; die Kraft P wirkt gleichförmig, mithin mufs die Geschwindigkeit von G über F nach E immer schneller gehen und es kann in diesen beiden Quadranten, dem dritten und dem vierten, weder ein Maximum noch ein Minimum entstehen. Es ist aus diesem Grunde mit dem ersten und dem zweiten Quadranten die Untersuchung über die Theorie des Krummzapfens geschlossen.

Krystalle sind regelmäfsig gebildete Fossilien, die immer von geradlinig begrenzten Ebenen umschlossen sind. Deren Kenntnifs bildet eine eigene Wissenschaft: die Krystallographie.

Man hat sich die Krystalle, wie das Eis beim Gefrieren aus Wasser, aus fossilen Flüssigkeiten durch Wärme-Entziehung entstanden zu denken, so wie noch heut Krystalle aus künstlich concentrirten Laugen durch Abkühlung hervorgebracht werden.

Je nach der chemischen Beschaffenheit des Fossils geschieht die geradlinige Bildung des Krystalls, wie man diese bei der Eisbildung beobachten kann, nach verschieden gelegenen Axenrichtungen, um die sich Flächen gruppiren und an Zahl, Form und Dimensionen verschiedenen Begrenzungsebenen (Flächen). Diese Flächen sind entweder alle congruent (gleich) oder paarweise gleich und so gegen einander gruppirt, dafs durch Ebenen, in gewissen Richtungen genommen, der Krystall in zwei congruente oder symmetrisch gleiche Körper getheilt werden kann.

Die Umfassungswinkel der Flächen (Flächenwinkel) und die Kanten je zweier zusammenstofsenden Flächen sind scharf ausgebildet, die Flächen selbst meist glatt, oft glänzend und der Krystall nach den Richtungen der Flächen in ebenen Flächen spaltbar, was in der oben gedachten Bildungsweise seinen Grund hat.

Fossilien, welche die Gestalt eines Krystalls angenommen haben, heifsen krystallinisch, krystallisirt; sie besitzen die Eigenschaft der Spaltbarkeit in geraden glatten Flächen, es fehlt ihnen aber die äufsere Krystallgestallt, was jenenfalls in mechanischen Natur-Einwirkungen liegt, denen der ursprünglich als Krystall bestandene Körper von Aufsen nach Innen unterworfen gewesen ist. Unkrystallinisch heifsen Fossilien, die weder eine äufsere Krystallgestalt noch Spaltbarkeit in geraden Flächen besitzen.

Krystalldruse ist eine unregelmäfsige Krystallbildung, die darin besteht, dafs mehrere Krystalle auf einer gemeinschaftlichen Unterlage zusammengewachsen sind.

Krystallgruppe bildet eine Anzahl von frei ausgewachsenen Krystallen, wenn sie neben einander liegen, so dafs sie sich gegenseitig unterstützen.

Krystallisationssystem ist für die Krystallographie das, was das System in jeder anderen Wissenschaft ist: die der Natur deren Gegenstände angemessene Eintheilung und Zusammenstellung der Lehren darüber zu deren möglichst genauer und umfassender Kenntnifsnahme.

Die Krystallographie hat die gröfste Verwandtschaft mit der Stereometrie, der Lehre von den begrenzten körperlichen Räumen und deren Theile in Lage und Gröfse. Bei der Krystallographie kommt noch der Stoff mit seinen physikalischen Eigenschaften hinzu, von dem die Stereometrie ganz absieht. In Betreff der Körperformen ist zwischen beiden Wissenschaften der Unterschied, dafs die Stereometrie die Formen aus der Vernunft selbstständig construirt, während die Krystallographie nur die Körper von denjenigen Formen betrachtet, die in den von der Natur uns gegebenen Krystallen wirklich dargeboten werden.

Die Krystalle sind nur solche Fossilien, die von ebenen geradlinig begrenzten Flächen symmetrisch begrenzt werden und deren Massentheile durch und durch gerade und ebenflächig angeordnet sind. Die Krystallographie schliefst also alle runden Körper, die Kugel, das Ellipsoid, ebene Körper mit Wölbungen u. s. w.

aus. Ferner lassen sich offenbar unzählige solcher Körper mit unzähligen inneren Massen-Anordnungen denken; dagegen ist die Krystallographie eine Naturwissenschaft und nimmt nur, wie eben erwähnt, diejenigen Formen in ihre Wissenschaft auf, welche in den Krystallen von der Natur gegeben sind.

Zu diesen gehören die in der Stereometrie bekannten regelmäfsigen Polyeder; aber auch Polyeder mit symmetrisch angeordneten Oberflächen, welche die Stereometrie nicht betrachtet.

Der allgemein durchgreifende Character der Krystallformen ist der des denkbaren Vorhandenseins von Axen, symmetrisch zu einander liegenden Körperdiagonalen; und wie die Stereometrie ihr Lehrsystem nach den in der Planimetrie vorkommenden Ebenen als Körperbegrenzungen aufstellt und Prismen, Pyramiden, ferner die Umdrehungskörper, den Cylinder, den Kegel und endlich die Kugel betrachtet, so hat die Krystallographie Axensysteme. (S. die Art.: „Axensysteme der Krystalle, Basis der Krystalle, Flächen eines Krystalls, Kanten“ u. s. w., in welchen das hierher gehörige Wissenswürdigste angegeben ist.

Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche die Eigenschaft hat, dafs alle Punkte derselben von einem innerhalb des Körpers befindlichen Punkt einerlei Abstand haben. Die Begrenzungsfläche heifst Kugelfläche, jener innere Punkt der Mittelpunkt der Kugel. Jede gerade Verbindungslinie des Mittelpunkts mit irgend einem Punkt der Oberfläche heifst der Halbmesser, Radius der Kugel. Jede durch den Mittelpunkt geführte Verbindungslinie zweier Punkte der Oberfläche ist ein Durchmesser, Diameter der Kugel.

I. Oberflächenbestimmung.

2. Der Durchschnitt der Kugelfläche mit einer Ebene ist ein Kreis.

Es sei *ABGF* die Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt *C*, *ABE* eine Durchschnittsebene. Fälle das Loth *CD* auf die Ebene, ziehe von zwei beliebigen Punkten *A*, *E* des Umfangs nach *C* und *D* gerade Linien, so ist $AC = EC$, weil beide Halbmesser sind.

Nun ist $\angle CDA = \angle CDE = R$

$$CD = CD$$

daher $\triangle CDA \cong \triangle CDE$

woher $AD = ED$

Dasselbe gilt von allen übrigen in dem Umfang *ABE* liegenden Punkten, sie liegen also sämmtlich in gleichen Abständen $= AD = ED$ von *D*, mithin ist *ABE*

786.

eine Kreislinie und *D* deren Mittelpunkt.

3. Ebene Durchschnitte einer Kugel, die einen gleichen Abstand vom Mittelpunkt der Kugel haben, sind gleich.

Denn sind die Abstände *CD* und *CH* der beiden Durchschnitte *ABE* und *FGJ* einander gleich, so hat man noch $\angle CHF = \angle CDA = R$, $CF = CA$ also $\triangle CFH \cong CAD$ und hieraus $FH = AD$, mithin sind die beiden Kreislinien einander gleich.

4. Durchschnittsebenen in einem Kreise, die ungleiche Abstände vom Mittelpunkt der Kugel haben, sind ungleich, und zwar ist derjenige Durchschnitt der gröfsere, dessen Ebene dem Mittelpunkt näher liegt. Durchschnitte durch den Mittelpunkt der Kugel genommen sind einander gleich und gröfser als jeder andere durch die Kugel gelegte Kreisdurchschnitt.

Denn ist $CH < CD$, so ist noch $CF = CA$, $\angle CHF = \angle CDA = R$, mithin ist in den Dreiecken *CFH* und *CAD* die Seite $FH > AD$.

In jedem der bis hierher betrachteten aufserhalb des Mittelpunkts *C* liegenden Durchschnittskreise ist der Halbmesser kleiner als der Kugelhalbmesser. Mithin mufs der durch den Mittelpunkt gelegte Kreis von dem Halbmesser der Kugel der gröfste sein.

5. Erklärungen. A. Jeder durch den Mittelpunkt einer Kugel liegende Kreis heifst ein gröfster Kreis, jeder andere Durchschnittskreis heifst ein kleinerer Kreis; Durchschnittskreise einer Kugel, die ⧣ mit einander laufen, heifsen Parallelkreise. Derjenige Durchmesser, der auf einem System von Parallelkreisen normal steht, der also sämmtliche Mittelpunkte der Parallelkreise trifft, heifst

eine Axe der Kugel, die Endpunkte dieser Axe heifsen Pole des Kreises.

B. Der Theil der Kugeloberfläche, der von zwei halben gröfsten Kreisen begrenzt wird, heifst ein sphärisches Zweieck.

Der Theil der Kugeloberfläche, der von drei, vier u. s. fort mehreren Bogen gröfster Kreise begrenzt wird, heifst ein sphärisches Dreieck, Viereck u. s. f. sphärisches Vieleck.

Die Bogen, welche die Zweiecke, Dreiecke, ... Vielecke begrenzen, heifsen die Seiten der Zweiecke, Dreiecke u. s. w., und die Winkel, welche die Tangenten dieser Seiten in deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkt mit einander bilden, heifsen ihre Winkel.

C. Eine die Kugelfläche schneidende Ebene theilt dieselbe in zwei Theile, deren jede eine Calotte oder Zone mit einem Endkreise heifst. Der gröfste Abstand der Punkte einer Calotte von der Ebene ihres Endkreises heifst die Höhe der Calotte.

D. Der zwischen zwei Parallelkreisen begriffene Theil einer Kugeloberfläche heifst eine Zone mit zwei Endflächen oder Zone schlechthin; der Abstand beider Endebenen ist die Höhe der Zone.

E. Jede durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene theilt die Kugelfläche in zwei congruente Hälften; jede derselben heifst daher die Halbkugelfläche.

F. Eine Ebene, welche mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemein hat, heifst eine Berührungsebene der Kugel.

6. Zwei sphärische Zweiecke auf derselben Kugelfläche sind gleich, wenn ihre Winkel gleich sind, und überhaupt verhalten sich die Ebenen von Zweiecken auf derselben Kugel wie die ihnen zugehörigen Winkel.

Denn der Winkel eines Zweiecks ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen, in welchen die dasselbe einschliefsenden Halbkreise liegen. Bei gleichen Neigungswinkeln lassen sich also die beiden Ebenen des einen Zweiecks so auf die des anderen legen, dafs sie sich decken, wo dann auch alle Punkte der Zweiecke auf einander fallen müssen, weil sie alle von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Halbkreise gleichen Abstand haben. Hieraus folgt denn auch die zweite Behauptung aus dem Art. „Ebene", Satz 21, und dem Art. „Flächenwinkel".

7. Stehen die Ebenen zweier gröfsten Kreise einer Kugel auf einander normal, so bilden sie vier congruente Zweiecke auf der Kugelfläche, die zusammen diese Kugelfläche ausmachen, so dafs jedes dieser Zweiecke der vierte Theil der Kugelfläche ist. Nun ist der Winkel eines jeden Zweiecks $= R = 90^\circ$, jedes sphärische Zweieck ist aber derselbe aliquote Theil der ganzen Kugeloberfläche, der sein Winkel von 360° ist. Bezeichnet man also mit F den Inhalt des vierten Theils der Kugeloberfläche, mit f den Inhalt eines Zweiecks vom $\angle \alpha$, so ist

$$f = \frac{\alpha}{R}\, F = \frac{\alpha}{90^\circ}\, F.$$

8. Wenn man auf die Ebenen von 4 gleichen Zweiecken, Fig. 791, normal durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene $BGDE$ legt, so werden sämmtliche vier Zweiecke halbirt, und es entstehen acht gleiche sphärische Dreiecke, von welchen jedes drei Quadranten zu Seiten und drei rechte Winkel hat, und jedes hat zur Oberfläche $\frac{1}{2}$ der ganzen Kugeloberfläche.

Läfst man zwei Ebenen $BGDE$ und $AGFE$ dieser acht Dreiecke in ihrer rechtwinkligen Lage und dreht die dritte Ebene $ABFE$ um den einen ihr zugehörigen Durchmesser AF auf der diesem Durchmesser normalen festen Ebene $BGDE$ herum, so entstehen durch diese Drehung Dreiecke, in welchen je zwei Winkel bei B, G, D, E rechte bleiben und deren dritte bei A und F mit der Drehung verändert werden; ferner bleiben zwei Seiten in jedem der acht Dreiecke Quadranten, die dritten Seiten in $BGDE$ werden mit den ihnen gegenüberliegenden Winkeln geändert, und diese Winkel und Seiten und die Flächenräume der Dreiecke bleiben unter einander in gleichem Verhältnifs.

9. In einem sphärischen Dreieck betragen zwei Seiten zusammen genommen mehr als die dritte Seite, wenn nicht der dieser dritten Seite gegenüberliegende Winkel gröfser ist als 2 Rechte.

Denn es sei ABD, Fig. 787, ein sphärisches Dreieck, C der Mittelpunkt der Kugel, ziehe die drei Halbmesser CA, CB, CD, so bilden diese ein Körperdreieck, deren Seiten die zu den Bogen AB, AD, BD gehörenden Mittelpunktswinkel sind. Bei gleichem Halbmesser verhalten sich aber die Bogen wie die zugehörigen Centriwinkel. Man hat demnach

$$AB : AD : BD = \angle ACB : \angle ACD : \angle BCD$$

folglich ist auch

$$AB : AD + BD = \angle ACB : \angle ACD + \angle BCD$$

In jedem Körperdreieck ist aber die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte Seite (No. 15, pag. 44)

folglich ist $\angle ACD + \angle BCD > \angle ACB$
daher auch $AD + BD > AB$

Dafs dies nicht statt findet, wenn $\angle BDA > 2R$, s. No. 8.

10. Die kürzeste Linie, die sich zwischen zwei Punkten der Kugeloberfläche

Fig. 787.

auf dieser ziehen läfst, ist der Bogen eines gröfsten Kreises, der durch diese Punkte geht.

Denn es sei ADB der Bogen eines gröfsten Kreises zwischen den auf der Kugelfläche vom Mittelpunkt C befindlichen Punkten A und B. Wäre nun ein anderer Bogen auf derselben z. B. AEB die kürzeste Linie zwischen A und B, so führe man durch irgend einen Punkt E dieser Linie und A und B zwei gröfste Kreisbogen AHE und BJE, so ist nach dem vorigen Satz Bogen AHE + Bogen $BJE >$ Bogen ADB.

Macht man also AD = Bogen AHE und man dreht den zwischen den Bogen AHE und AFE befindlichen Ausschnitt

Fig. 788.

um den Halbmesser AC so lange herum, bis der Bogen AHE in die Richtung ADB fällt, so deckt der Bogen AHE den Bogen AD, weil beide gleiche Halbmesser haben.

Dreht man eben so den Ausschnitt zwischen den Bogen EGB und EJB um den Halbmesser CB bis Bogen BJE in die Richtung BDA fällt, so deckt aus gleichem Grunde der Bogen BJE von B aus einen Theil des Bogens BDA.

Da aber Bogen AHE + Bogen BJE > als Bogen ADB, so fällt der Punkt E über D hinaus nach A hin, und wenn man die Drehung weiter fortsetzt bis ein Punkt G des Bogens BGE in D fällt, so würde ein kleinerer Bogen $(AE + BG)$ als AEB die kürzeste Linie zwischen A und B sein, welches der Voraussetzung, dafs Bogen AEB die kürzeste Linie ist, widerspricht.

Es ist demnach der Bogen eines gröfsten Kreises die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei auf der Kugeloberfläche befindlichen Punkten.

11. Durch jede zwei auf einer Kugeloberfläche befindliche Punkte läfst sich ein gröfster Kreis legen, zwischen beiden Punkten liegen also zwei Bogen eines gröfsten Kreises. Sind diese ungleich, so ist der kleinere die auf der Kugeloberfläche zu verzeichnende kürzeste Linie zwischen den beiden Punkten und heifst der Abstand der beiden Punkte auf der Kugeloberfläche genommen.

12. Jeder der beiden Pole eines Kreises auf der Kugel hat, auf der Kugelfläche gemessen, von allen Umfangspunkten dieses Kreises einen gleichen Abstand. Und umgekehrt, ist der Punkt auf der Kugelfläche, der von drei Umfangspunkten eines Kreises auf derselben einen gleichen Abstand hat, einer der beiden Pole dieses Kreises.

Denn sind E, F die Pole des Kreises $ADBH$, so geht die gerade Linie EF durch den Mittelpunkt G desselben und durch den Mittelpunkt C der Kugel.

Fig. 789.

Legt man nun durch die Pole und durch zwei Punkte A und D des Kreises zwei

gröfsts Kreise $AEBF$ und $EDFH$, zieht die geraden Linien AE und DE, so sind die dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke AEG und DEG congruent, folglich ist auch $AE = DE$. Da nun die Bogen AE und DE zu gleichen Kreisen gehören, so sind sie einander gleich, weil sie zu gleichen Sehnen gehören.

Da dies nun von allen übrigen in dem Kreisumfang $ADBH$ liegenden Punkten gilt, so hat der Pol E von allen diesen Punkten einen gleichen Abstand.

Ist umgekehrt E ein Punkt auf der Kugelfläche, der auf dieser gemessen von drei Punkten des Kreisumfangs $ADBH$ gleich weit absteht, so steht er auch von allen übrigen Punkten desselben Umfangs gleich weit ab und ist ein Pol des Kreises.

Denn alsdann folgt aus der Gleichheit der Bogen die Gleichheit der Sehnen, eine Normale EG auf die Kreisebene $ADBH$ gefällt, ist allen Dreiecken wie EAG gemeinschaftlich, hierzu die gleichen rechten Winkel, giebt die congruenten Dreiecke, mithin auch G als den Mittelpunkt des Kreises.

13. Zwei symmetrische Dreiecke auf derselben Kugelfläche sind gleich grofs.

Denn es seien ABD und abd die beiden symmetrischen Dreiecke, in welchen die gleich bezeichneten Seiten einander gleich sind. P sei der Pol des durch die

Fig. 790.

Punkte A, B, D gelegten kleineren Kreises, ziehe die Bogen gröfster Kreise PA, PB, PD, so bilden sich drei gleichschenklige Dreiecke PAB, PAD und PBD.

Nun führe man durch den Punkt b des anderen Dreiecks einen gröfsten Kreisbogen bp, so dafs $\angle dbp = \angle DBP$, nimm Bogen $bp = BP$ und ziehe von p die gröfsten Kreisbogen pa, pd.

Nun sind in den Dreiecken dbp und DBP zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel einander gleich, also nach Satz 12 auch die übrigen homologen Stücke derselben, mithin auch $dp = DP$. Da nun $DP = BP$, also auch $dp = bp = BP$, so ist $\triangle bdp \cong BDP$ und haben congruente Flächen.

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt

$$\angle bdp = \angle BDP$$

nach Voraussetzung ist

$$\angle adb = \angle ADB$$

folglich ist $\quad \angle adp = \angle ADP$

Hierzu $\quad dp = DP$

und $\quad ad = AD$

mithin die Dreiecke adp und ADP in allen Bestimmungsstücken gleich,

also auch $\quad \angle apd = \angle APD$

Seite $\quad ap = AP$

aber Seite $\quad AP = DP = dp$

mithin auch $\quad ap = dp$.

Folglich ist p der Pol des kleineren Kreises, der durch die Winkelspitzen a, b, d geht, und überdies sind die Dreiecke adp und ADP als gleichschenklig einander $\cong$. Auch $\angle apb = \angle APB$, weil beide Differenzen gleicher Winkel sind und da die diese Winkel einschliefsenden gleichen Schenkel in beiden Dreiecken abp und ABP gleich sind, so sind auch diese Dreiecke congruent.

14. Wenn zwei gröfste Kreise $ABFD$ und $AGFE$ von einem dritten $BGDE$ geschnitten werden, so sind die beiden

Fig. 791.

Theile der Zweiecke, welche die beiden ersten Kreise bilden, und die auf derselben Seite des schneidenden Kreises $BGDE$

liegen, zusammengenommen so grofs, als eins dieser Zweiecke.

Sind *ABFGA*, *AEFDA* diese Zweiecke, so ist zu beweisen,

dafs $\triangle ABG + \triangle ADE =$ Zweieck *ABFGA* = Zweieck *AEFDA*.

Es findet dies statt, wenn $\triangle AED = \triangle FBG$.

Es ist aber Halbkreis ABF = Halbkreis BAD, von beiden Bogen AB abgezogen bleibt Bogen FB = Bogen AD; eben so ist Bogen FG = Bogen AE, da nun zugleich wegen der gleichen Winkel BCG und ECD Bogen BG = Bogen DE, so ist $\triangle FBG = \triangle FDE$ folglich

$$\triangle ABG + \triangle FBG = \triangle ABG + \triangle ADE$$

oder Zweieck $ABFGA = \triangle ABG + \triangle ADE$

Ist $\angle BAG = \alpha$, so hat man nach No. 7:

$$\triangle ABG + \triangle ADE = \frac{\alpha}{90^\circ} F$$

15. Sphärische Dreiecke auf derselben Kugelfläche sind unter denselben Bedingungen in ihren Seiten und Winkeln einander gleich, unter welchen dies von den Körperdreiecken gilt.

Denn zieht man von den Winkelspitzen eines sphärischen Dreiecks nach dem Mittelpunkt der Kugel die Halbmesser, so sind diese die Halbmesser der gröfsten Kreise, zu welchen die Seiten des sphärischen Dreiecks als Bogen gehören und bilden die Kanten einer dreiseitigen Körperecke, deren Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Ferner stehen die in den Spitzen des sphärischen Dreiecks an den Bogen gezogenen Tangenten auf den Halbmessern winkelrecht und mithin sind die Winkel des sphärischen Dreiecks zugleich die Winkel des Körperdreiecks. Die Seiten des Körperdreiecks sind aber Mittelpunktswinkel gleicher Kreise, deren zugehörige Bogen die Seiten des sphärischen Dreiecks sind, folglich verhalten sich die Seiten des sphärischen Dreiecks wie die Seiten jener Körperecke. Folglich sind in sphärischen Dreiecken die Bestimmungsstücke für deren Gleichheit dieselben mit den ihnen zugehörigen Körperdreiecken.

Die Gleichungen der Körpertrigonometrie finden also eine unmittelbare Anwendung auf die sphärischen Dreiecke, in sofern ihre Seiten durch ihr Verhältnifs zum Viertelkreise eben so bestimmt werden, wie die Ebenenwinkel durch ihr Verhältnifs zum rechten und wegen dieser Anwendung heifst die Körpertrigonometrie auch die sphärische Trigonometrie.

16. Für die Beziehung zwischen Körperdreieck oder dreiseitiger Körperecke und sphärischem Dreieck ist nothwendig zu erwähnen, dafs nun jede Spitze einer Ecke eigentlich zwei Ecken liegen, wie dies auch im Art. „Ecke", pag. 6, zu Anfang erörtert ist, und dafs dort die erhabene Ecke und nicht die hohle Ecke betrachtet worden ist. Wie mit der Ecke ist es nun auch mit den sphärischen Dreiecken:

Um die drei Punkte *A*, *B*, *G*, Fig. 791, liegen vier Kugeldreiecke, nämlich das von den Seiten *AB*, *AG* und *BG* und das von zweien dieser drei Seiten und der Ergänzung der dritten Seite zum ganzen Kreis wie das von *AB*, *AG* und *BEDG* begrenzte Dreieck. In ersterem ist $\angle A < 2R$, im zweiten ist $\angle A > 2R\angle$; beide Dreiecke ergänzen sich zur Halbkugelfläche, das erste wird verstanden, und für das erste gelten die der Körperecke angehörigen Gesetze.

Ein Dreieck mit zwei Winkeln, die gröfser sind als zwei Rechte, gibt es nicht, ein zweiter Kreis, wie z. B. *AEFG* würde den Bogen *BEDG* schon in *E* schneiden. Dafs jede von drei oder von zwei Seiten nicht gröfser sein kann als ein Halbkreis, dafs überhaupt jedes mögliche sphärische Dreieck innerhalb einer Halbkugelfläche liegen mufs, zeigt anschaulich Fig. 792, wo der Kreis *ABDE* der gröfste Kreis der Dreiecksseiten *AE* und *ABDA* für die Dreiecke *CAE* und *CABDE* ist.

17. Man hat demnach in Beziehung auf die dem sphärischen Dreieck zugehörige Körperecke folgende Sätze für dasselbe (s. Art. „Ecke").

1. Der Winkel einer dreiseitigen Ecke ist zugleich der Winkel des der Ecke zugehörigen sphärischen Dreiecks.

2. Jede Seite einer dreiseitigen Ecke ist zugleich die Seite des dazu gehörigen sphärischen Dreiecks.

3. Sind dreiseitige Ecken einander gleich, so sind auch die zugehörigen sphärischen Dreiecke einander gleich.

4. In jeder drei- oder mehrseitigen sphärischen Figur ist die Summe der Seiten immer kleiner als ein gröfster Kreis („Ecke" No. 4).

5. Jedes sphärische Dreieck hat ein Supplementardreieck; es wird auf der Kugeloberfläche eben so construirt, wie die Supplementarecke zu einer gegebenen dreiseitigen Ecke (s. „Ecke" No. 5) indem man auf den durch jede Dreiecksseite und den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene in dem Mittelpunkt einen

normalen Halbmesser errichtet und die drei neuen Punkte auf der Kugelfläche durch gröfste Kreisbogen verbindet. In beiden sphärischen Dreiecken ergänzen sich Seiten und gegenüberliegende Winkel gegenseitig zu zwei Rechten.

6. Die Summe der drei Winkel eines spärischen Dreiecks sind immer gröfser als zwei Rechte und kleiner als sechs Rechte.

7. Die Bestimmungsstücke für ein und dasselbe sphärische Dreieck erhält man in allen vorkommenden Fällen aus Art. „Ecke“, No. 14, 15, 16, 17 und 18.

18. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zum vierten Theil der zugehörigen Kugelfläche (F, No. 7), wie der Ueberschufs seiner drei Winkel über zwei Rechte zu zwei Rechten.

Denn ist Fig. 792 $\triangle ABC$ in seinem Flächeninhalt zu bestimmen, so verlängere die Seiten BC und AC bis E und D in den gröfsten Kreis der dritten Seite AB. Dann sind die vier entstandenen Dreiecke zusammen = der Halbkreisfläche $= 2F$. Nach No. 7 ist das Zweieck von den Seiten DCA und $DBA = \frac{\alpha}{R} F$, das Zweieck von den Seiten BCE und $BAE = \frac{\beta}{R} F$ und nach No. 14 ist $\triangle ABC + \triangle DEC$ = einem Zweieck von dem $\angle \gamma$ also $= \frac{\gamma}{R} F$. Demnach hat man

Fig. 792.

$$\text{Zweieck } ACDB = \triangle ACB + \triangle DCB = \frac{\alpha}{R} F$$

$$\text{Zweieck } BAEC = \triangle ACB + \triangle ACE = \frac{\beta}{R} F$$

$$\triangle ACB + \triangle CDE = \frac{\gamma}{R} F$$

hieraus $$3\triangle ACB + \triangle DCB + \triangle ACE + \triangle CDE = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{R} F$$

Hierzu $$\triangle ACB + \triangle DCB + \triangle ACE + \triangle CDE = 2F$$

gibt subtrahirt $$2\triangle ACB = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{R} F - 2F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{R} \cdot F$$

woraus $$\triangle ACB = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{2R} \cdot F$$

oder $$\triangle ACB : F = (\alpha + \beta + \gamma) - 2R : 2R$$

19. Die Fläche eines sphärischen Vielecks (n ecks) verhält sich zum vierten Theil der Kugeloberfläche wie der Ueberschufs der Summe seiner Winkel über so viel mal zwei Rechten als das Vieleck Seiten weniger zwei hat zu zwei Rechten; d. h. Ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \varphi$ die Summe seiner Umfangswinkel, J der Inhalt des Vielecks (n ecks), so ist

$$J : F = \varphi - 2(n-2)R : 2R$$

Denn durch Bogen gröfster Kreise durch gegenüberliegende Winkelspitzen kann man das n eck in $(n-2)$ Dreiecke theilen. Jedes dieser Dreiecke verhält sich zu F, wie der vorige Satz sagt. Die Summe sämmtlicher Dreieckswinkel ist = der Summe der Umfangswinkel des Vielecks, von denen also für jedes Dreieck $2R$, mithin in Summa $(n-2)2R$ abgezogen werden müssen. Der Satz ist also richtig.

20. Die Fläche einer Kugelzone ist so grofs als der Mantel eines geraden Cylinders von einerlei Höhe mit der Zone, dessen Grundfläche ein gröfster Kreis der Kugel ist.

Es sei die Zone zuerst eine Calotte mit dem Grundkreis von dem Durchmesser AB. C der Mittelpunkt der Kugel, D der Pol des Grundkreises, ADB ein durch den Mittelpunkt C und den Pol P, also auf der Grundebene normal genommener Durchschnitt der Calotte. In dem Kreisausschnitt ACD beschreibe man ein reguläres Vielecksstück, EF sei eine Seite desselben; durch die Winkelpunkte desselben führe man Parallelkreise zu dem

Grundkreise, und stelle sich Kegel vor, welche diese Parallelkreise zu Endflächen und die Seiten des Vielecksstücks zu Seiten haben, so bildet sich innerhalb der Calotte eine Reihe von Kegelmänteln, die zusammengenommen kleiner sind als die Calotte. Zieht man nun durch die Winkelpunkte des Vielecks mit AB Parallelen bis an die Axe CD, so sind die zwischen zwei nächsten Parallelen begriffene Theile der Axe die Höhen dieser Kegel, so HJ die Höhe des Kegels von der Seite EF. Fällt man auf EF das Loth CG (Apothema) so ist G die Mitte von EF, daher der Kegelmantel $EF =$ dem Mantel eines Cylinders, der HJ zur Höhe und CG zum Halbmesser seines Grundkreises hat (s. Kegel, No. 12). Da dies nun von jedem der Kegelmäntel gilt und das Apothema für jede Vielecksseite dasselbe ist, so ist die Summe aller Kegelmäntel = dem Mantel eines Cylinders, der die Summe der Kegelhöhen, d. h. die Höhe DO der Calotte zur Höhe und das Apothema CG zum Halbmesser hat $(= 2\pi \cdot CG \cdot DO)$.

Beschreibt man eben so um denselben Ausschnitt ein dem inneren ähnliches Vieleckstück und betrachtet diese als Seiten von Kegelmänteln, deren Axen mit OM zusammenfallen, so sind diese Kegelmäntel zusammen gröfser als die

Fig. 793.

Calotte ist, und die Summe derselben ist = dem Mantel eines Cylinders von der Höhe NM des Vielecksstücks und von dem Apothema $CL =$ dem Halbmesser der Kugel als Halbmesser des Grundkreises $(= 2\pi \cdot CL \cdot NM)$. Zwischen beiden Cylindermänteln ist nun immer ein Cylindermantel begriffen, der die Höhe DO der Calotte zur Höhe und einen gröfsten Kreis der Kugel zur Grundebene hat $(= 2\pi \cdot AC \cdot DO)$. Denn dieser letzte Cylinder hat einerlei Höhe DO mit dem ersten Cylinder, sein Grundkreis πAC^2 aber ist gröfser, weil der Halbmesser AC gröfser ist als das Apothema CG.

Nun ist $DO : MN = AO : KN$

Aber $AO : KN = AC : CK = CG : CL$

folglich ist $MN > DO$

Der dritte und der zweite Cylinder haben aber einerlei Grundfläche, der zweite eine gröfsere Höhe, also ist der Mantel des zweiten Cylinders gröfser als der dritte Cylindermantel. Wenn man nun die Seitenzahl des beliebigen Vielecksstücks beliebig vermehrt, so kann das Apothema CG dem Kugelhalbmesser beliebig nahe gebracht werden; d. h. der Grundkreis des ersten Cylindermantels beliebig nahe dem Grundkreis des zweiten und die Höhe des zweiten der Höhe des ersten. Folglich können auch die Cylindermäntel selbst beliebig nahe gebracht werden. Da nun zwischen beiden Cylindermänteln immer die Calotte und der im Satz ausgedrückte, der dritte Cylindermantel liegt, so ist der Satz erwiesen.

Ist statt der Calotte eine Zone mit zwei Endkreisen gegeben, so ergänze man dieselbe zur Calotte und es gilt also der Satz von der ganzen und von der Ergänzungscalotte; zieht man auf einer Seite die Ergänzungscalotte ab, auf der andern den zu ihr gehörenden Cylindermantel, so hat man die Richtigkeit des Satzes für die Zone.

21. Ist r der Halbmesser der Kugel, h die Höhe einer Calotte oder Zone, so ist die Fläche $J =$ dem Cylindermantel vom Halbmesser r und der Höhe h; mithin

J der Calotte oder Zone $= 2\pi hr$ (1)

Die Halbkugelfläche ist eine Calotte von der Höhe r, mithin

J der Halbkugelfläche $= 2\pi r^2$ (2)

J der ganzen Kugeloberfläche $= 4\pi r^2$, = dem vierfachen Inhalt des gröfsten Kreises der Kugel.

II. Körperbestimmung.

22. A. Denkt man sich den ebenen Durchschnitt einer Kugel als Grundebene eines Kegels, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, so heifst der von dem Kegelmantel und der vorliegenden Calotte begrenzte Körper ein **kegelförmiger Kugelausschnitt** oder **Kugelausschnitt.**

B. Verbindet man die Seiten eines sphärischen Vielecks durch Ebenen mit dem Mittelpunkt der Kugel, so heifst der von diesen Ebenen und dem vorliegenden sphärischen Vieleck begrenzte Körper ein **pyramidenförmiger Kugelausschnitt.**

C. Der von einer Calotte und deren Grundkreis begrenzte Körper heifst ein **Kugelabschnitt**.

D. Der von einer Zone und ihren beiden Endkreisen begrenzte Körper heifst eine **Körperzone** oder **körperliche Zone** auch **Kugelabschnitt mit zwei Endkreisen**.

E. Der von einem sphärischen Zweieck und den zu ihm gehörigen Halbkreisen begrenzte Körper heifst ein **keilförmiger Kugelausschnitt** oder ein **sphärischer Keil**.

23. Ein kegelförmiger Kugelausschnitt ist = einem Kegel, dessen Grundkreis gleich ist der den Ausschnitt begrenzenden Calotte und welcher den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat.

Verfährt man mit der Construction ähnlich wie Satz 20 mit Fig. 793, indem man die Calotte innerhalb und aufserhalb mit Kreisebenen belegt, von denen je zwei über einander befindliche parallel sind, und deren Umfänge mit dem Kugelmittelpunkt zu Kegeln verbindet, so ist jede innere Kegel-Grundebene kleiner, jede äufsere gröfser als das von ihnen eingeschlossene Calottenstück, die Höhen der ersten Kegel alle kleiner als der Kugelhalbmesser, die der zweiten Kegel gleich dem Kugelhalbmesser.

Durch Vermehrung und Verkleinerung der einzelnen Grundflächen kommt jede äufsere und jede innere Grundfläche der Calotte, die inneren Höhen dem Kugelhalbmesser an Gröfse beliebig nahe. Beide Kegelsummen kommen also beliebig nahe einem Kegel, der die Calotte zur Grundfläche und den Kugelhalbmesser zur Höhe hat und zugleich beliebig nahe dem Kugelausschnitt; beide letztgenannten Körper werden aber von den beiden vorgenannten Kegelsummen eingeschlossen, mithin ist der Satz erwiesen.

Es ist demnach jeder kegelförmige Kugelausschnitt = $\frac{1}{3}$ × Calotte × Kugelhalbmesser. Wird die Calotte nach No. 21 bezeichnet, so ist

der kegelförmige Kugelausschnitt J
$$= \tfrac{2}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

Setzt man $AO = a$, $BD = b$, so ist $a^2 = 2rh - h^2$ mithin $2rh = a^2 + h^2 = b^2$. Diese Werthe in Formel 1 gesetzt gibt den Kugelausschnitt

$$J = \tfrac{1}{3}\pi r \cdot 2rh = \tfrac{1}{3}\pi r\,(a^2 + h^2) = \tfrac{1}{3}\pi b^2 r \qquad (2)$$

24. Verwandelt sich der Kegelmantel in einen gröfsten Kreis, so ist der Ausschnitt die Halbkugel; es ist $h = r$, und der körperliche Inhalt der Halbkugel
$$= \tfrac{2}{3}\pi r^3 \qquad (3)$$

der Inhalt der ganzen Kugel $= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad (4)$

25. Der Inhalt eines Kugelabschnitts ist gleich dem Inhalt eines Cylinders, der den Grundkreis des Abschnitts zur Grundfläche und die Hälfte der Höhe desselben zur Höhe hat, sammt einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Abschnitts ist.

Denn es ist (Fig. 793) ADB der Durchschnitt eines Kugelabschnitts, C der Mittelpunkt der Kugel, CD deren Halbmesser $= r$, $DO = h$ die Höhe des Abschnitts, BO der Halbmesser des Grundkreises vom Abschnitt. Nun ist der Kugelabschnitt ABD der Unterschied zwischen dem Kugelausschnitt $ADBC$ und dem Kegel CAB.

Der Kugelausschnitt ist nach No. 23, Formel 1 $= \tfrac{2}{3}\pi r^2 h$

Der Kegel $CAB = \tfrac{1}{3}\pi \cdot CO \times BO^2$
aber $CO = r - h$

$$BO = a = \sqrt{CB^2 - CO^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Also der Kegel $= \tfrac{1}{3}\pi\,(r-h)\,a^2$

also der Kugelabschnitt $= \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi\,(r-h)\,a^2 \qquad (5)$

Nun ist $\quad h : a = a : 2r - h$

woraus
$$r = \frac{a^2 + h^2}{2h} \qquad (6)$$

Diesen Werth eingesetzt gibt den Kugelabschnitt

$$\tfrac{1}{3}\pi \left[2\left(\frac{a^2+h^2}{2h}\right)^2 h - \left(\frac{a^2+h^2}{2h} - h\right)a^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\,\frac{(a^2+h^2)^2 - (a^2-h^2)\,a^2}{2h} = \tfrac{1}{2}\pi a^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3 \qquad (7)$$

Nun ist $\pi a^2 (\tfrac{1}{2}h)$ der Inhalt des im Satz erwähnten Cylinders und $\tfrac{1}{6}\pi h^3$ der Inhalt der daselbst erwähnten Kugel.

Setzt man ferner aus der Formel für $BO = a$ den Werth von a in Formel 5, so erhält man den Kugelabschnitt

$$J = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) \qquad (8)$$

Setzt man die Sehne BD des Abschnitts $= b$, so hat man $b^2 = 2rh$

also $\quad r = \frac{b^2}{2h}$.

Diesen Werth in Formel 8 gesetzt gibt den Kugelabschnitt

$$J = \frac{1}{6}\pi h (3b^2 - 2h^2) = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2) \qquad (9)$$

26. Der Inhalt einer körperlichen Zone (mit zwei Endflächen) ist gleich dem Inhalt zweier Cylinder, welche die halbe Höhe der Zone zur Höhe haben und deren Grundkreise die Endkreise der Zone sind, plus dem Inhalt einer Kugel, welche die Höhe der Zone zum Durchmesser hat.

Also wenn die Höhe der Zone $= h$, die Halbmesser deren Endkreise AO und HE $= a$ und b sind

$$\frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{2}\pi b^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Ergänzt man die Zone zu einem Abschnitt, und man bezeichnet die Höhe HD des Ergänzungs-Abschnittes mit x, so ist nach Formel 7 des vorigen Satzes der Inhalt des gröſseren Abschnittes

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 (h + x) + \frac{1}{6}\pi (h + x)^3$$

der Ergänzungs-Abschnitt

$$= \frac{1}{2}\pi b^2 x \qquad + \frac{1}{6}\pi x^3$$

Der letzte Inhalt von dem ersten abgezogen gibt den Inhalt der Körperzone

$$J = \frac{1}{2}\pi \left[a^2 h + \frac{1}{3}h^3 + (a^2 + h^2 - b^2)\, x + hx^2\right]$$

Ist nun wieder r der Halbmesser der Kugel, so hat man

$$x : b = b : 2r - x$$

woraus $\quad 2r - x = \frac{b^2}{x}$

Es ist eben so

$$h + x : a = a : 2r - h - x$$

woraus $\quad 2r - h - x = \frac{a^2}{h + x}$

Mithin $\quad 2r - x = \frac{a^2}{h + x} + h = \frac{b^2}{x}$

oder $a^2 x + h^2 x - b^2 x = b^2 h + b^2 x$

woraus

$(a^2 + h^2 - b^2)\, x + hx^2 = b^2 h$

Diesen Werth in den Ausdruck für J gesetzt, gibt den Inhalt der körperlichen Zone

$$J = \frac{1}{2}\pi (a^2 h + \frac{1}{3}h^3 + b^2 h) \qquad (10)$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{2}\pi b^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$$

Man schreibt in der Regel die Formel

$$J = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2) \qquad (11)$$

27. Wird über einem gröſsten Kreise einer Kugel als Grundfläche ein gerader Cylinder verzeichnet, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, und überdies zu dem oberen Endkreise des Cylinders als Grundfläche ein Kegel, der seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel hat, und schneidet man dann den Cylinder durch zwei mit seinen Endflächen ∥ laufenden Ebenen, so ist der zwischen diesen beiden Durchschnittsebenen begriffene Theil des Cylinders gleich der zwischen denselben Ebenen begriffenen körperlichen Kugelzone + dem dazwischen begriffenen Theil des Kegels.

Es sei Fig. 794 das Quadrat $ACBD$ der halbe Durchschnitt des Cylinders mit einer Ebene durch seine Axe BC gelegt, so sind AC, BC Halbmesser der Kugel,

Fig. 794.

der Quadrant ABC der halbe Durchschnitt der Halbkugel und das $\triangle BCD$ der halbe Durchschnitt des Kegels, C dessen Spitze. EF, HG seien die Durchschnittslinien der Ebene $ACBD$ mit den parallelen Durchschnitten des Cylinders, so sind FK und GJ die Halbmesser der beiden Endkreise des Kugelabschnitts, FM und GL die Halbmesser der beiden Endkreise des abgekürzten Kegels.

Führt man nun einen beliebigen Durchschnitt ∥ den Endkreisen des Cylinders, so schneide dieser die Ebene $ABCD$ in NO, dann wird NO der Halbmesser des Durchschnitts im Cylinder, OP der Halbmesser des Durchschnitts in der Zone und OQ der Halbmesser des Durchschnitts im abgekürzten Kegel.

Zieht man CP so ist

$$CP = AC = NO$$
$$OQ = CO$$

folglich

$$NO^2 = CP^2 = OP^2 + CO^2 = OP^2 + OQ^2$$

Nun sind NO, OP, OQ die Halbmesser der Kreisdurchschnitte des Cylinders, der Kugelzone und des Kegels, folglich ist der erst genannte Durchschnittskreis

den anderen beiden susammengenommen gleich. Da nun diese Durchschnittsflächen in beliebiger Lage sind, so haben sie überall dasselbe Verhältnifs und es sind also nach Cavalleris Grundsatz, s. Art. „Körperberechnung“, die in dem Satz aufgeführten Körper einander gleich.

28. Fällt GH auf AC und EF auf BD, so folgt, dafs der ganse Cylinder über dem gröfsten Kreise der Kugel = ist der Halbkugel sammt dem gansen Kegel. Es ist also die Halbkugel der Unterschied swischen dem Cylinder und dem Kegel. Nun ist der Kegel = $\frac{1}{3}$ des Cylinders, mithin die Halbkugel = $\frac{2}{3}$ des Cylinders, der den gröfsten Kreis zur Grundfläche und den Durchmesser sur Höhe hat, wie dies schon aus der Formel 4, No. 24 hervor geht.

Ist R der Kugelhalbmesser, so ist
der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\pi R^3$
der Inhalt des Cylinders $= 2\pi R^3$
der Inhalt des Kegels $= \frac{2}{3}\pi R^3$

Die Kugel also = $\frac{2}{3}$ des Cylinders und das Doppelte des Kegels von der Grundfläche des gröfsten Kreises und der Höhe = dem Durchmesser.

29. Der Inhalt eines keilförmigen Kugelausschnitts verhält sich zum Inhalt der Kugel, wie der Winkel seines Zweiecks zu 4 Rechten. Hat das Zweieck den Winkel α, so ist der Ausschnitt also =

$$\frac{\alpha}{4R} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{90^\circ}\pi r^3 \qquad (12)$$

30. Ein pyramidenförmiger Kugelausschnitt ist einer Pyramide gleich, die den Halbmesser der Kugel sur Höhe hat, und deren Grundebene = ist dem zu dem Ausschnitt gehörenden sphärischen Vieleck.

So wie nach Satz 19 die Fläche eines sphärischen Vielecks sich zur Kugelfläche oder deren vierten Theil verhält, so verhält sich auch der su dem Vieleck gehörende Pyramidal-Ausschnitt sur Kugel oder deren vierten Theil. Bei derselben Beseichnung mit No. 19 ist demnach der $n$seitige Pyramidalausschnitt

$$K = \frac{\varphi - 2(n-2)R}{2R} \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{\varphi - 2(n-2)R}{6R} \cdot \pi r^3 \qquad (13)$$

Kugelabschnitt, s. u. „Kugel“ No. 22, C, D. Bestimmung dessen körperlichen Inhalts, No. 25.

Kugelausschnitt, s. u. „Kugel“, No. 22. Inhalt des keilförmigen Ausschnitts No. 23, des keilförmigen No. 29, des pyramidenförmigen Ausschnitts No. 30.

Kugelaxe, s. u. „Kugel“ No. 5, A.

Kugeldreieck, sphärisches Dreieck ist ein Dreieck, welches auf einer Kugeloberfläche mit gröfsten Kreisbogen verzeichnet wird, oder welches entsteht, wenn drei gröfste Kreise auf einer Kugeloberfläche sich schneiden. Die gröfsten Kreisbogen heifsen die Seiten des Dreiecks, die Winkel, welche die Tangenten dieser Seiten in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, dem Scheitelpunkt mit einander bilden, heifsen die Winkel des Dreiecks.

Fig. 795.

Es seien Fig. 795, AB, AC, BC gröfste Kreisbogen einer Kugel, deren Mittelpunkt S ist, so sind die von S nach den Spitzen des Dreiecks gezogenen geraden Linien SA, SB, SC als Halbmesser einander gleich. Legt man durch die drei Bogen und den Mittelpunkt S drei Ebenen ABS, ACS, BCS, so sind die oben gedachten Winkel des Kugeldreiecks dieselben mit den Neigungswinkeln je zweier Ebenen, zu welchen die den Winkel einschliefsenden Kreisbogen gehören; so wie, wenn man den Halbmesser der Kugel = 1 setzt, die Dreiecksseiten mit den sie umschliefsenden um S liegenden Centriwinkeln einerlei Maafs haben. Wie die Beseichnung dies angibt, wo nun diese Figur mit Fig. 740 (pag. 36) des Art. „Körpertrigonometrie“ bis auf die Kreislinien und die Hülfslinien dieselbe ist.

Es ist aus dieser Figur augenscheinlich, dafs die ganse Theorie der Körperdreiecke auf die der Kugeldreiecke unmittelbar su übertragen ist, und auch der Art. „Kugel“ hat in No. 15, 16 und 17 dies auseinandergesetzt, damit in jenem Art.

der analytisch trigonometrische Theil über die sphärischen Dreiecke nicht vermifst werde.

Es mufs daher in diesem Art. dasselbe gelten; dagegen habe ich mich oft überzeugt, dafs es Jüngern der Wissenschaft zeitraubend ist, die Formeln der Körperdreiecke auf die der Kugeldreiecke ohne dafs die Figur umgeändert wird, anzuwenden, und deshalb will ich hier die dort erwiesenen Auflösungen der Kugeldreiecke in ihren Resultaten und in Beziehung auf Fig. 795 geordnet zusammenstellen.

Auflösung rechtwinkliger Kugeldreiecke.

(S. „Körpertrigonometrie", No. 6. Formel I. bis XIII.)

Es sei Fig. 793: $\angle ACB = \gamma = 90^0$, also $AB = c$ die Hypotenuse.

A. Wenn zwei Catheten $BC = a$, $AC = b$ gegeben sind.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,a}{\sin b}$$

$$tg\,\beta = \frac{tg\,b}{\sin a}$$

B. Wenn die Hypotenuse $AB = c$ und eine Cathete $AC = b$ gegeben sind.

$$\text{cas}\,a = \frac{\cos c}{\cos b}$$

$$\cos\alpha = tg\,b \cdot \cot c$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

C. Wenn die Hypotenuse $AB = c$ und ein ihr anliegender Winkel $CBA = \beta$ gegeben sind.

$$\sin b = \sin c \cdot \sin\beta$$

$$tg\,a = tg\,c \cdot \cos\beta$$

$$tg\,\alpha = \frac{\cot\beta}{\cos c}$$

D. Wenn eine Cathete $BC = a$ und der ihr gegenüberliegende Winkel $BAC = \alpha$ gegeben sind.

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$$

$$\sin b = \frac{tg\,a}{tg\,\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$$

E. Wenn eine Cathete $BC = a$ und der ihr anliegende Winkel $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$\cot c = \frac{\cos\beta}{tg\,a}$$

$$tg\,b = \sin a \cdot tg\,\beta$$

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta$$

F. Wenn zwei Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

Auflösung schiefwinkliger Kugeldreiecke.

A. Wenn die drei Seiten gegeben sind.

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

B. Wenn zwei Seiten $BC = a$, $AC = b$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $ACB = \gamma$ gegeben sind.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin\alpha \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$$

$$\cos c = \begin{cases} \dfrac{\cos a \cdot \sin(b+\varphi)}{\sin\varphi} \\ \text{wenn } \cot\varphi = tg\,a \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\dfrac{\gamma}{2} \\[2ex] tg\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

C. Wenn zwei Seiten $BC = o$, $AC = b$ und ein gegenüberliegender Winkel $CAB = \alpha$ gegeben sind.

$$\sin(c+\mu) \begin{cases} = \dfrac{\cos a \cdot \sin\mu}{\cos b} \\ \text{wenn } tg\,\mu = \dfrac{\cot b}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$$

$$\sin(\gamma+\psi) \begin{cases} = \cot\alpha \cdot tg\,\beta \cdot \sin\psi \\ \text{wenn } tg\,\psi = \cos b \cdot tg\,\alpha \end{cases}$$

D. Wenn éine Seite $BC = a$, ein dieser Seite gegenüberliegender Winkel $CAB = \alpha$ und ein derselben anliegender Winkel $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$$

$$\sin(c-\psi)\begin{cases} = \cot\alpha\cdot tg\,\beta\cdot\sin\psi \\ \text{wenn } tg\,\psi = tg\,a\cdot\cos\beta\end{cases}$$

$$\sin(\gamma-\mu)\begin{cases} = \dfrac{\cos a\cdot\sin\mu}{\cos\beta} \\ \text{wenn } tg\,\mu = \dfrac{\cot\beta}{\cos a}\end{cases}$$

E. Wenn eine Seite $BC = a$ nnd die beiden darsn liegenden Winkel $ABC = \beta$ nnd $ACB = \gamma$ gegeben sind.

Für die Bestimmung der beiden anderen Seiten b nnd c hst man (s. No. 14, Formel XIV, pag. 43)

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\gamma-\beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{b+c}{2}\\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\gamma-\beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{c-b}{2}\end{aligned}\right\}$$

und für den dritten Winkel α (s. Formel XV.)

$$\cos\alpha = \begin{cases}\dfrac{\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}\\ \text{wenn } \cot\varphi = \cos a\cdot tg\,\beta\end{cases}$$

F. Wenn die drei Winkel gegeben sind.

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

Bd. III. pag. 137 sind die Gaufs'schen Gleichnngen sngegeben, deren Nntzen für die Auflösung von Kngeldreiecken nachgewiesen nnd der Beweis ihrer Richtigkeit anf diesen Artikel angewiesen.

Im Art.: „Körpertrigonometrie" sind No. 2, Formel 1 nnd No. 5, Formel 1:

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$$

Hierans

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Ans diesen

$$1-\cos\alpha = \frac{-\cos a + \cos(b-c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$1+\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$1-\cos a = \frac{-\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$1+\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Nnn ist

$$1-\cos x = 2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$1+\cos x = 2\cos^2\tfrac{1}{2}x$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x = 2\cos^2\tfrac{1}{2}x - 1$$

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cdot\cos\tfrac{1}{2}x$$

Diese Werthe in die letzten vier Gleichnngen eingeführt, reducirt und entwickelt entstehen folgende 4 Formeln:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{a}{2} - \sin^2\dfrac{b-c}{2}}{\sin b\cdot\sin c} \tag{1}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{-\sin^2\dfrac{a}{2} + \sin^2\dfrac{b+c}{2}}{\sin b\cdot\sin c} \tag{2}$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{3}$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{4}$$

Um die erste Gaufs'sche Gleichnng sn finden, verbinde man Gleichung 2 mit 4, so ist

$$\frac{\cos^2\dfrac{a}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{-\sin^2\dfrac{a}{2} + \sin^2\dfrac{b+c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Nun ist

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\dfrac{a}{2}\cdot\cos\dfrac{a}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

Hierans

$$\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \frac{\sin^2\dfrac{a}{2}\cdot\cos^2\dfrac{a}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

diesen Werth eingesetzt und reducirt gibt

$$\frac{-\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

woraus

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

oder diese Gleichung in Producte verwandelt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}a$$

Um die zweite Gaufs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 1 mit 4, so ist

$$\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

hieraus erhält man bei der Verwandlung wie ad 1

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

woraus

$$\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cdot\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}a$$

Um die dritte Gaufs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 2 mit 3, so ist

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{-\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b+c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Bei demselben Verfahren wie ad 1 und 2 erhält man

$$\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\sin^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\cos^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

woraus

$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}a$$

Um die vierte Gaufs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 1 mit 3, nämlich

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Bei demselben Verfahren wie ad 1 bis 3 erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sin(\beta-\gamma)\cdot\cos\tfrac{1}{2}a$$

Kugelgewölbe wird bisweilen das Kuppelgewölbe genannt.

Kugelhaufen. Die (in Haufen) gesetzten Kugeln haben die Form

A. von dreiseitigen Pyramiden. Die Anzahl S der Kugeln wird ausgedrückt durch die Reihe der Trigonalzahlen. Die Anzahl der Lagen über einander gibt die Anzahl der Glieder; die oberste Lage ist eine einzige Kugel, demnach ist die Formel für die Reihe der Glieder

$$1+3+6+10\ldots.+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\text{ Stück}$$

die Summen von 1, 2, 3 .... n Lagen sind

$$1;\ 4;\ 10;\ 20;\ \ldots..\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{ Stück}$$

B. von vierseitigen Pyramiden. Die Lagen sind:

$$1+4+9+16+25\ldots..n^2$$

die Summen von 1, 2, 3 ... n Lagen

$$1;\ 5;\ 14;\ 30;\ \ldots.\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

C. von dreiseitigen Prismen mit schräg ansteigenden dreiseitigen Endflächen. Wenn in der obersten einfachen Reihe m Kugeln liegen, dann enthalten die Reihen:

$$m+2(m+1)+3(m+2)+4(m+3)+\ldots..n(m+n-1)$$

Die Summen der Kugeln in 1, 2, 3, ... n Lagen ist

$$m;\ 3m+2;\ 6m+8;\ 10m+20;\ \ldots..\tfrac{1}{6}n(n+1)(3m+2n-2)$$

Kugeloberfläche, s. u. „Kugel", 2.

Kugelschale ist der Körper, welcher zurückbleibt, wenn man von einer körperlichen Zone den Kegel fortnimmt, der durch die Umdrehung der Sehne um den die Höhe bildenden Theil des Durchmessers entsteht, also Fig. 793 der Körper, welcher durch die Umdrehung des Abschnitts *EFL* um *HJ* hervorgeht.

Nach dem Art. „Kugel", No. 26 ist die körperliche Zone von der Höhe *JH*,

wenn $EH = a$, $FJ = b$, $HJ = h$ gesetzt wird $= \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2)$
der innere abgekürzte Kegel $= \frac{1}{3}\pi h\,(a^2 + b^2 + ab)$

Letzteren von Ersterem abgezogen gibt
die Kugelschale $= \frac{1}{6}\pi h\,[(a - b)^2 + h^2]$
d. h. $= \frac{1}{6}\pi \cdot JH \cdot [(EJ - FJ)^2 + HJ^2] = \frac{1}{6}\pi \cdot JH \times EF^2$.

Kugelzone, s. u. „Kugel“, No. 5, C, D. Inhalt der Oberfläche No. 20 und 21; Inhalt der körperlichen Zone No. 26.

Kugelzweieck, s. v. w. „Sphärisches Zweieck“, s. „Kugel“ No. 5, B. No. 6 bis 8 und No. 14.

Kuppelgewölbe, Statik derselben, s. u. „Gewölbe“ No. 30, pag. 193.

Kurbel ist der Arm und die Länge des Hebelsarms am Krummzapfen.

L.

Länge ist die Abmessung einer Raumgröfse nach einer geradlinigen Richtung; auch die Gröfse dieser Abmessung in einer Anzahl von Einheiten ausgedrückt. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung und diese ist die Länge.

Da unter Länge in der Regel eine gerade Linie verstanden wird, so nennt man bei krummen Linien die in dieser Linie selbst gemessene Länge: absolute Länge, um keinen Zweifel zu erregen, dafs der (geradlinige) Abstand deren Endpunkte verstanden sei. Die Ermittelung und Angabe solcher Länge in der Länge einer geraden Linie ausgedrückt nennt man die Rectification der krummen Linien.

Länge, astronomische, s. „astronomische Länge“.

Länge, geocentrische und heliocentrische, s. eben daselbst und „geocentrisch“.

Länge, geographische, s. „geographische Länge.“

Länge eines Gestirns ist der östliche Abstand des Durchschnitts zwischen dessen Breitenkreis und der Ekliptik von dem Frühlingspunkt.

Länge eines Planeten in seiner Bahn ist die Länge des Bogens von dem Planeten bis zu seinem aufsteigenden Knoten + dem östlichen Abstand dieses Knotens von dem Frühlingspunkt, dieser Abstand von dem Knoten in der Planetenbahn gemessen (s. „Knoten“).

Länge eines Knotens ist die im vorigen Art. hinzuaddirte Länge, dieselbe rückwärts in der Planetenbahn gemessen. Der Anfangspunkt dieser Länge ist der Anfangs- oder Nullpunkt für die anzugebende Länge jedes Planeten.

Länge der Sonne ist die Länge des Orts, wo die Sonne in der Ekliptik, von der Erde aus gesehen, sich zu befinden scheint, (d. h. des Punktes, in welchem die gerade Verbindungslinie von Erde zu Sonne verlängert die Ekliptik schneidet). Also der Abstand dieses Punktes von dem rechts von ihm belegenen Frühlingspunkt in Bogen gemessen. Man unterscheidet wahre oder scheinbare Länge der Sonne, die Länge des wirklich beobachteten Orts, und mittlere Länge derselben. Die Länge des Orts, in dem die Sonne sich befinden würde, wenn sie von Anfang ab bis zu Ende die Ekliptik mit gleichförmiger Geschwindigkeit scheinbar durchlaufen hätte. Die wahre Länge ist bald gröfser bald kleiner als die mittlere

Länge (geocentrische) **der Sonne und des Mondes.** Fig. 796 stellt dar möglichst zusammengedrängt die Sonne, die umliegende Ekliptik *FSHW*, von welchen *F* den Frühlingspunkt, *S* den Sommerpunkt, *H* den Herbstpunkt und *W* den Winterpunkt angibt.

In jedem dieser vier Punkte die Erde mit dem sie umkreisenden Mond, diesen in den vier Punkten seiner Hauptphasen. 1 bedeutet den Neumond, 2 das erste Viertel, 3 den Vollmond und 4 das letzte Viertel. Nach den Richtungen der Pfeile geschehen die Umdrehungen.

Befindet sich die Erde in *H*, so ist die Länge der Sonne = 0, des Neumonds 1 = 0, des ersten Viertels 2 = 90°, des

Fig. 796.

Vollmonds 3 = 180°, des letzten Viertels 4 = 270°.

Tritt die Erde in *W*, so ist die Länge der Sonne = 90°, des Neumonds = 90°, des ersten Viertels = 180°, des Vollmonds = 270°, des letzten Viertels = 0.

Tritt die Erde in *F*, so ist die Länge der Sonne = 180°, des Neumonds = 180°, des ersten Viertels = 270°, des Vollmonds = 0°, des letzten Viertels = 90°.

Tritt die Erde in *S*, so ist die Länge der Sonne = 270°, des Neumonds = 270°, des ersten Viertels = 0, des Vollmonds = 90°, des letzten Viertels = 180°.

Längenausdehnung ist die Ausdehnung einer Raumgröfse nach einer Richtung (s. „Ausdehnung").

Längengrade sind wie die Breitengrade entweder geographisch oder astronomisch (s. „Breitengrade, Grad und geographische Länge"). Eine interessante Vergleichung zwischen Längen- und Breitengraden der Erde unter verschiedenen geographischen Breiten s. „Gradlängen".

Die astronomischen Längengrade werden in der Ekliptik von dem Frühlingspunkt als Nullpunkt ab gezählt. Desgleichen in den Planetenbahnen (s. „Länge eines Planeten und Länge eines Knotens").

Längenkreise für Orte auf der Erdoberfläche sind der Aequator und die Parallelkreise.

Längenmaafs ist eine als Einheit gewählte Länge um andere Längen mit derselben zu vergleichen, um also die Gröfsen anderer Längen-Ausdehnungen als Vielfache jener Einheit anzugeben.

Der Längenmaafse gibt es je nach der Ausdehnung und der Natur der zu messenden Längen verschiedene. Für kleine Längen hat man die bekannten Maafse: den Fufs, die Elle, das Meter u. s. w., mit deren gleichen Untertheilen; für Feldmaafse und andere städtische und ländliche Längen die Ruthe u. s. w.; für Wege die Ruthe mit ihren Vielfachen: die Meile, das Meter bis zu dem Myriameter u. s. w. Für astronomische Längen hat man allgemein das Längenmaafs: die geographische Meile (s d), welche übrigens in ihrer wirklichen Länge noch nicht genau bekannt ist.

Nicht überall können mithin Längenmaafse unmittelbar zum Abmessen angelegt werden. Auch bei Vermessung von Längen auf dem Felde nicht, man mufs mit Hülfe von Winkelmessungen die meisten berechnen.

Es ist sehr zu beklagen, dafs für den jetzt so allgemeinen und über den ganzen Erdball verbreiteten Verkehr so sehr viele verschiedene Längenmaafse existiren, um so mehr, da deren Quadrate und Kuben auch die Verschiedenheit in den Flächen- und Körpermaafsen hervorbringen und mit letzteren zugleich die Verschiedenheit der Gewichtsmaafse. So z. B. war das gesetzliche preufsische Pfund der 66te Theil des Gewichts eines preufsischen Kubikfufses destillirten Wassers bei 15° R. In England ist noch jetzt das Gewicht eines englischen Kubikzolles destillirten Wassers von 62° F. bei 30 Zoll Barometerstand = 252,458 Troy-Grän.

Es liegt dies in dem früheren Zustand der Abgeschlossenheit von Nachbarstaaten, und selbst benachbarter Städte eines Landes, und es hatte fast jede Stadt in jedem Lande ihre eigenen Maafse und Gewichte und somit auch ihr eigenes Längenmaafs. Namentlich sollen die üblichen Fufsmaafse in unzähliger Anzahl aus dem Alterthum herrühren: Griechen und Römer maafsen mit Fufsen, der Fufs wurde eingetheilt in vier flache Hände (palmi) zu vier Finger oder drei Daumen, also zu 12 Daumen oder 16 Finger, welches bei den späteren Völkern die Eintheilung in Zolle veranlafst hat. Die Anzahl der verschiedenen Fufsmaafse zu Anfang dieses Jahrhunderts ging ins Un-

glaubliche. Wenn jedes Land von den Mannsfüfsen die mittlere Länge als Fufsmaafs genommen hat, so haben die Portugiesen und die Franzosen die längsten, die Engländer die kürzesten Füfse. Es scheint jedoch, als wenn man zugängliche Längen, z. B. den Umfang der Ringmauer einer Landeshauptstadt zu Grunde gelegt, und dafs Provinzialstädte eben so verfahren und mit einer bestimmten runden Zahl die Länge zu Füfsen eingetheilt haben, woher die Fufse zwar sämmtlich die ungefähre Länge eines Mannsfufses, aber alle dennoch verschiedene Länge erhielten.

Wenn dieser Uebelstand nun in neuester Zeit wenigstens darin vermindert worden, dafs jedes civilisirte Land zu allgemeinem Gebrauch gesetzlich eingeführte Maafse und Gewichte hat, so bleibt immer noch die Unannehmlichkeit, dafs ein Maafs auf das andere reducirt werden mufs und es ist solche Reduction um so unbequemer, als die verschiedenen Ländermaafse in der Regel mit einander incommensurabel sind.

Für das einflufsreichste Maafs: für das Längenmaafs ist dies ein Beweis, dafs die Regierungs-Intelligenzen bei Wahl ihrer Längen-Einheiten keine allen Erdbewohnern ohne Ausnahme zugängliche, also in der Natur aufzufindende Länge genommen haben, wie das destillirte Wasser es für den Stoff ist, wobei aber für den gegenseitigen Verkehr auch einerlei Temperatur, am geeignetsten 3,5° R, die nahe dessen gröfste Dichtigkeit giht, allgemein festgestellt sein sollte.

Unter den älteren Längenmaafsen war am bekanntesten der Pied de roi und dessen sechsfache Länge die Toise, welche beide fast allen wissenschaftlichen Untersuchungen als Maafs zu Grunde lagen. Woher der pied de roi stammt, weifs man nicht, die Maafse aller Länder sind aber mit dem pied de roi verglichen; so auch unser preufsischer Fufs, der eigentlich gleichbedeutend mit dem uralten rheinländischen Fufs und auch gleich grofs mit diesem festgestellt worden ist. Dieser rheinländische Fufs ist aber wieder an vielen Orten verschieden gefunden und von Autoritäten als Schriftsteller von 137,5 bis 139,2 pariser Linien, erstere Zahl von Whitehurst, letztere von Picard angegeben worden.

Um die Länge des rheinländischen Fufses für Preufsen ganz bestimmt festzustellen, hatte das Königliche Ober-Bau-Departament im J. 1771 diejenige Länge von 139,13 pariser Linien vorgeschlagen, welche Eisenschmid aus eigenen Untersuchungen als Länge des rheinländischen Fufses gefunden hat. Dieser rheinländische Fufs ist durch einen Directorialbefehl vom 28ten October 1773 in Preufsen eingeführt worden. Von der pariser Academie wurde ein genauer französischer Fufsstock arbeiten, und danach sind unter Aufsicht des Oberbauraths und Professors Lambert zwei Normalmaafsstäbe, einer für die Academie der Wissenschaften, der andere für das Oberbaudepartement angefertigt worden und nach diesen wieder Maafsstäbe für Provinzialbehörden und Magistrate.

Durch die Maafs- und Gewichtsordnung für die preufsischen Staaten vom 16ten Mai 1816 wurde nun dieselbe Länge von 139,13 pariser Linien preufsischer Fufs genannt, und der Würfel dieser Länge ist der preufsische Kubikfufs, und das Gewicht desselben, aus destillirtem Wasser von 15° R. bestehend, wiegt 66 ehemalige preufsische Pfund.

Zur gesetzlichen Bestimmung des englischen Längenmaafses, des Normal-Yards gingen die Engländer selbstständig und ohne Beziehung zu dem pied de roi zu Werke. Es befand sich dort ein von Bird im Jahr 1760 aus Messing gefertigter in 36 Zoll eingetheilter Yardmaafsstab und es wurde festgestellt, dafs dieser Stab bei einer Temperatur von 62° F. die Länge des Imperial-Yards sein sollte. Um ferner dieses Yard für den Fall, dafs der Normalmaafsstock verloren ginge, zu fixiren, wurde durch eine Reihe von Versuchen die Länge des Secundenpendels in der Höhe des Meeresspiegels in der geographischen Breite von London im luftleeren Raum ermittelt, und es ergab sich dieselbe mit Hülfe des Normal-Yards zu 39,1393 Zoll, so dafs das Yard zum Secundenpendel wie 36 : 39,1393 sich verhält und dies Verhältnifs ist ebenfalls in der Parlamentsacte mit ausgesprochen worden.

Das wichtigste Längenmaafs, weil es allgemein zu werden verspricht, ist das französische Meter. Das Meter ist der Zehnmillionste Theil des nördlichen Erdmeridianquadranten. Demnach scheint es, man könne voraussetzen, dafs ein Erdquadrant wirklich genau zu vermessen sei. Es ist dies aber eine mifsliche Sache, denn eine directe Messung ist deshalb ganz unmöglich, weil man den Nordpol oder den Südpol nicht persönlich erreichen kann, abgesehen von den vielen anderen technischen Schwierigkeiten, die sich einer directen Messung

über Meere entgegenstellen würden, und wieder abgesehen hiervon, weil circa 1350 Meilen Länge Vermessung kein gut mögliches Unternehmen ist. Noch kommt hinzu, dafs höchst wahrscheinlich die Erde kein vollkommenes Sphäroid ist, dafs also die Meridiane allesammt von verschiedener Länge sind, und es resultirt hieraus, dafs das Meter keine in der Natur wirklich gegebene Länge sein kann, also von Rechtswegen keine Normallänge ist, und dafs das Meter nicht in das hohe Ansehen der Alleinseligmachung hätte kommen sollen.

Die Ungenauigkeit des Meters hat aber das Gute, dafs man in seiner Bestimmung das Wort: „nördlich" wegstreichen, dafs man das Meter als den zehnmillionsten Theil eines Erdmeridianquadranten festsetzen kann, so dafs die Bewohner der südlichen Halbkugel einerlei Anrecht mit uns an ihm haben.

Man darf jedoch zur Entschuldigung des Meters nicht übersehen, dafs es aus der französischen Revolution hervorgegangen ist, indem redliche Männer zugleich geistreich genug waren, der Nationalversammlung in verhüllenden Ausdrücken ein allgemeines Revolutionsmaafs in Anregung zu bringen, blofs in der Absicht, damit bei den Unruhen die Wissenschaft nicht so sehr leide. Dafs ein solches Maafs nur französischen Boden zu Grunde haben konnte ist natürlich: De Bonnai schlug vor die Länge des Secundenpendels unter dem 45ten Grad nördlicher Breite, der sich durch Frankreich von West nördlich über Bordeaux nach Ost südlich unter Grenoble hinzieht.

Die Academie, der die Begutachtung übertragen wurde, zog es vor, dafs etwas Ausgezeichneteres geschehe und es entstanden die berühmten französischen Gradmessungen von Dünkirchen bis Barcelona, beide Städte ziemlich nahe dem durch Paris gehenden 20ten Meridiangrad liegend; Dünkirchen am Pas de Calais, Barcelona am mittelländischen Meere,*) und es wurde in Folge der Messungen und Berechnungen, nach welchen das Meter 443,22487 bis 443,328 französische Linien schwankte, mittelst Decret vom 19ten Frimaire im Jahre der Republik 8 das Meter auf 443,296 französische Linien festgesetzt.

Das Meter ist also eben so ein Maafs par ordre wie der preufsische Fufs und anderer Länder Fufse, allein es sind doch Meridianmessungen ihm vorangegangen.

Gehen die Gradmessungen verloren, aus welchen das Meter als eine näherungsweise Länge berechnet worden ist, wie die englische Regierung von ihrem Yardmaafs gefürchtet hat, und die Berechnungen selbst, so ist auch das Meter verloren; die vorhandenen Normalmaafsstäbe sind schwer zu revidiren und es können Zeitereignisse eintreten, durch welche unsere Nachkommen über die Länge des Meters eben so ungewifs sind, wie wir heut über die Längen der alten griechischen und römischen Maafse.

Ein Normallängenmaafs, welches allen Erdbewohnern gleichgeltend ist, an welchem alle Erdbewohner ein gleiches Anrecht haben ist von grofser Wichtigkeit. Es ist hierzu das geeignetste Maafs offenbar die Länge des Secundenpendels am Meeresspiegel in der Aequatorebene. Es ist diese Länge eine constante Länge, und wenngleich mit Anstrengung von Fleifs und Aufmerksamkeit, aber jedenfalls zu allen Seiten aufzufinden. Zu Mittag ist die gröfste Hitze; hier wird die Pendelstange am längsten; die Schwingungen geschehen langsamer; die mühsamen Thermometercorrecturen bei grofsen Temperaturunterschieden werden vermieden, wenn man nur bei Nacht arbeitet, wo die Temperatur constanter ist.

Schwingt das Pendel in einer Minute 61mal, so wird es durch die Mikrometerschraube länger gemacht, schwingt es nun in zwei Minuten 119mal, so wird es wieder kürzer gemacht, und so gehen Versuche und Correcturen fort bis das Pendel in 12 Stunden von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang seine richtige Anzahl Schwingungen macht, und die kürzeste Länge des Secundenpendels der Erdoberfläche, das Normallängenmaafs ist mit Hülfe thermometrischer Correcturen factisch gefunden.

*) Anmerk. Dünkirchen hat 51° 2' 9" nördliche Breite.
Barcelona hat 41° 21' 44" „ „
Länge des vermessenen Bogens 9° 40' 25" nördliche Breite.
Dünkirchen hat 0° 2' 23" östliche Länge.
Barcelona hat 0° 10' 18" westliche Länge.
Länge des vermessenen Bogens 0° 12' 41" Länge.

Es beträgt diese Pendellänge etwa 39 engliche Zoll = 0,99058 Meter; sie ist also mit der Meterlänge sehr nahe übereinstimmend. Es hat nämlich Sabine das Secundenpendel auf St. Thomas in dem Meerbusen von Guinea unter 0° 24′ 42″ nördlicher Breite durch Beobachtungen zu 39,02074 englische Zoll bestimmt. Dies sind, da der englische Fufs = 0,3047945 Meter hat, 0,99148 Meter. Unter dem Aequator mufs das Pendel nun eine Kleinigkeit kürzer sein.

Längenunterschiede zweier auf der Erdoberfläche befindlichen Orte mifst man mittelst einer genau richtig gehenden Taschenuhr. Ist in dem Ort B der wahre Mittag um n Minuten früher oder später als in dem Ort A, für welchen die Uhr richtig geht, oder auch nur als in dem Ort A nach derselben Uhr der wahre Mittag angezeigt wird, so liegt im ersten Fall der Ort B um $\frac{1}{4}n$ Grade östlicher, im zweiten Fall um $\frac{1}{4}n$ Grad westlicher als der Ort A.

Last ist zunächst eine Masse, welche vermöge ihres Gewichts auf eine Unterlage drückt; hiernächst eine Masse, deren Ort geändert werden soll. Im ersten Fall ist die Last als eine Kraft zu betrachten, und die gedrückte Unterlage setzt ihr durch ihre Festigkeit einen deren Druckkraft gleichen Widerstand entgegen, so dafs statisches Gleichgewicht statt findet. Im zweiten Fall ist eine Kraft anzuwenden um die Last fortzuschaffen. Soll die Ortsänderung (Bewegung) senkrecht aufwärts geschehen, dann mufs für's Gleichgewicht die Kraft, in Gewichten ausgedrückt, der Last gleich sein. Bei der geringsten Vermehrung der Kraft geschieht Bewegung. Ist die Richtung eine andere, so ist eine nur geringere Kraft zu Gewältigung der Last erforderlich (s. „Kraft, Kräfte im Gleichgewicht“).

Lehrsatz, (Theorem) ist ein Satz, dessen Wahrheit nicht unmittelbar erkannt wird, sondern erst aus der Verbindung anderer schon als wahr erkannter Sätze hergeleitet werden mufs. Diese Herleitung heifst der Beweis (s. d.)

Leucitoeder ist das erste Ikositetraeder. S. d. mit Fig. 722.

Leucitoid ist das zweite Ikositetraeder; es kommt fast nur in Combinationen vor.

Libelle, Wasserwaage, dient zur Horizontalstellung von Mefsinstrumenten, besonders von Mefstischen; dann aber für alle Winkelmesser und die mit Fernröhren versehenen Nivellirinstrumente. Die Libelle besteht aus einem Gefäfs, welches man voll Alkohol giefst, bis auf einen kleinen Raum für eine Luftblase, die darin verbleibt.

Hat nun das Gefäfs einen genau ebenen Boden, der Glasdeckel eine flach gekrümmte Form, deren höchste Stelle genau lothrecht über dem Mittelpunkt des Gefäfsbodens sich befindet, so liegt dieser Boden und mit diesem zugleich die mit ihm vereinigte Plattenoberfläche des Mefsinstruments in einer genau horizontalen Ebene; weshalb auch jener der Luftblase zukommende Normalpunkt markirt ist.

Die für Mefstische gefertigte Libellen haben die Form (Fig. 797) einer Dose, sie heifsen Dosenlibellen, und sie sind

Fig. 797.

in dieser Form deshalb geeignet, weil eine Ebene, die Ebene des Mefstisches horizontal sein soll. Für Winkelmesser und Nivellirinstrumente mit Fernröhren ist die Form (Fig. 798) einer Röhre zweckmäfsiger, weil eine Linie, nämlich die

Fig. 798.

Visirlinie oder deren Horizontalprojection waagerecht liegen soll. Eine solche Röhrenlibelle hat eine zwischen Theilstrichen markirte Stelle für die Normallage der länglichen Luftblase, und deren Axe ist und verbleibt in der durch jede beliebige Visirlinie befindlichen lothrechten Ebene.

Libration. Hiermit bezeichnet man die verschiedenen schwankenden Bewegungen des Mondes.

Limbus ist der bei Winkelmefsinstrumenten eingetheilte feste äufsere Rand.

Linearisch ist was sich auf Linien bezieht, wird von Zahlen und Zahlengröfsen gesagt, weil man dieselben auch geometrisch construirt. Die bekanntesten Zah-

lengrößsen, welche allgemein gezeichnet werden, sind die goniometrischen, woher man dieselben auch noch immer trigonometrische Linien nennt. Man nennt einen als Linie aufgetragenen Sinus, Cosinus u. s. w. einen linearischen Sinus, Cosinus u. s. w.

In der analytischen Geometrie werden geometrische Constructionen durch Algebra erst zu Formeln entwickelt und nach diesen geometrisch construirt. Man nennt daher eine Aufgabe, welche durch Schneidung und Zusammensetzung von geraden Linien gelöst wird, eine linearische Aufgabe. Zahlen (Buchstabengrößsen), die geometrisch dargestellt eine gerade Linie geben, sind linearische Zahlen; es sind dies also alle Buchstabengrößsen in der ersten Potenz. Aus diesem Grunde heifsen auch Gleichungen zwischen Veränderlichen, in welchen die eine nur in der ersten Potenz vorkommt, linearische Gleichungen. Desgleichen sind linearische Differenzialgleichungen, in welchen eine Veränderliche und deren Differenziale nur in der ersten Potenz erscheinen.

Linie. Deren Begriff ist, wenn er dafür gelten soll, schon in dem Art.: „Gerade Linie“ gegeben. Sie ist eine Raumgröfse von nur einer Abmessung, ihre Theile liegen daher hinter, nicht neben einander; sie entsteht durch die Bewegung eines Punkts.

So wie der Punkt, ein im Verschwinden begriffener begrenzter Raum, die Grenze eines Raumes von nur einer Abmessung, von der Linie ist, so ist die Linie als im Raum von nur einer Abmessung, die Grenze des Raumes von zwei Abmessungen, die Grenze der Fläche (s. d).

Aus dem Grunde, dafs der Punkt die Grenze der Linie ist, schneiden sich zwei Linien nur in einem Punkt, der nun als der gemeinschaftliche Grenzpunkt von vier Linien betrachtet werden kann.

Linien sind entweder gerade oder krumm.

Gerade Linien decken sich; zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; eine gerade Linie ist durch zwei in derselben liegenden Punkte der Lage nach bestimmt.

Die Beziehung zwischen gerader Linie und Ebene, s. den Art. „Ebene“. Die geometrischen Constructionen, die geraden Linien unter sich und mit Kreislinien betreffend, siehe den Art. „Construction“ 1. Constructionen aus der Elementargeometrie. Der analytische Theil der geraden Linie, die Bestimmung derselben durch Coordinaten- und Polargleichungen, s. Art. „Curven“ II., Bd. II., pag. 170 bis 172 mit Fig. 526 bis 531. Der analytische Theil der krummen Linien ist der Gegenstand der Art. „Curven und Curvenlehre“.

Linien, goniometrische, sind die durch gerade Linien dargestellten goniometrischen Functionen: Sinus, Tangente u. s. w.

Linsen, Linsengläser sind zunächst Gläser in der Form einer Linse, deren beide Oberflächen die Form von Calotten haben, die zu gleich und ungleich grofsen Kugeln gehören können, aber von gleichen Grundflächen, so dafs beide Calotten von einem scharfen Kreisrand begrenzt werden, durch dessen Mittelpunkt und normal auf dem Rand die zu den Calotten gehörenden Kugelmittelpunkte liegen.

Die Gläser werden angewendet, um mittelst der Brechung hindurch gehender Lichtstrahlen (s. die Art. „Ablenkung des Lichtstrahls, Brechung der Lichtstrahlen“) von Gegenständen vergröfserte oder verkleinerte Bilder hervorzubringen oder durch Vereinigung der Sonnenstrahlen auf einen sehr kleinen Raum Brandhitze zu erzeugen.

Aufser der Linsenform werden den Gläsern davon abweichende Formen gegeben, je nachdem der Zweck ihrer Anwendung ist. Es erhalten beide Oberflächen auch hohle Calottenflächen, andere eine erhabene und eine hohle, noch andere eine ebene Fläche und eine hohle oder erhabene Calottenfläche. Dennoch haben auch diese von der Linsenform ganz abweichende Gläser den Namen Linsen und heifsen je nach ihrer Form: convex-convexe oder biconvexe Gläser, concav-concave oder biconcave Gläser, plan-convexe, plan-concave Gläser; die convex-concaven Gläser werden Menisken genannt.

In dem Art. „Brennglas“ ist theoretisch die Wirkung eines biconvexen Glases auf die Erzeugung der Hitze nachgewiesen und am Schlufs mit Beziehung auf No. 4 die Theorie auf ein plan-convexes und auf ein concav-convexes Glas ausgedehnt worden.

In dem Art. „Brille“ ist theoretisch die Wirkung der biconvexen Brille nachgewiesen für Personen, welche nahe befindliche Gegenstände erkennen wollen und die der biconcaven Brille zu Erkennung ferner Gegenstände.

Der Art. „Astronomisches Fernrohr“ zeigt die Wirkung zweier biconvexen Gläser, das eine als Objectivglas, das andere als Ocularglas, beide Gläser so mit einander fest verbunden, dafs deren Axen in einerlei geraden Linie liegen und beider Brennpunkte in einem Punkt zusammenfallen.

In dem Art. „Fernrohr“ ist zunächst die Wirknng zweier Gläser, eines biconvexen Objectivglases und eines biconcaven Ocularglases nachgewiesen, die eben so wie bei dem astronomischen Fernrohr zusammengestellt sind. Der gemeinschaftliche Brennpunkt beider Gläser fällt vor das Ocular, aufserhalb des Rohrs.

Hierauf erfolgt die Zusammenstellung der terrestrischen Fernröhre mit drei und vier unter einander vereinigten biconvexen Gläsern.

Es ist bei den so eben gedachten Instrumenten zu beachten, dafs bei den beiden Fernröhren, dem Keplerschen und dem Galileischen, die zu beobachtenden Körper Gestirne sind, also Körper, die äufserst weit entfernt sich befinden und eine unermefsliche Menge von Lichtstrahlen dem Objectiv zuführen. Dasselbe findet beim Brennglase statt, für welches die Sonne der leuchtende Körper ist. Bei den terrestrischen Werkzeugen befinden sich die zu beobachtenden Gegenstände, mit Gestirnen verglichen, äufserst nahe, und es sind nur Gegenstände von geringer Ausdehnung, oft nur einzelne sehr kleine Flächen.

Literalalgebra begreift die in Buchstabenausdrücken gegebenen algebraischen Aufgaben.

Literalgleichungen sind die in Buchstabengröfsen gegebenen Gleichungen.

Localhorizontal-Parallaxe, s. u. „Aequatoreal-Parallaxe.

Locomotiven. Diese üben ihre Zugkraft nur dadurch, dafs sie mit ihrem bedeutenden eigenen Gewicht ihre beiden Treibräder belasten, und dafs diese gegen die Schienen in der gleitenden Reibung eine feste Stütze finden, während die Lastwagen nur die viel geringere gleitende Reibung als Widerstand entgegensetzen.

Die überhaupt zu überwindenden Widerstände eines Eisenbahnzuges werden den Versuchen und Beobachtungen zufolge angegeben:

1. Die Reibung der Radachsen zämmtlicher Wagen des Zuges.

$$P_1 = \mu \frac{d}{D} Q$$

wo μ der Reibungscoefficient 0,05; d der Durchmesser des Zapfens, D der der Räder, Q das Gewicht der Wagen mit Ausschlufs der Räder bedeutet.

2. Die Reibung der Räder auf den Schienen.

$$P_2 = \mu_1 (Q + q)$$

wo μ_1 den Reibungscoefficient $= 0{,}001$; q das Gewicht der Räder und Achsen bedeutet.

3. Die Schwerkraft bei Ueberwindung von Steigungen.

$$P_3 = (Q + q) \sin \alpha$$

wo α der Elevationswinkel der Steigung ist.

4. Der Luftwiderstand.

$$P_4 = 0{,}0625\, m \cdot v^2 \cdot F$$

wo v die Geschwindigkeit des Wagenzuges, F die dem Winde entgegenstehende Fläche des Zuges und m ein von dem Verhältnifs der Wagenlänge zu deren Querschnitt und den gegenseitigen Entfernungen der Wagen abhängiger Coefficient 1,10 bis 1,43. Pambour bestimmt F aus der Summe S zämmtlicher Wagen incl. Locomotive und Tender; für den ersten 70 □Fufs und für jeden folgenden 10 □Fufs, mithin $F = 10(S + 6)$ □Fufs.

Die Summe der Widerstände ist $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Harding gibt folgende mit der Erfahrung stimmende Formel für die erforderliche Zugkraft der Locomotiven in englischen Pfunden für jedes Ton

$$P = 5{,}9964 + 0{,}3335 \cdot V + 0{,}002567 \frac{V^2}{Q} F$$

wo P die Zugkraft, V die Geschwindigkeit des Zuges per Stunde in englischen Meilen, Q das Gewicht des Zuges in Tons und F die Widerstandsfläche in □Fufs bedeuten. Z. B. ein Zug hat die Geschwindigkeit $V = 6$ preufs. Fufs, per Stunde = 28,0833 engl. Meilen, dessen Gewicht sei 4000 Zoll-Centner = 196,84 engl. Tons, die Widerstandsfläche = 250 preufs. □Fufs = 265 engl. □Fufs, so ist die Zugkraft pro Ton in englischen Pfunden

$$5{,}9964 + 9{,}3658 + 2{,}7255 = 18{,}0877 \text{ engl. Pfd.}$$

Die gesammte Zugkraft für den Zug

$$= 18{,}0877 \times 196{,}84 = 3560{,}4 \text{ engl. Pfund} = 3230 \text{ Zollpfund.}$$

Löwe, Astr. (♌). Das fünfte Himmelszeichen der nördlichen Halbkugel,

fängt 30 Grad vom Sommerwendepunkt, am Ende des Krebses an und endet am Anfang der Jungfrau, 60 Grad vom Sommerwendepunkt.

Logarithmen sind die Stellenzahlen einer geometrischen Reihe, die nach den Potenzen einer beliebigen Zahl, der Grundzahl fortschreitet. Ist z. B. die Reihe:

$$A,\ A^2,\ A^3,\ A^4 \ldots\ldots A^n$$

so ist A die Grundzahl, Basis und die Zahlen 1, 2, 3 ... n sind Logarithmen. Nämlich 1 ist der Logarithmus von A', 2 der Log. von A^2, n der Log. von A^n.

Die Logarithmen sind also zugleich die Exponenten einer Zahl, diese als Potenz einer gegebenen Zahl A betrachtet.

Wie die Glieder der Reihe eine geometrische, so bilden deren Logarithmen eine arithmetische Reihe.

Man kann die Reihe rückwärts fortsetzen; dann erhält man

$$A^{-n},\ A^{-(n-1)},\ \ldots\ldots A^{-2},\ A^{\ 1},\ A^0,\ A',\ A^2,\ \ldots\ldots A^n$$

Deren Logarithmen sind der Reihe nach und unabhängig von der Gröfse der Basis

$$-1,\ -(n-1) \ldots\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots n.$$

Um aus einem Gliede ein nächst vorhergehendes zu finden hat man es durch die Grundzahl zu dividiren. $\frac{A^4}{A} = A^3$; eben so $\frac{A'}{A'} = A^0 = 1$.

Bei jeder beliebigen Grundzahl also ist der Log. der Basis = 1, der Log. von 1 = 0. Ist die Basis > 1, so haben alle Zahlen gröfser als 1 positive, alle Zahlen kleiner als 1 negative Logarithmen. Ist die Basis < 1, so haben alle Zahlen < 1 positive, alle Zahlen > 1 negative Logarithmen Der Log. von 0 ist $= \pm\infty$, d. h. Null hat keinen Log. Die Zusammenstellung der Logarithmen mit ihren Zahlen in Beziehung auf eine bestimmte Basis heifst ein Logarithmensystem und man erhält so viele Systeme als Basen man annimmt.

Der Art. Briggsche Logarithmen hat schon den Nutzen und die Anwendung der Logarithmen dargethan, und es kann demnach zum Bedürfnifs des practischen Rechnens kein anderes System geben, als das unserem dekadischen System zugehörige dekadische Logarithmensystem, das System dessen Basis = 10 ist.

Der Art. „Basis eines Logarithmensystems" zeigt noch die Begründung eines zweiten Systems, welches aus wissenschaftlichen Gründen, nämlich weil der Modul = 1, das einfachste System ist und daher auch das natürliche Logarithmensystem genannt wird.

2. In dem Art. Basis eines Logarithmensystems sind nun folgende Formeln entwickelt.

Der Logarithmus einer Zahl a, wenn die Basis des Systems b ist,

$$\log a = \frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots\ldots}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots\ldots} \qquad (1)$$

Der Modul des Systems also

$$M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1) + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots} \qquad (2)$$

3. Beide Formeln sind zu numerischen Berechnungen nicht anzuwenden. Durch Umformungen aber gelangt man zu brauchbareren Formeln.

Setzt man zuerst $a - 1 = x$, so ist $a = 1 + x$. Man erhält, diesen Werth in Gleichung 1 eingeführt, und für 1 dividirt durch den Nenner $= M$ gesetzt:

$$\log(1+x) = M\left[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots\right] \qquad (1)$$

Nimmt man den negativen Werth von x, so hat man

$$\log(1-x) = -M\left[x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots\right] \qquad (2)$$

Die zweite Gleichung von der ersten abgezogen gibt

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \ldots\ldots\right) \qquad (3)$$

Diese Gleichung ist schon deshalb geeigneter zu Berechnungen, weil in der

Reihe nur positive Vorzeichen sind, allein sie convergirt nicht, und es kann dies nur geschehen, wenn x in einen ächten Bruch umgestaltet wird. Man gelangt dazu, wenn man unmittelbar $x = \frac{1}{y}$ setzt.

Dann ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}} = \frac{y+1}{y-1}$ und man hat

$$log \frac{y+1}{y-1} = log(y+1) - log(y-1) = 2M\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \ldots\right] \quad (4)$$

4. Hat man also den *log* von einer Zahl $y-1$ gefunden, so kann man aus dieser Formel 4 den *log* $(y+1)$ finden. Denn vorläufig von dem Modul M abgesehen, oder denselben = 1 gesetzt, so dafs die Logarithmen natürliche sind, hat man aus Gl. 4:

$$logn(y+1) = logn(y-1) + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{7y^7} + \ldots\right) \quad (1)$$

Nun ist $log\,1 = 0$; für $y = 2$ ist $y - 1 = 1$ und $y + 1 = 3$. Demnach ist

$$logn\,3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots\ldots\right)$$

Um dies Beispiel practisch auszuführen ist

$\frac{1}{2} = 0{,}50000\ 00000$

$\frac{1}{3\cdot 2^3} = 0{,}04166\ 66667$

$\frac{1}{5\cdot 2^5} = 0{,}00625\ 00000$

$\frac{1}{7\cdot 2^7} = 0{,}00111\ 60714$

$\frac{1}{9\cdot 2^9} = 0{,}00021\ 70139$

$\frac{1}{11\cdot 2^{11}} = 0{,}00004\ 43892$

$\frac{1}{13\cdot 2^{13}} = 0{,}00000\ 93900$

Latus 0,54930 35312

Transport 0,54930 35312

$\frac{1}{15\cdot 2^{15}} = 0{,}00000\ 20345$

$\frac{1}{17\cdot 2^{17}} = 0{,}00000\ 04488$

$\frac{1}{19\cdot 2^{19}} = 0{,}00000\ 01004$

$\frac{1}{21\cdot 2^{21}} = 0{,}00000\ 00227$

$\frac{1}{23\cdot 2^{23}} = 0{,}00000\ 00052$

$\frac{1}{25\cdot 2^{25}} = 0{,}00000\ 00003$

Summa 0,54930 61431

Mithin

$logn\,3 = 1{,}09861\ 22862$

Nun findet man $logn\,2$, denn man hat

$$ln(3+1) = ln(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

oder

$$ln\,4 = ln\,2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

Es ist aber $ln\,4 = 2\,ln\,2$; mithin entsteht

$$ln\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

5. Man kann, wie Vega angiebt, die Reihe noch convergirender erhalten:

Denn setzt man für x den Werth $\frac{1}{2p^2-1}$ so hat man $1 + x = \frac{2p^2}{2p^2-1}$

$$1 - x = 2\cdot\frac{p^2-1}{2p^2-1}$$

Nun hat man

$$ln\frac{1+x}{1-x} = ln\frac{2p^2}{2p^2-1} - ln\,2\,\frac{p^2-1}{2p^2-1}$$

aber auch nach No. 3, Formel 3

$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right)$$

Mithin $ln\frac{2p^2}{2p^2-1} - ln\,2\frac{p^2-1}{2p^2-1} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right)$

woraus reducirt $2\,ln\,p - ln\,(p^2-1) = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right)$

Mithin wenn man $(p^2-1) = (p+1)(p-1)$ setzt:

$$ln\,p = \tfrac{1}{2}\,[ln\,(p+1) + ln\,(p-1)] + \left(\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3\,(2p^2-1)^3}+\frac{1}{5\,(2p^2-1)^5}+\ldots\right) \quad (1)$$

Setzt man in diese Gleichung zuerst $p = 2$ und dann $p = 3$, so erhält man

$$ln\,2 = \tfrac{1}{2}\,ln\,3 + \tfrac{1}{2}\,ln\,1 + \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\ldots\right)$$

$$ln\,3 = \tfrac{1}{2}\,ln\,4 + \tfrac{1}{2}\,ln\,2 + \left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\frac{1}{5\cdot 17^5}+\ldots\right)$$

oder reducirt und geordnet

$$ln\,2 = \tfrac{1}{2}\,ln\,3 + \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\ldots\right)$$

$$ln\,2 = \tfrac{2}{3}\,ln\,3 - \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\frac{1}{5\cdot 17^5}+\ldots\right)$$

woraus, die erste von der zweiten abgezogen

$$ln\,3 = 4\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\ldots\right) + 6\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\ldots\right) \quad (2)$$

Diesen Werth in eine der beiden letzten Gleichungen gesetzt

$$ln\,2 = 2\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\ldots\right) + 4\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\ldots\right) \quad (3)$$

Hat man $log\,2$, $log\,3$ und hierzu $log\,5$ gefunden, so erhält man

$ln\,10 = logn\,2 + logn\,5 = 2{,}30258\,50929$ (4)

6. Bezeichnet man die von x abhängige Gröſse, welche mit dem Modul M multiplicirt den $log\,br$ von x ergibt, mit φx, so ist

$$log\,br\,x = M\cdot\varphi x$$
$$logn\,x = \varphi x$$

Hieraus folgt $M = \frac{log\,br\,x}{logn\,x}$ (1)

D. h. **Der Modul des Brigg'schen Systems ist gleich dem Brigg'schen Logarithmus irgend einer Zahl dividirt durch den natürlichen Logarithmus derselben Zahl.**

Setzt man in Formel 1 für x die Zahl 10, so hat man

$$M = \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{2{,}30258\ldots} = 0{,}43429\,44819\ldots \quad (2)$$

Setzt man in Formel 1 für x die Basis e der natürlichen Logarithmen so hat man $M = log\,br\,e = 0{,}43429\ldots$ (3)

Es ist also der Modul des Brigg-schen Systems = dem Brig. Logarithmus der Basis des natürlichen Systems.

Man erhält zugleich diese Basis e, wenn man den zum Logarithmus 0,43429 ... gehörenden Numerus findet.

In dem Art. „**Differenzial**", No. 18, pag. 265, ist für diese Basis die Formel entwickelt:

$$e = 2 + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(4)} + \ldots \frac{1}{(n)} \quad (4)$$

Die Ausrechnung ist sehr einfach: man erhält

$$2 = 2{,}00000\,00000$$
$$\frac{1}{(2)} = 0{,}50000\,00000$$
$$\frac{1}{(3)} = 0{,}16666\,66667$$
$$\frac{1}{(4)} = 0{,}04166\,66667$$
$$\frac{1}{(5)} = 0{,}00833\,33333$$
$$\frac{1}{(6)} = 0{,}00138\,88888$$
$$\frac{1}{(7)} = 0{,}00019\,84127$$
$$\frac{1}{(8)} = 0{,}00002\,48016$$

Latus 2,71827 87698

Transport 2,71827 87698

$\frac{1}{(9)} = 0{,}00000\ 27557$

$\frac{1}{(10)} = 0{,}00000\ 02766$

$\frac{1}{(11)} = 0{,}00000\ 00251$

$\frac{1}{(12)} = 0{,}00000\ 00021$

$\frac{1}{(13)} = 0{,}00000\ 00002$

Summa $e = 2{,}71828\ 18285$

7. Setzt man in No. 3, Formel 1, für $\log(1 + x)$ diesen Logarithmus $= y$, so hat man die Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$

und wenn man diese mit Hülfe der unbekannten Coefficienten umkehrt, nämlich wenn man schreibt

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots$$

und die Coefficienten A, B, C … entwickelt (s. „Arcus", No. 9, pag. 110), so erhält man die Formel, aus welcher man den Numerus x bei gegebenem $\log x = y$ findet.

Man erhält nämlich bei Anwendung des binomischen Satzes

$$\begin{aligned} x = Ax &- \tfrac{1}{2}Ax^2 + \tfrac{1}{3}Ax^3 - \tfrac{1}{4}Ax^4 + \tfrac{1}{5}Ax^5 - \ldots \\ &+ Bx^2 - Bx^3 + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3})Bx^4 - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2})Bx^5 + \ldots \\ &+ Cx^3 - \tfrac{3}{2}Cx^4 + (\tfrac{3}{4} + 1)Cx^5 - \ldots \\ &+ Dx^4 - 2Dx^5 \\ &+ Ex^5 \end{aligned}$$

Hieraus $0 = (A - 1)x + (B - \tfrac{1}{2}A)x^2 + (\tfrac{1}{3}A - B + C)x^3 + (-\tfrac{1}{4}A + \tfrac{11}{12}B - \tfrac{3}{2}C + D)x^4 + (\tfrac{1}{5}A - \tfrac{5}{6}B + \tfrac{7}{4}C - 2D + E)x^5$

Jeden einzelnen der Coefficienten $= 0$ gesetzt giebt

$A = 1$

$B = \tfrac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$

$C = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$E = \frac{1}{120} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w.

Mithin ist

$$x = y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

oder

$$x = \ln x + \frac{(\ln x)^2}{(2)} + \frac{(\ln x)^3}{(3)} + \frac{(\ln x)^4}{(4)} + \ldots \frac{(\ln x)^m}{(m)}$$

8. Ist von einer Zahl x der natürliche Logarithmus gegeben, so erhält man aus No. 6, Formel 1 den Brigg'schen Logarithmus

$\log br\, x = M \ln x = 0{,}43429 \ldots \times \ln x$

und ist der Brigg'sche Logarithmus von x gegeben,

$\log n\, x = \frac{1}{M} \log br\, x = 2{,}30258 \ldots \times \log br\, x$

Logarithmische Linie oder Logistische Linie ist eine krumme Linie, deren Ordinaten zu Abscissen, welche nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, eine geometrische Reihe bilden.

Ist Fig. 799 AX die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Coordinaten, und man nimmt von A aus auf derselben lauter gleiche aufeinander folgende Abscissenstücke $AB = BD = DE \ldots = a$, so dafs die Abscissen von A aus: a, $2a$, $3a$, … na sind; errichtet in A auf AX eine Normale von der beliebigen Länge b, ferner in den anderen Abscissenpunkten ebenfalls Normalen von den Längen c, d, e … so dafs $b : c = c : d = d : e \ldots$, dafs also $\frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots$ ein constantes Verhältnifs ist, so liegen sämmtliche Endpunkte der Ordinaten in einer logarithmischen Linie. Nimmt man bei diesem constanten Verhältnifs b als die erste und c als die zweite Ordinate, so sind die Längen der Ordinaten der Reihenfolge nach

Fig. 799.

$$b,\ c,\ \frac{c^2}{b},\ \frac{c^3}{b^2},\ \ldots\ \frac{c^n}{b^{n-1}}$$

wo $\frac{c^n}{b^{n-1}}$ die Ordinate y für die Abscisse $na = x$ ist, indem b die Ordinate ist für die Abscisse $= 0$.

2. Schreibt man $n = \frac{x}{a}$, so hat man die rechtwinklige Coordinatengleichung

$$y = b \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{x}{a}}$$

und wenn man $b = 1$ setzt

$$y = c^{\frac{x}{a}}$$

oder $y^a = c^x$

oder $a\ ln\ y = x\ ln\ c$

und $ln\ y = \frac{x}{a}\ ln\ c$

woraus $\frac{\partial y}{y} = \frac{ln\ c}{a}\ \partial x$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ln\ c}{a}\ y = \frac{ln\ c}{a} \cdot c^{\frac{x}{a}}$

Dieser Ausdruck bezeichnet zugleich die Tangente des Winkels $GHF = \alpha$, den die Tangente GH in H mit der Abscisse bildet.

Hieraus ist die Subtangente $FH = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{y \cdot \frac{ln\ c}{a}} = \frac{a}{ln\ c}$

welche mithin für jeden Punkt der Linie constant ist.

Die Subnormale $FJ = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ln\ c}{a}\ y^2$

Die Tangente $GH = \frac{a}{ln\ c}\sqrt{1 + \left(\frac{ln\ c}{a}\ y\right)^2}$

Die Normale $GJ = y\sqrt{1 + \left(\frac{ln\ c}{a}\ y\right)^2}$

Für den Mittelpunkt der Krümmungskreise

Die Abscisse $= x - \frac{a^2 + y^2 (ln\ c)^2}{a\ ln\ c} = x - \frac{1 + y^2\left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2}{\frac{ln\ c}{a}}$

Die Ordinate $= y + \frac{a^2 + y^2 (ln\ c)^2}{y\ (ln\ c)^2} = y + \frac{1 + y^2\left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2}{y\left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2}$

Der Halbmesser $= \frac{[a^2 + y^2 (ln\ c)^2]^{\frac{3}{2}}}{ay\ (ln\ c)^2} = \frac{\left[1 + y^2\left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2 y}$

3. Zur Rectification der Curve hat man die allgemeine Formel Bd. II., pag. 191:

$$l = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\ \partial x$$

Mithin für diesen Fall die Länge von A bis G:

$$l = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}\ \partial y = \int\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{ln\ c}{a}\ y\right)^2}}{\frac{ln\ c}{a}\ y} \cdot \partial y = \frac{a}{ln\ c}\int\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{ln\ c}{a}\right)^2 y^2}}{y} \cdot \partial y$$

Das Integral wird gelöst nach Bd. III., pag. 342, Formel 234, wenn man $a = 1$; $b = 0$ und $c = \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2$ setzt, und man hat

$$\int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2 y^2}}{y} \cdot \partial y = \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} + \int \frac{\partial y}{y\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}$$

Dieses letzte Integral ist nach pag. 342, Formel 231

$$= -\,ln\left[2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y}\right]$$

Man hat demnach, wenn man den Factor 2 im Logarithmus mit zu der Constante rechnet

$$\lambda = \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} - ln\,\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y}\right] + C$$

Für $y = 1$ wird $\lambda = 0$, mithin hat man

$$0 = \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2} - ln\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}\right)\right] + C$$

Mithin vollständig

$$\lambda = \frac{1}{\frac{ln\,c}{a}} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2} - ln\,\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}\right)}\right]$$

4. Die Fläche zwischen b und FG erhält man mit Hülfe der allgemeinen Quadraturformel, Bd. II., pag. 192: $F = \int y\,\partial x + C$

Für diesen Fall ist

$$F = \int y \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \partial y = \int y \cdot \frac{ln\,c}{ay} \cdot \partial y = \frac{y}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} + C$$

Für $y = b = 1$ wird $F = 0$, daher vollständig

$$F = \frac{y - 1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}$$

5. Die Oberfläche, welche der Bogen bei seiner Umdrehung um die Abscisse AX beschreibt erhält man mit Hülfe der allgemeinen Formel Bd. II., pag. 194:

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \partial x$$

Für den vorliegenden Fall also

$$F = 2\pi \int y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} \cdot \frac{\partial y}{y} = \frac{2\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \int \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} \cdot \partial y$$

Also das letzte Integral nach Bd. III., pag. 341, Formel 219

$$= \tfrac{1}{2} y \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial y}{\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}$$

Das letzte Integral nach Bd. III., pag. 341, Formel 227

$$= \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln\left(y \cdot \frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}\right)$$

Hieraus

$$F = \frac{2\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[\tfrac{1}{2} y \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} + \tfrac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln\left(y\frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}\right)\right] + C$$

Die Constante wie in den vorigen Formeln; mithin vollständig und reducirt:

$$F = \frac{\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[y\sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln \frac{y\frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{\frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}}\right]$$

6. Den Körper, den die zwischen b, FG und AF befindliche Ebene bei der Umdrehung um AX beschreibt, erhält man mit Hülfe Bd. II., pag. 1951

$$K = \pi \int y^2 \partial x$$

Für diesen Fall ist

$$K = \pi \int y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \partial y = \frac{\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \int y \,\partial y = \frac{\pi}{2\frac{ln\,c}{a}} y^2 + C$$

Mithin vollständig $K = \frac{\pi}{2\frac{ln\,c}{a}} \times (y^2 + 1)$

Logarithmischer Maafs- oder Rechnenstab ist ein Maastab, der mit den natürlich auf einander folgenden Zahlen beschrieben ist, deren zugehörige Längen aber die Logarithmen der Zahlen sind. Der Anfangspunkt hat die Zahl 1 weil $log\,1 = 0$ ist; $log\,1000$ ist $= 3$. Nimmt man nun irgend eine Länge zum Stabe für die Zahlen von 1 bis 1000, theilt diese in 3000 gleiche Theile, so erhalten hiervon die Länge von Aufang bis

zur Zahl	100 = 2000 Theile, also			
„ „	200 = 2301	„	von 100 bis 200 = 301 Theile	
„ „	300 = 2477	„	„ 200 „ 300 = 176	„
„ „	400 = 2602	„	„ 300 „ 400 = 125	„
„ „	500 = 2699	„	„ 400 „ 500 = 97	„

u. s. w.

Macht man nun in jedem Zwischenraum 10 Abtheilungen, so erhält man die Längen der Logarithmen für die Zehner, und theilt man diese wieder in 10 Theile, die der Einer. Das Intervall zwischen den Zahlen 1 und 2 würde 301 der gleichen Theile, das zwischen 999 und 1000 nur 4/10 der 3000 gleichen Theile lang sein.

Hat man nun zwei solche Stäbe, so kann man mit denselben multipliciren und dividiren. Denn um 47 × 53 zu finden braucht man nur an den Theilstrich der Zahl 53 des einen Stabes den Nullpunkt des zweiten Stabes anzulegen und auf dem ersten die Zahl abzulesen, auf welche die Zahl 47 des zweiten Maafsstabes trifft. Beim Dividiren hat man zwei Maafse abzuziehen. Der Gebrauch solcher Stäbe ist jedenfalls von keinem Vortheil; sie sollen früher von Lehrern angewendet worden sein, um den Schülern die Eigenschaften der Logarithmen augenscheinlich zu machen.

Logarithmotechnie ist die Anweisung, Formeln zur Auffindung der Logarithmen aus gegebenen Zahlen und Zahlen aus gegebenen Logarithmen möglichst schnell auch möglichst viele Decimalen darzustellen.

Logistische Linie, s. v. w. „Logarithmische Linie“.

Logometer, s. v. w. „Logarithmischer Maafsstab“.

Longimetrie hiefs früher der erste Theil der Geometrie, welcher sich nur mit den Linien und deren Lagen untereinander beschäftigt; ihr folgte die Planimetrie. Den Systemen zufolge, nach welchen die Geometrie vorgetragen wird, sind aber Longimetrie und Planimetrie nicht von einander zu trennen. Euklids erster Lehrsatz ist schon ein Satz über die Congruenz der Dreiecke.

Wenn man dagegen ein Lehrsystem begründet, wie ich es in dem Art. Axiom am Schlufs angeregt habe, dann ergibt sich eine vollständige Longimetrie, ohne dafs die Congruenz der Dreiecke oder andere planimetrische Gesetze zu Beweisen hinangezogen werden müssen.

Longitudinalschwingungen kommen nur beim Schall vor.

Loth ist die geradlinige Richtung nach dem Mittelpunkt der Erde. Sämmtliche nahe an einander stehende Lothe auf der Erde sichtbar gemacht, bilden verlängerte Halbmesser einer Kugel und durch Nivellements um die Erde bestimmte Horizontalen würden eine Kugeloberfläche erzeugen.

Die Richtung eines Loths heifst lothrecht. Es geschieht nicht selten, dafs Linien und Ebenen, die rechte Winkel mit einander bilden, lothrecht auf einander genannt werden. Besser und angemessener ist es, diese Lagen mit winkelrecht oder normal zu bezeichnen.

Ludolphsche Zahl ist die Zahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$ welche das Vielfache des Durchmessers als Länge des Kreisumfangs angibt. Ludolph von Ceulen hat diese Zahl zuerst auf 32 Decimalen berechnet, woher man sie nach seinem Namen benannt hat.

Luft, atmosphärische, deren physikalische Eigenschaften s. in dem Art. „Aerostatik“, Bd. I., pag. 39. Menge und Geschwindigkeit der Luft bei Ausströmungen in einen absolut leeren Raum, von dichterer Luft in einen mit dünnerer Luft angefüllten Raum, Füllung leerer und mit dünner Luft angefüllter Gefäfse durch dichtere Luft und bei verschiedenen Temperaturen nebst Zeitbestimmung, s. den Art. „Ausflufs der Luft“ Bd. I, pag. 230. Siehe ferner den Art. „Atmosphäre.“

Luftbild ist das Bild eines Gegenstandes, dessen Strahlen von einem Linsenglase aufgefangen, durchgelassen, dabei reflectirt und auf die durch dessen Brennpunkt normal auf der Axe befindliche Ebene geworfen werden, welche in dieser Ebene das Bild ausmachen.

Ist diese Ebene mit einer lichten materiellen Fläche z. B. mit einem Blatt Papier versehen, so ist das Bild sichtbar; ist die Ebene unbelegt, also eine freie Luftebene, so ist das Bild unsichtbar und ein Luftbild.

Fig. 91, Bd. I., pag. 143 ist ein Kepler'sches Fernrohr; NN^0 ein sehr weiter Gegenstand, z. B. die halbe Vollmondscheibe im Durchschnitt. Von dieser Scheibe werden sämmtliche auf das Objectivglas DE fallende Strahlen in die Ebene des Brennpunkts geworfen und dort zu einem verkehrten Luftbilde cn vereinigt. Da nun c zugleich der Brennpunkt des Glases AB ist, so werden die Strahlen des Luftbildes von AB aufgefangen und dem vor AB befindlichen Auge vergröfsert sichtbar gemacht, (s. „Auge“ mit Fig. 116 und 117) indem das Luftbild auf der Netzhaut sich abspiegelt.

Fig. 621 ist das Galileische Fernrohr mit demselben Objectivglase DE, das Ocularglas GH ist biconcav, und wenn dasselbe nicht vorhanden wäre, so würde in der Ebene $C'C''$ des zum Glase DE gehörenden Brennpunkts das Luftbild von NM wie in dem vorigen Fernrohr entstehen. Das Ocularglas aber empfängt die Strahlen vorher und reflectirt sie divergirend für das vor GH befindliche Auge.

In den Erdfernröhren, Fig. 622 und 623 sind nm und $n'm'$ desgleichen die von dem Auge wahrgenommenen Luftbilder des beobachteten Gegenstandes.

Luftdruck, s. die Art.: „Aerodynamische Gesetze, Aerostatik und Atmosphäre“.

Lunation, s. v. w. Mondwechsel, und zwar entweder die Summe der aufeinander folgenden Mondphasen oder die Zeit von dem Anfang einer bestimmten Mondphase bis zum Anfang derselben zunächst folgenden Phase: z. B. von Neumond bis zum nächst folgenden Neumond.

Lupe ist ein aus nur einem Glase bestehendes also das einfachste Mikroskop, mit dessen Hülfe man kleine Gegenstände in vergröfsertem Maafsstabe sieht. Die Wirkung der Lupe wird durch den Art. „Brille“, No. 2, pag. 431 mit Fig. 262 erklärt: Es ist dort nachgewiesen, dafs ein biconvexes Glas AB einen kleinen Gegenstand ab, wenn er zwischen das

Glas nnd dessen Brennpnnkt N gebracht wird, dadnrch vergröfsert, dafs er die von dem Gegenstande aufgefangenen Lichtstrahlen divergirt, nnd dafs dss Ange nnn diese Strahlen geradlinig sn einem gröfseren Bilde verfolgt.

Es ist die Brennweite CN des Glases mit f, die Entfernnng Cc des Gegenstandes ab von der Axe des Glases mit a nnd die Entfernnng Cc' des entstehenden Bildes $a'b'$ mit b bezeichnet, nnd Formel 3 entwickelt

$$b = \frac{af}{f-a} \text{ nnd } \frac{b}{a} = \frac{f}{f-a}$$

Nun ist aus $ab : a'b' = Cc : Cc'$

$$a'b' = \frac{Cc'}{Cc} \cdot ab = \frac{b}{a}(ab)$$

d. h. die Vergröfserung $a'b'$ beträgt das $\frac{b}{a}$ fache = das $\frac{f}{f-a}$ fache.

Je näher demnach a bei constantem f, also bei einer bestimmten Lnpe dem Brennpnnkt N gerückt wird, desto gröfser erscheint er.

Es ist $\frac{f}{f-a} = 1 + \frac{a}{f-a}$

Hierans geht hervor, dafs die Vergröfserung nm so bedentender wird, je kleiner man die Brennweite f nimmt, also je convexer die Lnpe ist.

M.

Maafs ist die Einheit zu Bestimmung der Gröfsen mefsbarer Gegenstände. Einheit und Vielheit können nur gleichartig sein, daher gibt es so vielerlei Maafse als Mefsbares. Die zu messenden materiellen Gegenstände sind in drei Dimensionen vorhanden, daher gibt es für diese Längenmaafse, Flächenmaafse, Körpermaafse (s. diese 3 Art).

In dem Art. „Längenmaafs" ist auch eines zu wünschenden allgemeinen Längenmaafses gedacht; d. h. eines für sämmtliche Bewohner der Erde geltenden Normallängenmaafses, und mit diesem würde auch offenbar ein allgemeines Normalflächenmaafs und ein allgemeines Normalkörpermaafs gegeben sein.

Wie das Maafs für Längen, so sollten auch die Maafse für messungsbedürftige Gegenstände anderen Characters Normalmaafse sein. Zunächst das Maafs für Druckkräfte, das Gewichtsmaafs, welches besonders hierher gehört. In dem Art. „Gewicht" ist die Begründung eines Gewichtsmaafses möglichst auseinandergesetzt, und dafs die Wissenschaft schon lange ein auf dem Erdboden durchweg gleichgeltendes Normalgewicht, nämlich das specifische Gewicht eingeführt hat. Dasselbe Recht hat aber auch die Verkehrswelt in Beziehung auf die von derselben verlangte Kenntnifs des absoluten Gewichts einer Waare oder Sache. In demselben Art. ist nachgewiesen, wie in den Ländern Preufsen, Frankreich, England, Neapel und Rufsland die Normal-Landesgewichte bestimmt worden sind.

Die Bestimmung eines Normalgewichts ist abhängig von zwei Elementen, nämlich von dem Stoff der abgewägt wird und von dem Kubikmaafs, welches der Stoff ausfüllt. Alle Regierungen der genannten Länder haben zum Stoff das destillirte Wasser genommen, welches auf der ganzen Erde einerlei Gewicht hat. Warum aber in verschiedenen Temperaturen?

Preufsen 15° R., Frankreich 3,5° R., England und Rufsland 62° F. = 13¼° R., Neapel 12,95° R. Vielleicht sind diese Grade die mittleren Temperaturen der Länder, die der Hauptstädte sind es nicht. Denn die mittlere Temperatur in Berlin ist 9,1 C. = 7,28° R., in London 10,8 C. = 8,64° R. Neapel hat eine viel gröfsere mittlere Temperatur und nimmt die des Quecksilbers am geringsten. Für die Temperatur des Wassers sollte 3,5° R. wie in Frankreich zu Grunde liegen, wobei es die gröfste Dichtigkeit hat.

Ferner hat jede der Regierungen den Würfel eines ihrer Landes-Längenmaafse zu Grunde gelegt, und es darf nur ein und dasselbe Kubikmaafs sein, wozu der Würfel eines allgemeinen Normal-Längenmaafses zu nehmen sein würde.

Das Maafs für die Zeit, s. den Art. „Kalender".

Maafse, französische, s. u. „Decimalmaafs".

Maafsstäbe sind Stäbe, deren Längen eine bestimmte Menge von gesetzlichen Längeneinheiten enthalten. Auch der Feldmesser gebraucht dieselben. Gradmessungen verlangen äufserst genaue metallene Stäbe. Längen von Flächen, die

bebaut werden sollen und überall wo es auf Genauigkeit ankommt; werden statt mit der Kette mit Maafsstäben gemessen. Man nimmt zu denselben am besten harziges Kiefernholz, weil dieses am wenigsten durch Temperaturwechsel Dimensionsveränderungen erleidet; sie werden um Abnutzung zu verhindern, an den Enden mit winkelrecht auf die Länge gerichteten metallenen Ringen versehen. Beim Messen legt man die Stäbe auf feste Stützen, am besten auf Schemel, deren Platten zur Herstellung der Horizontale leicht und schnell auf- und abwärts geschoben werden können. Zweckmäfsig, besonders sicherer ist es, wenn man zwei Maafsstäbe anwendet, so dafs immer der eine an den anderen liegenbleibenden zu Fortsetzung der Vermessung angelegt werden kann. Die Beobachtung der Horizontale während des Messens geschieht mit Hülfe einer kleinen Setzwaage; auch kann man die Maafsstäbe mit etwa einen Fufs hohen eisernen Visirstiften an einem Ende versehen, die bei beiden an einanderliegenden Stäben in den äufsersten Punkten sich befinden.

Mac-Laurinsche Reihe. Deren Entwickelung s. den Art. „Differenzialrechnung", pag. 289, Bedingungen unter welchen sie convergirt, pag. 292; deren Ergänzungsglied, pag. 293 Anwendung derselben, Bd. I. pag. 110, 113 und an vielen anderen Orten.

Magister matheseos ist der Ehrenname, mit welchem der 47te Satz des Euklid, Buch I. bezeichnet wird (s. Art. „Dreiecke, ebene", No. 21, pag. 327 mit Fig. 574).

Magnete waren zuerst ausschliefslich Erze, welche Eisen anziehen; der Name rührt daher, dafs diese Erze nahe der Stadt Magnesia gefunden worden waren. Da man später lernte, auch dem Eisen selbst die magnetische Kraft mitzutheilen, erfand man künstliche Magnete, die in der Form der Magnetnadeln so grofsen Nutzen gewähren, indem man entdeckt hatte, dafs der ganze Erdkörper die magnetische Kraft besitzt.

Eine frei horizontal hangende Magnetnadel nämlich nimmt immer eine bestimmte Richtung nach Norden zu an und weicht in den verschiedenen Orten mehr und weniger von dem astronomischen Meridian ab, trifft auch in einigen Punkten genau mit demselben zusammen. Die durch die Richtung der Nadel gedachte lothrechte Ebene ist der magnetische Meridian des Orts; der Winkel zwischen diesem und dem astronomischen Meridian heifst die Declination oder Abweichung der Nadel, sie ist östlich, westlich und Null. Das Instrument für die Messung der Abweichung heifst Declinationsboussole, beim Seefahrer ist sie der Compafs.

Hängt man die Magnetnadel in ihrem Schwerpunkt frei auf, so bleibt sie nicht mehr horizontal, sie senkt sich in näher dem Nordpol liegenden Orten mit ihrer Nordseite immer tiefer und stellt sich endlich lothrecht. Kapitain Rofs hat diesen nördlichen magnetischen Pol der Erde unter 70° 5' nördlicher Breite 263° 14' östlicher Länge (Greenwich = 0) gefunden. Diese lothrechte Abneigung, die Inclination nimmt bis in die Gegend des Aequators immer mehr ab und wird dort an einzelnen Punkten = 0, die Nadel liegt dort vollkommen horizontal. Sämmtliche Punkte der Erdoberfläche daselbst zu einer Curve verbunden geben den magnetischen Aequator. Weiter südlich wird die Inclination entgegengesetzt, die Südseite der Nadel senkt sich immer mehr und so gibt es daselbst einen magnetischen Südpol. Je stärker die Inclinationen werden, desto unzuverlässiger wird der Compafs.

Magnetnadel, astatische, s. „Astatische Magnetnadel".

Manometer, s. „Ausflufs der Luft" No. 3, pag. 230 mit Fig. 133.

Mantisse ist der Decimalbruch in den Logarithmen, s. Bd. I., pag. 429, rechts oben, und „Characteristik", Bd. II. pag. 20.

Mariottesches Gesetz: Das Volumen der Gase verhält sich umgekehrt wie der auf sie wirkende Druck. Oder die Elasticität der abgesperrten trockenen Luft ist ihrer jedesmaligen Dichtigkeit proportional, wobei also vorausgesetzt wird, dafs die Luft keine Feuchtigkeit oder Dünste enthält (s. den Art. „Aerodynamische Gesetze", No. 5, pag. 39).

Mars (♂) ist der nächste Planet über der Erde, der erste der oberen Planeten, erscheint in einem auffallend röthlichen Lichte. Seine mittlere Entfernung von der Sonne ist 31500000 Meilen = der 1,523691 fachen der Erde von der Sonne. Seine siderische Umlaufszeit (Rückkehr zu demselben Fixstern) = 686,98 Tage, seine tropische Umlaufszeit (Rückkehr zur Nachtgleiche) = 686,93 Tage. Seine mittlere tägliche Bewegung $\left(\frac{686,98}{360°}\right) = 31' \, 26,7''$.

Seine Excentricität = 0,0932168, fast 1/10 der halben grofsen Axe. Neigung der Bahn gegen die Ekliptik 1° 51′ 6″, welche sich jährlich um 0,013 Secunde vermindert. Länge des aufsteigenden Knotens = 47° 59′ 58″. Gröfste Entfernung von der Sonne = 34436200 Meilen, kleinste = 28563800 Meilen. Der Durchmesser des Mars ist 890 bis 930 Meilen, also etwa halb so grofs als der Durchmesser der Erde. Seine scheinbare Gröfse ist in der Erdnähe 4″, in der Erdferne 2,7″. Seine gröfste Entfernung von der Erde ist gegen 55 Milionen, seine kleinste 7⅔ Millionen Meilen. Volum = 0,14 und Dichtigkeit = 0,948, Schwerkraft = ½ der Erde. Seine Axendrehung 24 Stunden 37 Min 20 Sec.

Maschine ist ein stabiles Bauwerk, welches dadurch, dafs Kräfte auf dasselbe wirken und durch dasselbe in Gröfse und Richtung zerlegt werden, selbst thätig wird zu dem Zweck, Körper mechanisch zu ändern oder deren Ortsänderung zu bewirken. Die Maschine unterscheidet sich also von Instrument dadurch, dafs dieses kein stabiles Bauwerk sondern eine transportable Handhabe ist, wenngleich es auch thätig wird; und es unterscheidet sich von dem Bauwerk Apparat genannt, auf welches Kräfte wirken, das aber nicht selbst zur Thätigkeit kommt. Ein Winkelmefs-Instrument, wenn es stabil ist, ist ein Apparat, Nonius und Mikrometerschraube sind Instrumente am Apparat. Eine Taschenuhr ist ein Apparat, das Gehwerk und das Hemmwerk sind Maschinen am Apparat (vergl. „Instrument“).

Masse eines Körpers ist die Menge der in dem Körper befindlichen materiellen Theile (vergl. „Gewicht, Dichtigkeit“).

Massenreduction. Eine Masse liegt da, wo sie liegt, fest; sie hat keine Ursach von selbst sich zu bewegen, eine Eigenschaft, welche man Beharrungsvermögen oder Trägheit nennt. Soll nun diese Masse bewegt werden, so mufs nothwendig eine Kraft auf sie einwirken.

Man stelle sich ein festes System von materiellen Linien und Flächen vor, welches durch eine Ueberwucht P in eine fortschreitende oder in eine drehende Bewegung gebracht werden soll, und es komme eine Masse vom Gewicht q hinzu und zwar auf einen Punkt A des Systems, dafs wenn P die Geschwindigkeit c hat, q die Geschwindigkeit v erhält. Ist nun p der Theil der zu Bewegung der Masse q erforderlichen Ueberwucht, so ist nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die auf den Punkt A auf q reducirte Ueberwucht $= \frac{c}{v} p$ als bewegende Kraft, die in A auf q wirkende beschleunigende Kraft $= \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q}$ und deren Beschleunigung $= g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q}$.

Denkt man sich nun statt der Masse q in A eine andere Masse $q_,$ in $A_,$, deren Geschwindigkeit $= v_,$, so ist die für sie in $A_,$ reducirte Ueberwucht $= \frac{c}{v_,} p$. Die beschleunigende Kraft $= \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,}$ und deren Beschleunigung $= g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,}$.

Diese Beschleunigungen beide wirken in verschiedenen Abständen von der Drehaxe und zwar so, dafs deren Geschwindigkeiten wie v zu $v_,$ sich verhalten, dafs also

$$g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q} : g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,} = v : v_,$$

Da beide aber dieselbe Ueberwucht p mit derselben Geschwindigkeit c erfordern, so müssen auch deren mechanische Widerstände einander gleich sein. D. h. es ist

$$g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q} \cdot v_, = g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,} \cdot v$$

oder reducirt $v^2 q = v_,^2 q_,$.

Ist die Bewegung drehend, so verhalten sich die Geschwindigkeiten v und $v_,$ der Massen q und $q_,$ wie deren Abstände l und $l_,$ von der Drehaxe und man hat

$$l^2 \cdot q = l_,^2 \cdot q_,$$

und es ist $q_, = \frac{v^2}{v_,^2} \cdot q = \frac{l^2}{l_,^2} \cdot q$.

Massen von einem Punkt auf einen anderen, wobei der Einflufs auf das System dasselbe bleibt, werden also dadurch reducirt, dafs man das Quadrat ihrer Geschwindigkeit durch das Quadrat der Geschwindigkeit des neuen Punkts, oder das Quadrat ihres Abstands von der Drehaxe durch das Quadrat des neuen Punkts von derselben dividirt und den Quotient mit der Masse multiplicirt.

2. Beim Gleichgewicht der Kräfte nennt man bekanntlich die Producte der Kräfte mit den Abständen von der Drehaxe die Momente der Kräfte; hier nun der

Aehnlichkeit wagen die Producte der Massen mit den Quadraten jener Abstände die Momente der Massen und um zugleich auszudrücken, dafs hierbei die Kräfte, welche etwa durch die Massen noch wirken könnten, aufser Betracht bleiben, werden jene Producte auch Momente der Trägheit oder Trägheitsmomente genannt.

Materie ist der Stoff, sind die materiellen Theile eines und mehrerer Körper in ihren wesentlichen von einander unterschiedenen Eigenschaften betrachtet, von denen die Mathematik absieht. Man sagt auch Stoff sei das Raum erfüllende, dasjenige, was in einerlei Zeit in einerlei Raum sich befindet.

Materieller Hebel, dessen Unterschied von mathematischem Hebel, s. den Art. „Hebel" zu Anfang.

Mathematik ist Gröfsenlehre, die Wissenschaft von den Gröfsen (s. den Art. „Gröfsen") deren es Zahlengröfsen und Raumgröfsen gibt. Sind diese Gröfsen blofs Gedankengröfsen, so heifst der Theil der Wissenschaft, welcher mit diesen sich beschäftigt, reine Mathematik; sind die Gröfsen aber mit unseren Organen wahrzunehmen, sind sie Gegenstände oder Erzeugnisse der Natur oder der Kunst, angewandte Mathematik.

Zahlengröfsen werden nie wahrgenommen, bei einer Mehrzahl oder einem Theil von Gegenständen nimmt man nur diese wahr. Die Rechenexempel $2 \times 3 = 6$ und 2×3 Thaler sind 6 Thaler sind ohne allen Unterschied, das benannte Einmaleins gehört nicht zur angewandten Mathematik und die höhere Analysis desgleichen nicht: Die ganze Arithmetik von der niedrigsten bis zur höchsten Stufe gehört der reinen Mathematik zu.

Die reine Mathematik hat also einen arithmetischen und einen geometrischen Theil.

Die Arithmetik beschäftigt sich in allen Stufen ihrer Lehren und Erkenntnisse mit bestimmten und unbestimmten Zahlen.

Die Gesetze des Verfahrens mit den ersteren werden aber allein aus den Lehren über das Verfahren mit den letzteren hergeleitet; die in den Elementarschulen gelehrte Rechenkunst ist schon eine Anwendung davon und wird für den tagtäglichen nothwendigen Verkehr eingeübt.

Die eigentliche Arithmetik (s. d.) ist die Lehre für Auffindung von allgemein geltenden Gesetzen über die verschiedenen Verbindungen von Zahlen, wie sie nur immer verlangt werden können, und diese Gesetze werden ermittelt mit Hülfe symbolischer Zeichen, der Buchstaben, von welchen jeder einzelne jede beliebige bestimmte Zahl bedeutet.

Die Geometrie (s. d.) beschäftigt sich mit den Raumgröfsen, und da der Raum drei Dimensionen hat, mit den Linien, Flächen und Körpern.

Die angewandte Mathematik ist die Lehre von den Aenderungen der Naturkörper in Folge äufserer Einwirkung auf dieselben durch Kräfte. Die Bedingungen, unter welchen sie entweder in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, d. h. im Gleichgewicht verbleiben, lehrt die Statik.

Die Bedingungen, unter welchen sie entweder aus der Ruhe in Bewegung kommen oder ihre Bewegung theils nach Richtung theils nach Geschwindigkeit ändern, die Mechanik.

Die Statik fester Körper heifst die Geostatik, die Statik tropfbar flüssiger Körper die Hydrostatik, die der luftförmigen Körper die Aerostatik.

Die Mechanik fester Körper heifst die Geomechanik, die Mechanik tropfbar flüssiger Körper die Hydrodynamik oder Hydraulik, die Mechanik luftförmiger Körper die Aerodynamik oder Pneumatik.

Mathematische Geographie ist der erste Theil der G., der Erdbeschreibung, welcher mit der Lage der Erde im Weltraume oder vielmehr gegen die Sonne und das ganze Sonnensystem, mit der Gestalt und Gröfse der Erde sich beschäftigt. Die mathematische G. hängt unmittelbar mit der Astronomie zusammen.

Mathematischer Punkt ist ein geometrischer Gedanke, die Grenze einer Linie, eine im Verschwinden begriffene Linie.

Mauerquadrant, s. u. „astronomischer Quadrant."

Maurerwaage, s. v. w. „Bleiwaage."

Maximum und **Minimum.** Der Art. „Gröfstes" löst die Aufgabe: die gröfsten und kleinsten Werthe einer gegebenen Function zu finden, aufserdem mehrere geometrische Maxima und Minima an Figuren und Körpern auf elementarem Wege.

Der Art. „Differenzialrechnung" III. pag. 298 enthält die Auffindung der

Maxima und Minima allgemein durch Differenzialrechnung mit Beispielen und pag. 309 die Auffindung der gröfsten und kleinsten Werthe implicirter Functionen.

Es sollen hier noch folgende Beispiele hinzugefügt werden.

1. Eine gerade Linie so zu theilen, dafs das aus den Theilen zusammengesetzte Rechteck ein Maximum werde.

Nennt man den einen Theil x, so ist der andere $a - x$, und damit $x(a - x) = ax - x^2$ ein Maximum werde, hat man das Differenzial $a - 2x = 0$ woraus $x = \frac{1}{2}a$ und es ist also die Linie zu halbiren.

Geometrisch kommt man zu dem Resultat, wenn man $AB = a$ in C halbirt und von C aus nach einem Endpunkt B hin ein Stück x abträgt. Dann ist das Rechteck $= \left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2$. Offenbar wird das Rechteck für $x = 0$ ein Maximum und $= \frac{a^2}{4}$, so dafs a halbirt werden mufs.

2. Es sind zwei Seiten a, b eines Dreiecks gegeben, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel, damit das Dreieck ein Maximum werde offenbar der gröfste, wenn er ein Rechter ist.

3. Alle Seiten eines Winkels weniger eine sind gegeben, so erhält man das gröfste Vieleck, wenn die gegebenen Seiten zusammen die Sehnen eines Halbkreisbogens sind und die letzte nicht gegebene Seite zum Durchmesser genommen wird.

Fig. 800.

Wenn also die Seiten AB, BC, CD, DE gegeben sind, so soll das Vieleck $ABCDEA$ ein Maximum sein, wenn die genannten Seiten als Sehnen einen Halbkreisbogen einnehmen und wenn der Durchmesser AE als unbekannte letzte Seite genommen wird.

Diesen Satz hat Meier Hirsch § 115 seiner Sammlung geometrischer Aufgaben aufgestellt; sein Beweis für die Richtigkeit ist als solcher nicht anzuerkennen.

4. Aus diesem Satz folgt denn unmittelbar:

Unter allen Vielecken, welche sich aus einer bestimmten Anzahl gegebener Seiten construiren lassen, ist dasjenige, um welches sich ein Kreis beschreiben läfst, das gröfste.

5. Der Inhalt eines Kreises ist gröfser als der Inhalt jeder geradlinigen Figur, welche mit demselben einen gleichen Umfang hat.

Nach Bd. III., pag. 228, No. 10 hat unter allen gleich vielseitigen Vielecken von gleichem Umfang das gleichseitige den gröfsten Inhalt. Wenn man also statt des vorausgesetzten ungleichseitigen Vielecks ein gleichseitiges von gleichem Umfang mit jenem nimmt, so erhält man ein Vieleck von gröfserem Inhalt und kann demnach gezeigt werden, dafs der Kreis gröfser ist, als das gleichseitige, dann ist ganz bestimmt auch gröfser als das ungleichseitige Vieleck.

Denkt man sich nun den Kreis und um denselben Mittelpunkt das Vieleck beschrieben, so können dessen Seiten weder Sehnen noch Tangenten sein; dann im ersten Fall wäre dessen Umfang kleiner, im zweiten Fall gröfser als der Umfang des Kreises, die Seiten müssen also die Kreislinie schneiden.

Denkt man sich nun von dem Mittelpunkt nach sämmtlichen Vielecksspitzen gerade Linien gezogen, so entstehen so viele Dreiecke als das Vieleck Seiten hat.

Die von dem Mittelpunkt auf diese Seiten gefällte Normalen mit h, die Umfänge des Kreises und des Vielecks mit p, den Halbmesser des Kreises mit r bezeichnet ist

der Inhalt P des Kreises $= \frac{1}{2}rp$

der Inhalt Q des Vielecks $= \frac{1}{2}hp$.

Construirt man nun um den Kreis ein dem Vieleck ähnliches Vieleck, bezeichnet dessen Umfang mit $p_{,}$, so ist der Inhalt $Q_{,}$ dieses Vielecks $= \frac{1}{2}rp_{,}$.

Nun ist wegen Aehnlichkeit der Vielecke

$$p : p_{,} = h : r$$

woraus $$p_{,} = \frac{r}{h}p$$

folglich ist $$Q_{,} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{r}{h}p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{h}p$$

hierzu $$Q = \qquad \frac{1}{2}hp$$

gibt $$Q\,Q_{,} = \frac{1}{4}r^2p^2 = P^2$$

woraus $$Q : P = P : Q'$$

Da nun die Kreisfläche P immer kleiner ist als die um denselben liegende

Vielecksfläche Q', so ist auch die Vielecksfläche Q kleiner als der Kreis.

6. Aufserhalb eines Kreises vom Mittelpunkt C sind zwei Punkte A, B gegeben, man soll auf der Peripherie einen Punkt von solcher Beschaffenheit angeben, dafs wenn man aus demselben nach den gegebenen Punkten gerade Linien zieht, die Summe dieser beiden Linien ein Minimum sei. (Meier Hirsch geometrische Aufgaben I, pag. 223.)

Fig. 801.

Es wird bewiesen, dafs die Linien $AM + BM$ ein Minimum sind, wenn $\angle AMC = \angle BMC$. Eine geometrische Construction des Punkts M dieser an sich einfachen Bedingung gemäfs ist aber noch nicht aufgefunden worden.

Ist $\angle AMC = \angle BMC$ und man zieht durch M die Tangente DE, so ist auch $\angle AMD = \angle BME$. Wählt man nun einen beliebigen anderen Punkt P in der Peripherie, zieht die geraden Linien AP, BP und BQ, von welchen AP die Tangente in Q schneidet, so hat man wegen der gleichen Winkel AMD und BME die Linien $AM + BM$ kleiner als alle übrigen von A und B nach irgend einem anderen Punkt der Linie DE gezogenen Linien (s. Bd. II, pag. 306 mit Fig. 560).

Folglich ist auch $AM + BM < AQ + BQ$
also um so mehr $AM + BM < AP + BQ$
und noch mehr $AM + BM < AP + BP$

7. Die von einem innerhalb eines Dreiecks gelegenen Punkt nach den Spitzen gezogenen geraden Linien sind zusammen genommen ein Minimum, wenn sie um den Punkt gleiche Winkel mit einander bilden.

Denn ist nebenstehend die gedachte Construction, also $\angle ACB = \angle ACD = \angle BCD$, und man denkt sich aus dem Eckpunkt A mit AC einen Kreis beschrieben, so sind $CB + CD$ ein Minimum für alle anderen zwei Linien, die von B und D nach

Fig. 802.

anderen in der Kreislinie liegenden Punkten gezogen werden könnten, hierzu AC gibt $AC + BC + DE$ ein Minimum der drei Linien die von A, B, D nach dem Kreisbogen gezogen werden können. Dasselbe beweist man durch Kreisbogen aus B mit BC und aus D mit CD.

8. Unter allen Parallelepipeden von einerlei Grundebene und Höhe hat das gerade die kleinste Oberfläche.

Hieraus folgt:

Wenn ein gerades und ein schiefes Parallelepipedum einerlei Grundfläche und gleiche Oberflächen haben, so ist das gerade höher als das schiefe.

Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat das rechtwinklige den gröfsten cubischen Inhalt.

Unter allen Parallelepipeden von gleichem cubischen Inhalt hat das rechtwinklige die kleinste Oberfläche.

9. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gegebenem cubischen Inhalt und gegebener Höhe hat dasjenige, dessen Grundebene ein Quadrat ist, den kleinsten Umfang.

Denn unter den ausgesprochenen Bedingungen haben sämmtliche Körper gleiche Grundebenen, von diesen hat nun das Quadrat den kleinsten Umfang, folglich auch der Körper mit quadratischer Grundebene die kleinsten Seitenflächen, und da die beiden Grundflächen in allen gleich grofs sind, überhaupt die kleinste Oberfläche.

Hieraus folgt:

10. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichem cubischen Inhalt (also auch von gleicher Grundfläche) hat das mit einer quadratischen Grundfläche die kleinste Oberfläche.

11. Das rechtwinklige Parallelepiped

mit einer quadratischen Grundfläche hat unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleicher Oberfläche den gröfsten Inhalt.

12. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleichem Inhalt hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

13. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den gröfsten Inhalt.

14. Unter allen geraden und schiefen Parallelepipeden von gleichem Inhalt hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

15. Unter allen geraden und schiefen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den gröfsten Inhalt.

16. Von einem Parallelepiped ist die Grundfläche an Gestalt und Gröfse gegeben, die Seitenflächen sind es blofs der Gröfse nach; man soll dasjenige finden, welches den gröfsten körperlichen Inhalt hat.

Mit den bleibenden Grundflächen bleiben auch deren Seiten dieselben und da die vier Seitenflächen in ihrer summarischen Gröfse verbleiben, so müssen bei der Verwandlung dieser Flächen auch deren Höhen, d. h. die normalen Abstände der an den Grundebenen des Körpers befindlichen Seiten verbleiben. Sind diese Höhen alle einander gleich, so darf man auf eine der Grundflächen nur ein gerades Parallelepipedum von der eben gedachten Höhe errichten und man hat dasselbe nach No. 8 im Maximo des Inhalts; sind die Höhen nicht gleich, so mufs man die kleinste der beiden Höhen zur Höhe des neuen Parallelepipedums nehmen. Die zu dieser Höhe gehörenden beiden Seitenflächen werden normal der Grundfläche, die anderen beiden Seitenflächen werden ihnen angeschmiegt.

Zur Erläuterung des Gesagten sollen Fig. 803, I. und II. und Fig. 804 dem Vortrag zu Hülfe kommen.

Fig. 803, I. und II. sind die Oberansichten zweier schiefer Parallelepipeden; in beiden ist *cd* die Grundebene, *ab* die ihr parallele obere Ebene, *ae* und *fd*, *cf* und *be* die beiden einander gegenüberstehenden Seitenflächen.

In I. haben sämmtliche 4 Seitenflächen einerlei Höhe, d. h. die Abstände von

Fig. 803.

af und *cg*, von *bh* und *de*, von *ah* und *ce* und von *bf* und *dg* sind einander gleich. Man hat also nur nöthig, die genannten Seitenflächen normal über die Grundflächen zu bringen, dann werden die längeren Seiten *eh*, *bd*, *gf*, *ac* gleich den kleineren Höhen, normal auf der Grundfläche und der Körper, der zuerst die lothrechte kleinere Projection der Seitenflächenhöhen zur Höhe hatte, erhält die gröfsere Höhe selbst zur Höhe und sein Inhalt ist nach No. 8 ein Maximum.

In II. haben, wie man sofort ersieht, die Seitenflächen *acgf* und *hedb* eine steilere Lage gegen die Grundfläche *cedg* als die Seitenflächen *aceh* und *fgdb*, und bei gleichem Abstande der Flächen *cedg* und *ahbf* ist der Abstand zwischen *cg* und *af* kleiner als der Abstand zwischen den schrägeren *dg* und *bf*. Dieser Fall ist nun Fig. 803 im Aufrifs vorgestellt.

Es ist nämlich Fig. 804 *ahbfedgc* das gegebene Parallelepipedum, die beiden Seiten *bh*, *de* haben in der schrägen Fläche, aber senkrecht auf der Linie *de*, also in

Fig. 804.

der schrägen Verkürzung betrachtet die Länge *eh*, und wenn diese Höhe zugleich normal auf die Ebene *cedg* errichtet wird, die Länge *el*. Wollte man nun wie ad 1 diese Länge *el* zugleich zur Seite des Körpers machen, so würde sie zugleich die Seite *eh* sein müssen, mit der sie dieselbe ist. *eh* ist aber zu lang, sie würde über *l* hinaus bis *m* reichen, und es könnte kein Parallelepipedum entstehen.

Da aber um ein Maximum zu erhalten wenigstens ein Paar Seitenflächen den Grundebenen normal sein mufs, so zieht man durch den Punkt *l* eine Parallele *on* mit *de*, beschreibt aus *e* innerhalb der senkrechten Seitenebene einen Bogen mit dem Abstand zwischen *ce* und *ah* als Halbmesser, und in dem Punkt *h'*, wo er die Parallele *on* trifft, ist der entsprechende Punkt für *h*. Zieht man demnach die Linie *h'e* und construirt die der Grundebene *edgc* parallele und congruente Figur *h'b'f'a'*, vollendet das Parallelepipedum *a'h'b'f'edgc*, so befinden sich in diesem die Seitenflächen *deh'b'* und *cgf'a'* normal den Grundebenen *edgc* und *h'b'f'a'* und es ist das verlangte Maximum.

17. Von einem Parallelepipod sind die Grundfläche und die Seitenflächen der Gröfse nach gegeben, desgleichen die Winkel der Grundfläche, so erfährt man die Bedingung für das Maximum des Inhalts folgender Art:

Es sei q der Inhalt der Grundfläche, q' der Inhalt der einen, q'' der Inhalt der daran grenzenden Seitenfläche, der gegebene Winkel sei α, x und y seien die unbekannten ihn einschliefsenden Seiten.

Dann ist der Inhalt der Grundfläche $q = xy \sin \alpha$

woraus $xy = \frac{q}{\sin \alpha}$.

Die Inhalte der beiden Seitenflächenpaare sind $q' = h'x$ und $q'' = h''y$

hieraus die Höhen $h' = \frac{q'}{x}$ und $h'' = \frac{q''}{y}$,

woraus $h' \cdot h'' = \frac{q'q''}{xy} = \frac{q'q''}{q} \sin \alpha$.

Demnach ist die gröfste Höhe eines Parallelepipedums von den gegebenen Stükken $= \sqrt{\left(\frac{q'q''}{q} \sin \alpha\right)}$, und zwar mufs dieselbe auf den Grundebenen normal stehen. Das Parallelepiped ist also ein gerades, dessen Grundebene $= q$ und dessen Höhe $= \sqrt{\left(\frac{q'q''}{q} \sin \alpha\right)}$. Sein Inhalt beträgt $\sqrt{qq'q'' \sin \alpha}$.

18. Was von den Parallelepipeden gilt, gilt auch von den dreiseitigen Prismen. Also:

Unter allen dreiseitigen Prismen von derselben Höhe und derselben Grundfläche hat das gerade Prisma die kleinste Oberfläche.

19. Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gegebener Höhe, gegebener Grundfläche und einer gegebenen Seitenfläche findet man das von der kleinsten Oberfläche, wenn die beiden nicht gegebenen Seitenflächen einander gleich sind.

Denn ist A die gegebene Grundfläche, h die Höhe des Prisma, so ist h auch die Höhe jeder Seitenfläche. Ist die gegebene Seitenfläche $= B$, so ist dessen zur Grundfläche gehörige Seite ebenfalls gegeben $= \frac{B}{h}$. Diese als Grundlinie der Dreiecksgrundfläche A betrachtet, gibt deren Höhe $= 2h \frac{A}{B}$. Unter allen Dreiecken von einerlei Grundlinie und gleicher Höhe hat aber das gleichschenklige den geringsten Umfang, mithin auch das gerade dreiseitige Prisma, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat.

Hieraus folgt:

20. Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welchem alle Seitenflächen gleich grofs sind. Desgleichen

21. Unter allen Prismen von einer gegebenen Anzahl und summarischem Inhalt der Seitenflächen von derselben Grundfläche und derselben Höhe hat das gerade Prisma die kleinste Oberfläche.

22. Unter allen geraden Prismen von gegebener Anzahl der Seitenflächen, gegebener Höhe hat dasjenige, dessen Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, den gröfsten körperlichen Inhalt.

Denn unter allen Vielecken von gegebener Seitenanzahl und gegebenem Umfang ist (No. 4) das regelmäfsige von dem gröfsten Inhalt, mithin auch das darauf gestellte gerade Prisma.

23. Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe und gleichem körperlichen Inhalt hat das mit regelmäfsiger Grundebene den kleinsten Umfang der Seitenflächen; und da mit dem körperlichen Inhalt und der gegebenen Höhe auch die Gröfse der Grundfläche gegeben ist, auch den kleinsten Umfang (inclusive der Grundflächen).

24. Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe und Oberfläche hat das von regelmäfsiger Grundfläche den gröfsten körperlichen Inhalt.

25. Der Kreis hat einen kleineren Umfang als jedes regelmäfsige Vieleck von gleichem Inhalte mit demselben.

Denn ist a die Seite des Vielecks, so ist dessen Umfang $= na$ und wenn man die von dem Mittelpunkt auf die Seite gefällte Normale $= h$ setzt, so ist $h > r$, weil die Seite nicht Tangente aber auch nicht Sehne sein kann und folglich den Kreisumfang schneiden mufs. Nun ist der Inhalt des Vielecks $= \frac{1}{2} nah$

der Inhalt des Kreises $= r^2\pi$

also $\frac{1}{2} nah = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r$

$h < r$

gibt dividirt $na > 2\pi r$

26. Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prisma von gleicher Höhe und gleichem körperlichen Inhalt.

Folgt unmittelbar aus No. 19.

27. Der Inhalt eines Cylinders ist immer gröfser als der Inhalt eines Prisma auf regulärer Grundfläche von gleicher Oberfläche und von gleicher Höhe mit dem Cylinder.

28. Unter allen geraden Cylindern von gleichem körperlichen Inhalt ist dasjenige von der kleinsten Oberfläche, welches in einem Würfel eingeschrieben ist.

Denn beschreibt man nun sämmtliche Cylinder-Parallelepipeden mit quadratischen Grundflächen, so verhalten sich diese untereinander wie die inliegenden Cylinder, sie sind also einander gleich. Nach Satz 12 hat aber von allen der Würfel die kleinste Oberfläche, mithin hat auch der in einem Würfel beschriebene Cylinder die kleinste Oberfläche.

Dieser Satz ist Bd. II, pag. 304, No. 2 analytisch erwiesen mit dem Schlufs, dafs der Durchmesser der Grundfläche so grofs als die Höhe sein müsse.

Anmerk. Das gleiche Verhältnifs zwischen den Cylindern unter sich mit den umschriebenen Prismen unter sich hat seinen Grund darin, dafs Kreise und die um denselben beschriebenen Polygone sowohl in Betreff der Umfangs als auch des Inhalts einerlei Verhältnifs haben, wenn die Polygone mit einander ähnlich sind, und folglich um so mehr bei gleichseitigen regelmäfsigen Polygonen.

29. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche hat der in dem Würfel eingeschriebene Cylinder den gröfsten körperlichen Inhalt.

30. Aus beiden vorigen Sätzen folgt der Satz:

Der Cylinder, der in einem Würfel einbeschrieben werden kann, d. h. dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, hat unter allen Cylindern von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche den gröfsten Inhalt.

31. Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe und auf derselben regulären Grundfläche hat die gerade Pyramide die Seitenflächen von dem geringsten Inhalt.

32. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche hat der gerade Kegel den kleinsten Mantel.

33. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche, wenn diese zwei auf einander normale Axen hat, ist bei dem geraden Kegel der Mantel am kleinsten.

Mayer-Borda'scher Kreis, s. „Borda'scher Kreis".

Mechanik ist derjenige Theil der angewandten Mathematik, welcher sich mit der durch Einwirkung von Kräften hervorgebrachten Bewegung von Körpern beschäftigt (s. Mathematik). Man nennt die Phoronomie auch die reine Mechanik, dann ist die Anwendung derselben auf die Bewegung der Naturkörper die angewandte M. Die Mechanik der Himmelskörper heifst die Himmelsmechanik.

Mechanische Kräfte oder mechanische Potenzen hiefsen früher die einfachen Maschinen: der Hebel, die schiefe Ebene, die Schraube, das Rad an der Welle, der Keil.

Mechanisches Moment oder auch mechanischer Effect und Effect schlechthin, ist das Maafs für die Wirkung von Kräften auf Bewegung, nämlich das Product aus der Gröfse der Kraft multiplicirt mit der durch sie erzeugten Geschwindigkeit, oder auch mit dem Wege in einer bestimmten Zeit. Wegen der Nebenhindernisse, durch Reibungen u. s. w. unterscheidet man den Nutzeffect, den Nebeneffect und deren Summe den Totaleffect.

Mediale, eine der von Euklid aufgestellten Irrationallinien, s. den Art. „Irrationalen des Euklid".

Mehrheit ist jede Anzahl von Einheiten.

Meile, geographische ist eins der ersten allgemein geltenden Längenmaafse (Normallängenmaafs), hat aber die Eigenthümlichkeit als solches, dafs Niemand deren wirkliche Länge gonau kennt. Die geographische Meile hat zur Einheit den Umfang des Erdaequators nnd ist dessen 5400ter Theil. Es geht daher bei der Ermittelnng dieser Meile eben so, wie es bei Ermittelung des Meters, dem 10 Millionsten Theil des nördlichen Erdmeridianquadranten gegangen ist, die Vermessungen haben zn verschiedenen Resultaten geführt nnd die geographische Meile schwankt innerhalb der Grenzen 3807,09 Toisen = 23642 preufs. Fufs und 3811,5 Toisen = 23661 preufs. Fufs. Erwägt man, dafs dieses Maafs ein astronomisches ist nnd dafs die Angaben der enorm grofsen Längen anf Beobachtnngen nnd Berechnungen sich gründen, so hat man jede einzelne Länge, dnrch geographische Meilen ausgedrückt, innerhalb ziemlich genau ermittelter Grenzen.

Menisken sind Linsen von concav-convexer Form, sie sind in der Mitte stärker als am Rand und gehören also zu den Vergröfserungsgläsern. In dem Art. „Brennglas" ist die Wirkung der convex-convexen Gläser entwickelt, in No. 4 mit Fig. 249 für solche Linsen, deren beide Oberflächen verschledene Halbmesser haben, die also verschiedenen Kngeln angehören. Man hat deren Brennweite

$$w = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r \cdot \varrho}{r+\varrho}$$

wo n den Coefficient (= 1,5 etwa) für Glas; r, ϱ die gedachten Halbmesser bedenten.

Setzt man nnn $-\varrho$ für ϱ, so hat man einen Meniskus, es ist die innere Fläche, die Höhlnng flacher als die änfsere Fläche, also $\varrho > r$, mithin für den Meniscns

$$w = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r\varrho}{\varrho - r} = 2 \cdot \frac{r\varrho}{\varrho - r}$$

Setzt man die Entfernung des zn vergröfsernden Gegenstandes $= a$, so hat man die Vergröfserung $= \frac{w}{w-a}$. Diese ist also nm so gröfser, je näher der Gegenstand dem Brennpunkt gebracht wird. Unter gleichen Umständen verhalten sich die Brennweiten eines convex-convexen Glases zu dem eines Meniskus wie

$$\frac{r\varrho}{r+\varrho} : \frac{r\varrho}{\varrho - r} = \varrho - r : \varrho + r$$

Bei einem convex-convexen Glas ist wenn $\varrho = r$ ist die Brennweite $w = r$; ist $\varrho = 2r$, so ist $w = \frac{4}{3} r$. Beim Meniskns ist für $\varrho = 2r$ die Brennweite $w = 4r = 2\varrho$.

Merkur (☿) ist der der Sonne zunächst stehende Planet, also der erste der nnteren Planeten. Seine mittlere Entfernung von der Sonne ist cc. 8 Millionen Meilen = 0,3870938 der nnserer Erde von der Sonne. Seine siderische Umlanfszeit = 87,696928 Tage = 87 Tg. 23 St. 15 Min. 46 Sec. Seine tropische Umlanfszeit ist nnr um 1 Min. 11 Sec. kürzer. Seine Excentricität = 0,2056175 mal der halben grofsen Axe = 1645000 Ml. Hierans seine gröfste Entfernung von der Sonne 9645000 Ml., seine kleinste 6355000 Ml. Neigung der Bahn gegen die Ekliptik = 7° 0′ 6″. Axenumdrehung in 24 Stunden 5 Min. Die Länge des aufsteigenden Knotens 45° 47′ 9″; die Länge des Perihels 74° 20′ 5″. Die letzten drei Bestimmnngen erleiden innerhalb langer Jahre einige kleine Abänderungen. Die Masse des Merkurs ist etwas mehr als der fünfmillionste Theil der Sonnenmasse, nämlich $\frac{1}{4865751}$ derselben. Der Durchmesser des Merknr etwa 670 Meilen, also etwas über ⅓ des Erddnrchmessers nnd mithin seine Oberfläche etwa ⅙ der Erdoberfläche; seine scheinbare Gröfse in der Erdnähe 12″, in der Erdferne 4″; sein Volnmen 0,6, Dichtigkeit = 2,94, das der Erde

Meridian, Mittagskreis ist jeder dnrch beide Weltpole gelegte gröfste Kreis der hohlen Himmelskngel, nnd der dnrch den Scheitelpunkt eines Orts gelegte Kreis der Meridian des Orts. In diesem Kreise erreichen alle Gestirne für den Ort ihren höchsten Stand, sie cnlminiren in demselben, und der Augenblick, in welchem die Sonne in ihn tritt, ist Mittag.

Legt man dnrch den Meridian eines Orts eine Ebene, so ist diese dessen Mittagsebene, Mittagsfläche, diese theilt die sichtbare Himmelshalbkugel in zwei Hälften, in die östliche und in die westliche Halbkugel. Die beiden Dnrchschnittspnnkte des Meridians mit dem Horizont sind der Mittagsoder Südpnnkt nnd der Mitternachtsoder Nordpnnkt. Letzterer ist der Endpnnkt der Meridianhälfte in welcher der Nordpol liegt, ersterer der ihm entgegengesetzt liegende. Die von diesen gleich weit also 90° abstehenden Pnnkte des Horizonts sind der Ost- oder Morgenpunkt und der West- oder Abendpunkt. Ersterer, wenn man den Südpunkt ansieht, links, letsterer rechts lie-

gend. (Vergleiche den Art. „Astronomischer Horizont" mit Fig. 92.)

Die Erdmeridiane sind dieselben gröfsten Halbkreisbogen, wenn man sie statt auf der Himmelskugel auf der Erdoberfläche beschreibt, und sie entstehen auch als die Durchnittslinien der Mittagsflächen mit der Erdoberfläche.

Man rechnet die Meridiane nur in der sichtbaren Halbkugel von Pol zu Pol auf 180° Länge, der zweite in derselben Ebene befindliche one unsichtbare Halbkreis ist der entgegengesetzte Meridian oder auch der untere Meridian.

In den Meridianen werden die geographischen Breiten gemessen. Der Punkt des Aequators ist der Nullpunkt, die Pole liegen unter 90° nördlicher und südlicher Breite.

Meridian, erster, ist derjenige, welcher für die Messung und Angabe der geographischen Längen von Orten den Anfangsmeridian ausmacht, der also mit den unter ihm belegenen Orten die geographische Länge = Null hat (s. geographische Länge). Die Auffindung des Meridiane eines Orts, s. den Art. „Correspondirende Höhen".

Meridian, magnetischer, s. u. „Magnete". Vergleiche: „Abweichung der Magnetnadel".

Mefsinstrumente sind Längen- und Winkelmefsinstrumente, ferner die Nivellirinstrumente. Ueber die ersten, Kette, Stäbe, Stangen, s. den Art. „Baculometrie", ferner die Art. „Gradmessung" und „Maafsstäbe". Die Winkelmefs- und Nivellirinstrumente erhalten ihre einzelnen Artikel. Bereits sind beschrieben und abgebildet das Astrolabium, die Boussole mit Diopterlineal, der Borda'sche Kreis, die Bergwaage oder das Clitometer, die Blei- oder Maurerwaage und die Libelle.

Mefstisch ist auf nicht zu coupirtem Terrain und für Flächen von nicht zu grofsem Umfang ein recht brauchbares Mefsinstrument. Es besteht in einer auf einem Stativ ruhenden quadratischen Reifsbrettplatte von 12 bis 18 Zoll im Quadrat, die zugleich um eine kugelförmige Nufs oder mit einem hohlen Cylinder um einen vollen beliebig horizontal gedreht werden kann. Die Platte mufs, damit sie sich nicht wirft, aus zusammengeleimten Lindenhölzern gefertigt sein. Die Horizontalstellung geschieht mit Hülfe einer Dosenlibelle, entweder blos durch Eindrücken der Stativfüfse in den Erdboden, oder mittelst complicirterer Einrichtungen, durch Mikrometerschrauben in Schienen und dergleichen. Für den praktischen Gebrauch kann der Mefstisch nicht einfach genug eingerichtet sein. Bei Fortsetzung einer Vermessung, wobei das Instrument über einen zweiten Terrainpunkt aufzustellen ist, und zwar mit dem auf der Platte ihn verstellenden schon verzeichneten Punkt, wird gelothet. Bei der geringen Oberfläche der Platte thut ein gutes Augenmaafs genug, sonst steckt man auch eine Gabel, deren unterer Stab mit einem Häkchen versehen ist, bis zu dem verzeichneten Punkt und lothet von dem senkrecht darunter befindlichen Häkchen ab.

Um einen Winkel zu finden, den zwei entfernte Gegenstände mit dem Standpunkt bilden, visirt man mit dem Diopterlineal nach beiden und zeichnet längs dem Lineal beide visirte Richtungen mit Bleistift nach. Man steckt hierbei wohl auch eine feine Nadel in den Visirpunkt gegen welche das Lineal gelegt wird.

Soll ein Dreieck des Feldes in verjüngtem Maafsstabe aufgetragen werden, so mufs eine Linie desselben vermessen und in verjüngtem Maafsstabe auf der Mefstischplatte gezeichnet sein; alsdann erhält man die anderen beiden Seiten durch die eben gedachte Winkelmessung. Man nennt dies Verfahren das Einschneiden mit dem Mefstisch, und man hat ein Vorwärts-Einschneiden und ein Rückwärts-Einschneiden. Ersteres ist, wenn man dieselbe Linie zeichnet, welche man visirt und letzteres, wenn man die Visirlinie rückwärts verlängert zeichnet. Folgendes Beispiel zeigt die Aufnahme einiger Punkte durch beiderseitiges Einschneiden:

Die Punkte A, B, C, D auf dem Felde sollen mit dem Mefstisch in verjüngtem Maafsstab aufgetragen werden. AB ist gemessen und als Linie ab verjüngt aufgetragen. Richte den Mefstisch mit ab in die Richtung AB, visire und zeichne die Richtungen ac, ad von AC, AD. Um einschneiden zu können wähle eine Distanz XY, entweder zwischen bemerkbaren natürlichen Punkten oder durch Signalstangen. Visire AY, zeichne die Richtung ay. Bringe nun den Mefstisch in irgend einen Punkt Z der Distanz XY, indem man die durch a gezeichnete Richtung ya mit den Punkten A, X visirt, dann sind alle auf dem Mefstisch gezeichneten Linien mit den ihnen entsprechenden auf dem Felde parallel, also auch $ab \# AB$. Visirt man nun von b nach

B und zieht **rückwärts** die Linie *b* bis zur Linie *ay*, so erhält man durch **Rückwärts-Einschneiden** den Durch-

Fig. 805.

schnittspunkt *e*. Von diesem Punkt *e* aus visirt man nun die Punkte *D*, *C*, zeichnet und erhält durch **Vorwärts-Einschneiden** die Durchschnittspunkte *c*, *b* und die Figur *edcba*, in welcher *e* ein Hülfspunkt und zugleich *ae* die in gleich verjüngtem Maafsstab gezeichnete wirkliche Länge *Ae* ist.

Meter, s. n. „Decimalmaafs" und „Längenmaafse".

Methode der kleinsten Quadrate ist das rechnende Verfahren, den wirklichen Werthen von Gröfsen, die durch zu viel gegebene Gleichungen überbestimmt sind, mit Hülfe der Quadrate ihrer aus den Gleichungen hervorgehenden Werthsdifferenzen möglichst nahe zu kommen.

Diese Fälle ereignen sich in der Astronomie. Es lehrt nämlich die Erfahrung, dafs astronomische Beobachtungen über Abstände von Gestirnen oder von ausgezeichneten astronomischen Punkten, sie mögen von einem oder von mehreren Beobachtern wiederholentlich geschehen, mit einander niemals genau übereinstimmen. Ist nur eine einzige Länge mit solchen Beobachtungen gegeben, so ist unter allen beobachteten Längen der natürliche Näherungswerth das arithmetische Mittel derselben. Ist die wissenswürdige Länge x mit einer Beobachtung $= a$, mit einer zweiten $= b$ gegeben, so ist der natürliche Näherungswerth von $x = \frac{1}{2}(a+b)$; unter drei Beobachtungen von a, b, c der Mittelwerth von $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Von n Beobachtungen $= \frac{a+b+c+\ldots}{n}$

Wird dagegen mit jeder Beobachtung die Verbindung zweier unbekannten Gröfsen x, y gefunden, so ist das natürliche Mittel auf so unmittelbare Weise nicht zu finden. Denn es sei durch gleich zuverlässige Beobachtungen gefunden $x+y=a$, $x+y=b$, $x+y=c$, so kann man nur das Mittel von $x+y$, nicht aber das von x allein und von y allein finden. Eine Entwickelung ist aber deshalb nicht möglich, weil für die beiden unbekannten Gröfsen x und y nicht **zwei**, sondern mehrere Gleichungen gegeben, die Unbekannten also überbestimmt sind.

Nun findet sich aber, dafs die Summe der Quadrate der aus den Beobachtungen hervorgehenden Differenzen (oder **Beobachtungsfehlern**, wie man sie in der Regel mit Unrecht nennt) zum Minimum gesetzt, einen Werth für jede einzelne der Gröfsen gibt, der für jede unbekannte eingesetzt, den Bedingungsgleichungen näher kommt, als irgend ein anderer Werth. Erwägt man nun, dafs es nicht einen einzigen Werth der verlangten einen oder jeder der verlangten mehreren Unbekannten gibt, welcher sämmtlichen Bedingungsgleichungen genau entspricht, weil diese aus Beobachtungen herrühren, von denen **keine einzige genau richtig** ist, so ist mit solchem, den Gleichungen entsprechenden Näherungswerthe auch der nächste Näherungswerth für die gesuchte wirkliche Gröfse gegeben.

Um das Gesagte klarer zu machen diene folgendes Beispiel. Es seien gegeben die beiden Gleichungen:

$$3y + 2x = 75$$
$$2y - x = 4$$

Durch die beiden Gleichungen sind x und y bestimmt; durch Entwickelung findet man $x = 19\frac{5}{7}$ und $y = 11\frac{6}{7}$.

Zu diesem Resultat gelangt man nun auch, wenn man jede Gleichung auf Null reducirt, quadrirt und nach den Regeln der Analysis das Minimum sucht. Man hat demnach

$$(3y + 2x - 75)^2 + (2y - x - 4)^2$$

Nach dem Art. „**Differenzialrechnung**", No. 10, pag. 309 hat man nun

1. $\frac{\partial (3y + 2x - 75)^2}{\partial y} + \frac{\partial (2y - x - 4)^2}{\partial y} = 0$

2. $\frac{\partial (3y + 2x - 75)^2}{\partial x} + \frac{\partial (2y - x - 4)^2}{\partial x} = 0$

Diese Differenzirung ausgeführt gibt

$$6(3y + 2x - 75) + 4(2y - x - 4) = 0$$
$$4(3y + 2x - 75) - 2(2y - x - 4) = 0$$

Diese Gleichungen reducirt ergeben

$$26y + 8x - 466 = 0$$
$$8y + 10x - 292 = 0$$

woraus $x = 19\frac{5}{7}$ und $y = 11\frac{6}{7}$.

Dafs mit dem Minimum der Differenzenquadrate das natürlichste Mittel der Beobachtungswerthe entsteht, ist folgender Art zu beweisen.

Es sei beobachtet $x = a$; $x = a_1$; $x = a_2$; $x = a_3$ ....

so ist der natürlichste wahre (der mittlere) Werth $x' = \frac{a + a_1 + a_2 + \dots}{n}$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate hat man

$$(x - a)^2 + (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \ldots = 0$$

differenzirt

$$2(x - a) + 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots = 0$$

woraus $x = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots}{n}$

Beispiel. Aus drei Beobachtungen gehen folgende drei Gleichungen hervor:

$$x + y = 7$$
$$2x + y = 9{,}4$$
$$y - x = 3{,}15$$

Man erhält die Gleichung der Quadrate

$$(x + y - 7)^2 + (2x + y - 9{,}4)^2 + (y - x - 3{,}15)^2 = 0$$

Auf x differenzirt

$$2(x + y - 7) + 4(2x + y - 9{,}4) - 2(y - x - 3{,}15) = 0$$

Auf y differenzirt

$$2(x + y - 7) + 2(2x + y - 9{,}4) + 2(y - x - 3{,}15) = 0$$

Die beiden Gleichungen ergeben folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$12x + 4y - 45{,}3 = 0$$
$$4x + 6y - 39{,}1 = 0$$

Hieraus entwickelt entsteht

$$y = 5\tfrac{1}{7};\ x = 2\tfrac{17}{280}$$

Setzt man diese Werthe in die gegebenen drei Gleichungen, so erhält man:

$$x + y = 7\tfrac{57}{280} = 7{,}20328 \text{ Unterschied} = +0{,}20328$$
$$2x + y = 9\tfrac{74}{280} = 9{,}26428 \text{ Unterschied} = -0{,}13572$$
$$y - x = 3\tfrac{23}{280} = 3{,}08214 \text{ Unterschied} = -0{,}06786$$
$$\text{Unterschied in Summa} = -0{,}00030$$

Nimmt man zur Prüfung beide Werthe kleiner, $x = 2{,}05$ und $y = 5{,}1$, so hat man
$x + y = 7{,}15$; $2x + y = 9{,}2$; $y - x = 3{,}0$
Unterschied in Summa $-0{,}15$

Nimmt man beide Werthe gröfser:
$x = 2{,}1$ und $y = 5{,}2$ so erhält man
$x + y = 7{,}3$; $2x + y = 9{,}4$; $y - x = 3{,}1$
Unterschied in Summa $+0{,}25$

Nimmt man x gröfser, y kleiner, z. B. $x = 2{,}1$ und $y = 5{,}1$, so erhält man
$x + y = 7{,}2$; $2x + y = 9{,}3$; $y - x = 3$
Unterschied in Summa $= -0{,}05$

Nimmt man x kleiner, y gröfser, z. B. $x = 2{,}05$; $y = 5{,}2$; so erhält man
$x + y = 7{,}25$; $2x + y = 9{,}3$; $y - x = 3{,}15$
Unterschied in Summa $= +0{,}15$

Die Anwendung der kleinsten Quadrate gibt also die summarisch genommene kleinste Differenz.

Mikrometerschraube ist eine äufserst genau gearbeitete Schraube mit schwacher Steigung in dreikantigen Gängen, mit welcher man ein sehr geringes, direkt nicht mefsbares Fortschreiten eines mit der Schraube verbundenen Gegenstandes hervorbringen kann. Es ist jedes Winkelinstrument mit solcher Schraube versehen, und man erzielt dadurch äufserst kleine und durch Berechnung in Bruchlängen auszudrückende Verschiebungen, weil man die Länge der Schraube durch die Anzahl der Windungen dividirt, die Länge einer ganzen Steigung erfährt, und weil man vermittelst eines mit der Dreh-

axe befestigten in beliebig viele gleiche Bogen eingetheilten Kreises einen beliebigen aliquoten Theil einer ganzen Windung umzudrehen vermag.

Mikroskop ist ein dioptrisches Werkzeug um äufserst kleine Gegenstände dem Auge in seinen Details in grofsem Maafsstabe deutlich darzustellen. Das einfachste M. ist die Lupe (s. d.), die aus nur einem Glase besteht.

Fig. 806 zeigt ein aus zwei Gläsern zusammengesetztes M., welches man mit einer Röhre eingefafst sich vorzustellen hat.

Fig. 806.

Es ist *de* das bicouvexe Objectiv, *ab* der kleine Gegenstand, welcher möglichst nahe dem Brennpunkt von *de* sich befinden mufs, damit ein möglichst grofses Luftbild *A'B'* entsteht. Die Lichtstrahlen *bc* und *ac* gehen geradlinig durch bis *D* und *E*, der Strahl *bd* bricht nach *dB'*, der Strahl *ae* nach *eA'* in *A'* und *B'*, wo sich die beiden genannten Paar Strahlen schneiden, entsteht das vergröfserte Luftbild *A'B'*.

Das vor dem Ocularglas *DE* befindliche Auge sieht die von dem Luftbilde *A'B'* herrührenden Strahlen *A'C*, *B'C* in den Punkten *F* und *G* geradlinig nach *FA* und *GB*; der Strahl *A'E* bricht nach *EJ*, der Strahl *B'D* nach *DH*; das Auge wirft die aus *DH* und *EJ* empfangenen Strahlen geradlinig fort nach *HB* und *JA* und zwischen den Durchnittspunkten *A*, *B* beider genannten Strahlenpaare entsteht das zweite vergröfserte Luftbild *AB*. Ist *A'B'* *n* mal gröfser als *ab* und *AB* *m* mal gröfser als *A'B'*, so wird in dem Bilde *AB* der Gegenstand *ab* um das *n · m* fache vergröfsert.

Million ist die Zahl = 1000 × 1000.

Minuendus, das zu Vermindernde ist die Zahl, von der eine andere abgezogen werden soll; die abzuziehende Zahl heifst der Subtrahendus, die durch die Abziehung des Subtrahendus vom Minuendus entstandene Zahl die Differenz oder der Rest.

Minus ist die Bezeichnung der Eigenschaft einer Gröfse, dafs sie die entgegengesetzte Richtung von Gröfsen derselben Art hat, deren Richtungen für normal gelten (s. „Entgegengesetzte Gröfsen"). Da diese negirende Eigenschaft gegen die normale immer subtractiv auftritt, so hat man eine Minusgröfse immer als Subtrahend zu betrachten, und es ist das Minuszeichen sowohl Zeichen der Negativität als auch der Subtractivität.

Minute ist ein Zeitmaafs und ein Bogenmaafs; als Zeitmaafs der 60te Theil der Stunde und als Bogenmaafs der 60te Theil des Grades.

Mittag ist die allgemein bekannte und gebräuchliche Bezeichnung zweier mit einander zusammenhangenden Begriffe, nämlich eines Zeitaugenblicks und eines Himmelpunkts; beides für jeden Ort der Erdoberfläche. Der Himmelspunkt ist der am südlichen Horizont des Meridians (s. d.), der Zeitpunkt derjenige, in welchem die Sonne für den Wohnort täglich den höchsten Stand erreicht (s. „Culmination").

In mehreren Art. dieses Wörterbuchs, als in „Chronologie" ist der Unterschied zwischen wahrer (der astronomischen) Sonnenzeit und mittlerer (der bürgerlichen, der Kalender-) Sonnenzeit auseinandergesetzt. So wie mit der Sonnenzeit ist es auch mit dem Hauptzeitpunkt derselben, dem Mittag, und man hat einen wahren (den astronomischen) Mittag und einen mittleren Mittag. Ersterer ist der Zeitpunkt, in welchem die Sonne für den Wohnort wirklich culminirt, letzterer der Zeitpunkt, in welchem die Sonne culminiren würde, wenn sie statt in der Ekliptik im Aequator und hier das ganze Jahr hindurch sich gleichförmig bewegte (s. den Art. „Chronologie" mit Fig. 295).

Alle Orte der Erde, die unter demselben Meridian liegen, haben in gleichem

Zeitaugenblick Mittag, die in dem entgegengesetzten, dem unteren Meridian liegenden Orte in demselben Augenblick Mitternacht.

Die Erdpole haben keinen Meridian, also nicht Morgen, nicht Mittag, nicht Abend und nicht Mitternacht (s. den Art. „Astronomischer Horizont", No. 7, pag. 147).

Mittagsfernrohr ist ein Fernrohr, welches mit seiner visirenden Axe innerhalb der Mittagsebene verbleibt, in derselben aber auf und nieder gedreht wird, um nicht nur die Zeit des Durchgangs eines Gestirns, die Zeit der Culmination, sondern auch dessen Höhe in diesem Augenblick, dessen Mittagshöhe zu bestimmen.

Mittagsfläche ist die durch den Meridian des Orts gedachte Ebene; sie enthält beide Pole und das Zenith des Orts.

Mittagsgegend, Süden bilden die in der Nähe um den Südpunkt des Meridians im Horizont belegenen Punkte.

Mittagshöhe ist diejenige Höhe, im Bogen vom Horizont aufwärts gemessen, in welcher ein Gestirn durch den Meridian geht (s. „Mittagsfernrohr"; geometrische Construction der Höhen, s. Bd. I, pag. 176—178 mit Fig. 109 bis 111.

Mittagskreise, s. v. w. „Meridiane". Erster Mittagskreis, s. „Meridian, erster".

Mittagslinie die Durchschnittslinie der Mittagsfläche mit dem Horizont.

Mittagspunkt ist der südliche Endpunkt der Mittagslinie.

Mittagsuhr wird eine Sonnenuhr genannt, wenn deren Zeiger genau in der Mittagsfläche liegt, wenn also deren lothrechte Platte in der Ost-Westebene sich befindet.

Mittel ist in einer stetigen Proportion das gleiche Mittelglied. Es gibt dreierlei Proportionen, die arithmetische, die geometrische und die harmonische (s. den Art. „Harmonische Proportion").

Es ist noch hinzuzufügen:

1. dafs für die algebraische Summe mehrerer Zahlen das Mittel der Zahlen = ist dieser arithmetischen Summe dividirt durch die Anzahl der Zahlen:

Von $+a$, $-b$, $+c$, $+d$, $-e$ ist das arithmetische Mittel $= \frac{a-b+c+d-e}{5}$

2. dafs das arithmetische Mittel zweier Zahlen immer gröfser ist als das geometrische und dieses wieder gröfser ist als das harmonische Mittel. Denn in der stetigen Proportion $a - b = b - d$ ist das Mittel

$$b = \frac{a+d}{2} \qquad (1)$$

und in der Proportion $a : b_1 = b_1 : d$ ist das Mittel

$$b_1 = \sqrt{ad} \qquad (2)$$

Nun ist $\quad b^2 = \frac{a^2+d^2+2ad}{4}$

$$b_1^2 = ad$$

also $\quad 4(b^2 - b_1^2) = (a-d)^2$

Da nun $(a-d)^2$ immer positiv ist, so ist auch b immer $> b_1$. Das harmonische Mittel hat man aus dem oben citirten Artikel

$$b_2 = \frac{2ad}{a+d} \qquad (3)$$

Dafs das harmonische Mittel $b_2 = \frac{2ad}{a+d} < b$ ersieht man aus dem eben citirten Artikel.

Es gibt noch eine zweite harmonische Proportion: die contraharmonische Proportion:

$$a - b_3 : b_3 - d = d : a$$

Hieraus entsteht

$$a^2 + d^2 = ab_3 + b_3 d$$

und das Mittel $b_3 = \frac{a^2+d^2}{a+d} \qquad (4)$

Vergleicht man dieses mit dem geometrischen Mittel $b_1 = \sqrt{ad}$, so hat man

$$(b_1^2 = ad) \gtrless \left(b_3^2 = \frac{a^4+d^4+2a^2d^2}{(a+d)^2}\right)$$

woraus geordnet und reducirt

$$a^3 d + ad^3 \gtrless a^4 + d^4$$

und hieraus $d \gtrless a$

Da aber $b_1 < a$; $d < b_1$, so ist $d < a$, und folglich $b_1 < b_3$.

D. h. das contraharmonische Mittel ist gröfser als das geometrische Mittel.

Durch Umformung des contraharmonischen Mittels $\frac{a^2+d^2}{a+d}$ in $a + d - \frac{2ad}{a+d}$ erhält man dessen Gröfse = dem doppelten arithmetischen Mittel (1) weniger dem harmonischen Mittel.

Mittelgeschwindigkeit ist nicht zu verwechseln mit mittlerer Geschwindigkeit. Diese letztere ist diejenige Geschwindigkeit, welche ein materieller Punkt haben würde, wenn er statt einer fort-

dauernd ungleichförmigen Bewegung während einer bestimmten Zeit und auf eine bestimmte Länge innerhalb derselben Zeit und auf dieselbe Länge von Anfang bis Ende gleichförmig sich bewegte, wie diese Bezeichnung bei den Gestirnen, als der Sonne und dem Monde gebräuchlich ist. Die erstere, die Mittelgeschwindigkeit dagegen ist die wirkliche Geschwindigkeit eines materiellen Punkts, wenn dieser von zweien nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften zugleich angegriffen wird, so dafs er weder die eine noch die andere annehmen kann, sondern dafs er in einer zwischen beiden liegenden Richtung sich bewegen mufs, und zwar mit einer aus den Gröfsen und Richtungen der Kräfte hervorgehenden Geschwindigkeit (s. den Art. „Bahn", No 2 mit Fig. 163 pag. 270). Es verhalten sich hier in der Mechanik die Seitengeschwindigkeiten zur Mittelgeschwindigkeit wie in der Statik die Seitenkräfte zur Mittelkraft. Jene drei Geschwindigkeiten bilden das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, wie die drei Kräfte das Parallelogramm der Kräfte.

Mittelkraft, s. u. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 5, pag. 57, ist gleichfalls nicht zu verwechseln mit mittlerer Kraft (s. d.).

Mittellinie ist jede Linie, die innerhalb eines begrenzten Raumes in der Mitte liegt, die eine Figur in zwei gleiche Theile theilt, die in Prismen und Cylindern die Mittelpunkte der Endflächen, die in Pyramiden und Kegeln die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundebene verbindet. In zweiastigen Curven heifsen die Mittellinien Axen und Durchmesser.

Mittellinie eines Magnets ist die gerade Verbindungslinie seiner Pole.

Mittelpunkt ist in einer Linie, einer Fläche und einem Körper der mittelste Punkt: die Mitte einer geraden Linie ist deren Mittelpunkt. Stellt man sich diese Linien, Flächen und Körper gleichförmig materiell oder auch ohne Masse vor, so ist Mittelpunkt mit Schwerpunkt gleichbedeutend.

Der Mittelpunkt des Gleichgewichts von Kräften ist der Punkt des Systems, welcher nach der Richtung der entgegengesetzt mittleren Kraft unterstützt das System in Ruhe erhält.

Mittelpunkte der Momente s. den Art. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 16, pag. 62.

Der Mittelpunkt des Schwungs bei einem zusammengesetzten (einem physischen) Pendel ist derjenige Punkt desselben, welcher selbst ohne Masse an einer massenlosen Pendelstange in derselben Entfernung vom Aufhängepunkt mit dem zusammengesetzten Pendel dieselben Schwingungen machen würde.

Der Mittelpunkt einer Centralbewegung ist der Sitz der dieselbe erhaltenden attractorischen Kraft.

Mittelpunkt der Entfernung, s. später: „Punkt der mittleren Entfernung".

Der Mittelpunkt eines Stofses ist der Punkt des gestofsenen Körpers, der von der stofsenden Kraft allein getroffen dem Körper dieselbe Wirkung mittheilen würde.

Mittelpunktsgleichung, s. v. w. „Gleichung der Bahn" (s. d.).

Mitternacht ist wie Mittag eine Zeit und ein Punkt an der hohlen Himmelskugel, beides für jeden Ort der Erdoberfläche. Der Himmelspunkt ist der am nördlichen Horizont des Meridians, der Zeitpunkt derjenige, in welchem die Orte des unteren Meridians Mittag haben. Eben so sind die Begriffe wahre und mittlere Mitternachtszeit. Die beiden Erdpole haben keine Mitternacht.

Mitternachtsfläche, Mitternachtsgegend, Mitternachtspunkt wie bei Mittag; Mitternachtskreise sind die unteren Meridiane.

Anstatt Mittagshöhe hat man Mitternachtstiefe der Gestirne. Eine genauere Betrachtung und geometrische Constructionen derselben befindet sich wie für Mittagshöhe Bd. I, pag. 176 bis 178 mit Fig. 109 bis 111.

Mittlere Anomalie, s. „Anomalie" mit Fig. 66.

Mittlere Bewegung ist die auf gleichförmige Bewegung reducirte ungleichförmige B. Vergleiche: Mittlere Geschwindigkeit in dem Art. „Mittelgeschwindigkeit".

Mittlere Entfernung bedeutet in der Astronomie die halbe grofse Axe der elliptischen Bahn eines Planeten oder eines Mondes. Ihre Länge ist die Einheit für alle übrigen Längenelemente desselben Gestirns; vornehmlich bestimmt sie die Excentricität der Bahn, nämlich den Abstand des Axenmittelpunkts von dem Brennpunkt, dem Kraftpunkt, dem Ort des Centralkörpers, als aliquo-

ten Theil dieser halben grofsen Axe, diese halbe grofse Axe als Einheit genommen, in Decimalen, desgleichen wird für die Angaben der mittleren Entfernnng nnseres Mondes nnd der übrigen Planeten in abstracten Zahlen als Vielfache der halben grofsen Axe nnserer Ekliptik ale Einheit.

Mittlere Glieder oder innere Glieder einer Proportion, s. u. „äufsere Glieder einer Proportion.

Mittlere Kraft. Ist während auf einander folgender constanter Zeitperioden und bei constanten Bewegungen während jeder solchen Zeit der zu überwindende Widerstand in fortdauernd abwechselnder Gröfse, so ist es auch die diesen Widerstand überwindende Kraft. Diejenige, während solcher Periode constant bleibende Kraft, welche dieselbe Wirkung auf den ungleichförmigen Widerstand ausüben würde, heifst die mittlere Kraft (vergleiche den Art. „Krummzapfen").

Mittlerer Ort ist bei der Bewegung eines Gestirns in seiner Bahn derjenige augenblickliche Standpnnkt desselben, den er in der Bahn einnehmen würde, wenn er von dem angenommenen Anfangspnnkt ab für dieselbe Zeit des vollständigen Umlaufe gleichförmig eich bewegt hätte.

Mittlerer Planet ist statt des wirklichen Planeten ein eingebildeter Planet, der immer in einem jeden der eben beschriebenen mittleren Orte sich befindet; der Planet also, welcher statt des wirklichen in gleichförmiger Bewegung die Bahn durchläuft. Vergleiche: Mittlere Sonne in dem Art. „Chronologie", No. 5, pag. 27.

Mittlere Proportionale zweier Zahlengröfsen ist die Quadratwurzel aus dem Prodnct derselben.

Mittlere Sonne ist das für die wirkliche Sonne, was der mittlere Planet für den Planeten ist (s. „Chronelogie", Ne 5, pag. 27).

Mittleres Sonnenjahr, mittlerer Sonnentag u. s. w, s. den folgenden Artikel.

Mittlere Sonnenzeit ist nnsere hürgerliche Zeit. Sie würde die wahre Sonnenzeit sein, wenn die für diese Zeit von den Astronomen eingesetzte fingirte mittlere Sonne statt der wirklichen am Himmel sich scheinbar bewegte. Die mittlere Sonne hat mit der wahren einen Cyclus von 400 Jahren, in welchen ihre Umläufe sich vollständig ausgleichen nnd wieder einen genau übereinstimmenden Nullpnnkt als Anfangspnnkt erhalten, wo die wahre nnd die mittlere Sonne genau dieselbe Länge haben.

Aus überlieferten Beobachtungen, verglichen mit den selbst angestellten, berechnete man nämlich, dafs bei 400 maligem Umlauf, also den Umlauf, das Jahr, im Mittel 365¼ Tage genommen, also innerhalb einer Bewegung von 146100 Tagen die Sonne 3 Tage voraus war, so dafs sie die 400 Umläufe in 146097 Tagen gemacht hatte, und es ergab sich hieraus das mittlere Sonnenjahr $= \frac{1}{400} \times 146097 = 365{,}2425$ mittlere Sonnentage = 365 Tg. 6 St 3 Min. 44,64 Sec. Die nenesten Beobachtnngen nnd Berechnnngen haben jedoch das in unserem Jahrhunderte stattfindende tropische Jahr mit Beachtung der veränderlichen Nachtgleichen = 365,242255 mittlere Sonnentage = 365 Tg. 5 St. 48 Min. 50,832 Sec. gofunden.

Jeder dieser Tage, in welchem die mittlere Sonne in der Ekliptik einen Bogen beschreibt von $\frac{360°}{365{,}242255} = 0{,}9856472$ Grad, ist nnser irdischer Tag, die ewig constante Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde nm ihre Axe, die wir in 24 Stunden eintheilen nnd von der Uhr ablesen, die wahre Sonne mag bei ihrer ungleichförmigen Bewegung stehen wo es sei.

Die Sonne beschreibt während eines solchen (tropischen) Jahres die ganze Ekliptik weniger der Länge 50,1 Bogensecnnden, nm welche der Frühlingspnnkt während des Jahres znrückgetreten nnd der Sonne entgegengekommen ist.

Nnn stelle man sich vor den Zeitpnnkt, in welchem eine nach bürgerlicher Zeit richtig gehende Uhr am 31ten December eines Jahres genau Mitternacht 12 Uhr zeigt, in demselben Augenblick denke man sich den Standpnnkt der Sonne in der Ekliptik sichtbar markirt. Nach einem Jahre gebe man Acht auf den Augenblick, in welchem die Sonne 50,1 Bogensecnnden von der Marke rechts eintritt, wo sie also dieselbe Länge hat, so zeigt in diesem Augenblick die Uhr den 1ten Jannar Morgens 5 Uhr 48' 51". In dem folgenden Jahr zeigt die Uhr den ersten Jannar Morgens 11 Uhr 37' 42"; nach dem zweiten Jahre den ersten Jannar Nachmittag 5 Uhr 26' 33", nach dem dritten Jahre den ersten Jannar Abends 11 Uhr 15' 24" nnd nach dem vierten Jahr den zweiten Jannar Morgens früh 5 Uhr 4' 15".

Es ist also in den vier Jahren fast ein ganzer Tag (es fehlen nur 44' 36" daran) verloren gegangen und aus diesem Grunde erhält in dem vierten Jahre der Februar einen Tag mehr.

Mit diesem eingeschalteten Tage ist die mittlere, die bürgerliche Zeit der wahren Sonnenzeit um 44 Minuten 36 Secunden vorausgeeilt. Demnach beträgt dies einen Tag von 24 Stunden zu viel in $4 \cdot \frac{24^{\circ}}{44' \, 36''}$ = 129,15 Jahren. Die weitere Zeitausgleichung s. in dem Art. „Kalenderjahr".

Die tägliche Bewegung der mittleren Sonne beträgt, wie schon oben angegeben 0,9856472 Grad = 59 Min. 8⅓ Sec. Bogenmaafs. Die stündliche Bewegung 2 Min. 27,847 Sec., die Bewegung in der Minute = 2,464 Secunden, die Vergleichung der mittleren Sonnenzeit mit der Sternzeit s. d. Art. „Chronologie".

Die mittlere Sonnenzeit ist mit der wahren Zeit viermal im Jahre übereinstimmend: am den 14ten April, den 14ten Juni, den 31ten August und den 23ten December.

Modul (Modulus). 1. Das bei den alten Architekten gebräuchliche Längenmaafs, der untere Säulenhalbmesser, welcher in 30 Partes, Minuten getheilt wurde.

2. Bei Logarithmen gegebener Zahlen derjenige der beiden Factoren, aus welchen jeder L. besteht, welcher nur allein von der Basis des Systems abhängig ist, s. den Art. „Basis, Grundzahl eines Logarithmensystems", pag. 327. Der Modul des natürlichen Systems ist = 1; der des Brigg'schen Systems = 0,43429...

Molecüle sind Massentheilchen eines Körpers, nicht aber die Atome (s. d.), sondern Complexe derselben.

Molecülarkräfte werden die zwischen den Molecülen von festen Körpern thätigen Kräfte genannt, welche dieselben an einander befestigen; sie sind also gleichbedeutend mit den Cohäsionskräften; bei tropfbar flüssigen Körpern sind sie gering, bei luftförmigen Körpern findet die entgegengesetzte Eigenschaft statt, die Kraft der Expansion.

Moment, 1. mechanisches ist das Product einer Kraft oder Masse multiplicirt mit deren Geschwindigkeit oder mit dem Wege derselben in einer bestimmten Zeit.

2. Statisches ist das Product einer Kraft oder Masse multiplicirt mit ihrem Abstand von einem beliebig angenommenen Punkt oder von einer beliebig angenommenen oder einer durch die Natur des Systems gegebenen Drehaxe. Das statische Moment ist entweder ein Moment der Kraft oder ein Moment des Widerstandes (Moment der Last). Anwendungen hiervon s. den Art. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 17, pag. 62 und weiter.

Moment der Trägheit. Was hierunter verstanden wird ist in dem Art. „Massenreduction" No. 2 erklärt. Die Voraussetzung, dafs die Masse in einem Punkt sich befinde, wie in jenem Art. No. 1, bei Entwickelung des Gesetzes für die Reduction hat angenommen werden müssen, ist hypothetisch, denn eins der wesentlichen Grundmerkmale von Masse ist, dafs sie einen Raum einnimmt. Hat man also von einer einen begrenzten Raum einnehmenden Masse das Trägheitsmoment zu bestimmen, so gibt es theoretisch betrachtet nur ein Mittel, nämlich, dafs man jedes einzelne Massentheilchen der Masse mit dem Quadrat seines Abstandes multiplicirt und alle diese Producte addirt; oder dafs man den Grenzwerth der Summe findet, unter der Bedingung, dafs die einzelnen Massentheilchen immer kleiner und kleiner genommen werden, wodann dieser Grenzwerth das Trägheitsmoment der ganzen Masse ist.

Kennt man dieses Trägheitsmoment, so ist auch immer die Bewegung der Masse um eine Axe vermöge einer gegebenen Kraft zu bestimmen, wenn man hypothetisch annimmt, dafs dieselbe Masse in einem einzigen Punkt vereinigt ist.

In Folgendem sollen die Trägheitsmomente ($\mathfrak{M}$) von Linien, Flächen und Körpern bestimmt werden.

1. Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichförmig vertheilten

Fig. 807.

$DE = l$; $DF = b$

geraden Linie DE, die mit einer Drehaxe AB verbunden ist.

Die Masse der Linie DE sei $= M$, $CF = a$ der kürzeste Abstand beider Linien GH und AB, die durch F gezogene gerade Linie GH sei $\ddagger AB$, $\angle HFD = \alpha$. Die Länge von $DE = l$, die Länge $DF = b$, die auf dieselbe kommende Masse $= m'$, so ist $M' = \frac{b}{l} M$.

Theile DF in n gleiche Theile; von F aus sei J der $m-1$)te, O der $m$te Theilpunkt, so ist der auf JO kommende Massentheil $= \frac{1}{n} M'$.

Fällt man das Loth JK auf GH und das Loth KL auf AB, so ist JL der Abstand des Punkts J von AB, und man hat

$$JL^2 = KL^2 + JK^2 = a^2 + (JF \cdot \sin\alpha)^2 = a^2 + \left(\frac{m-1}{n} b\right)^2 \sin^2\alpha$$

Eben so findet sich das Quadrat des Abstands des Punkts O von AB

$$= a^2 + \left(\frac{m}{n} b\right)^2 \sin^2\alpha$$

Das Moment der auf JO vertheilten Masse ist offenbar kleiner, als wenn die Masse in O und größer als wenn sie in J vereinigt wäre. Multiplicirt man also die beiden Abstände mit der Masse $\frac{1}{n} M'$ und bezeichnet das wirkliche Moment dieser Masse mit $\mathfrak{M}_n$, so hat man

$$\left[\frac{a^2}{n} + \frac{(m-1)^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha\right] M' < \mathfrak{M}_n < \left(\frac{a^2}{n} + \frac{m^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha\right) M'$$

Setzt man hierein statt m der Reihe nach die Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und summirt die n Vergleichungen, so schließen die Außenglieder das Moment $\mathfrak{M}'$ der Masse M' ein und man hat

$$\left[a^2 + \frac{\Sigma (n-1)^2}{n^3} \cdot b^2 \sin^2\alpha\right] M' < \mathfrak{M}' < \left[a^2 + \frac{\Sigma n^2}{n^3} \cdot b^2 \sin^2\alpha\right] M'$$

Der Unterschied der einschließenden Größen ist offenbar

$$\frac{n^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha \, M' = \frac{1}{n} b^2 \sin^2\alpha \, M'$$

und kann mit dem Wachsthum von n beliebig klein werden.

Nun ist aber

$$\frac{\Sigma (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1) n (2n-1)}{6n^3}$$

und

$$\frac{\Sigma n^2}{n^3} = \frac{n (n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Folglich begreifen diese beiden Zahlen offenbar die Zahl $\frac{n \cdot n \cdot 2n}{6 \cdot n^3} = \frac{1}{3}$ in sich, und folglich ist auch die Größe

$$(a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) M' = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M$$

mit $\mathfrak{M}'$ zwischen denselben Größen begriffen, deren Unterschied beliebig klein werden kann. Man hat also das **Trägheitsmoment der geraden Linie**

$$\mathfrak{M}' = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M. \quad (1)$$

Eben so findet man das Trägheitsmoment für die auf EF kommende Masse, wenn man $l - b$ statt b setzt. Daher das **Trägheitsmoment der ganzen Massenlinie**

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{c}{l} M + [a^2 + \tfrac{1}{3} (l-b)^2 \sin^2\alpha] \frac{l-b}{l} M$$
$$= [a^2 + (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2) \sin^2\alpha] M \quad (2)$$

Ist $b = \frac{1}{2} l$, so daſs F in der Mitte von DE liegt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha) M \quad (3)$$

Ist $b = 0$, so daſs die Linie $EF = l$ an dem der Axe näheren Endpunkt F mit der Axe befestigt ist, so hat man

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha) M \quad (4)$$

Ist $b = l$, so daſs die Linie DF an dem der Axe entfernteren Endpunkt F mit der Axe verbunden ist, so bleibt

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha)\, M \qquad (5)$$

Ist $a = 0$, so daſs der Punkt F in C liegt und die Linie unmittelbar mit der Axe verbunden ist, so ist

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2) \sin^2\alpha \cdot M \qquad (6)$$

Ist $\alpha = 0$, so daſs die Linie in GH und in der Entfernung a ∦ mit der Axe schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = a^2 M \qquad (7)$$

Ist $a = 90°$, so daſs die Linien in F mit der Axe verbunden, in einer Ebene schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + b^2 - lb + \tfrac{1}{3} l^2)\, M \qquad (8)$$

Ist $\alpha = 90°$, $b = \tfrac{1}{2} l$, so daſs die Linie in der Mitte mit der Axe verbunden ist und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{12} l^2)\, M \qquad (9)$$

Ist $\alpha = 90°$, $b = 0$, so daſs die Linie an einem Endpunkt mit der Axe verbunden ist und in einer Ebene schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2)\, M \qquad (10)$$

Ist $\alpha = 90°$, $a = 0$, so daſs die Linie, indem F in C liegt, mit der Axe unmittelbar verbunden ist, so hat man

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2)\, M \qquad (11)$$

Ist $\alpha = 90°$, $a = 0$, $b = 0$, so daſs die Linie EF mit dem einen Endpunkt F in C liegt und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} l^2 \cdot M \qquad (12)$$

Ist $a = 0$, $b = \tfrac{1}{2} l$, so daſs die Linie DE mit ihrer Mitte in C liegt, so ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha\, M$$

Ist $a = 0$, $b = 0$, so daſs die Linie EF mit einem Endpunkt in C sich befindet, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha\, M \qquad (13)$$

Ist $a = 0$, $\alpha = 90°$, $b = \tfrac{1}{2} l$, so daſs die Linie EF mit einem Endpunkt in C und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} l^2 M \qquad (14)$$

Die Formel 1 ist mit Hülfe der Integralrechnung leichter darzustellen:

Setzt man nämlich das beliebige Stück $FJ = x$, läſst dies um $JO = \triangle x$ wachsen, so ist die auf $\triangle x$ fallende Masse $= \frac{M}{l} \triangle x$, der Abstand JL ist im Quadrat $=$

$$KL^2 + JK^2 = a^2 + FJ^2 \sin^2\alpha = a^2 + x^2 \sin^2\alpha$$

mithin ist das Moment von $\triangle x =$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = (a^2 + x^2 \sin^2\alpha) \frac{M}{l}$$

Mithin das Moment der Linie $DF = x$:

$$\mathfrak{M} = \int (a^2 + x^2 \sin^2\alpha) \frac{M}{l}\, \partial x = \frac{M}{l} (a^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 \sin^2\alpha)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $M = 0$ wird.

Setzt man nun $x = DF = b$, so erhält man das Moment wie Formel 1.

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{l} (a^2 b + \tfrac{1}{3} b^3 \sin^2\alpha) = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M$$

2. Das Trägheitsmoment einer Curve, auf welcher Masse gleichförmig vertheilt ist, in Beziehung auf eine mit ihr in einer Ebene liegende Axe.

Es sei AB die Drehaxe, CD die Curve, deren Masse auf die Länge $= 1$ sei m,

Fig. 808.

die Axe zur Abscissenlinie genommen habe A zum Anfangspunkt, für den Punkt E seien $AF = x$, $EF = y$ die Coordinaten. Die Länge des Bogens CE sei $= l$, das Trägheitsmoment der Masse dieses Bogens $= \mathfrak{M}$, so ändert sich dies Moment um $\triangle \mathfrak{M}$, wenn x den Zuwachs $\triangle x$ und y den Zuwachs $\triangle y$ erhält; der Zuwachs der Masse ist sodann $= m \cdot \triangle l$.

Nun kann $\triangle x$ so klein genommen werden, daſs die Ordinaten von y bis $y + \triangle y$ entweder fortdauernd wachsen oder abnehmen. Dann ist der Zuwachs $\triangle \mathfrak{M}$ des Moments begriffen zwischen den Trägheitsmomenten, welche für die Masse $m \cdot \triangle l$ statt finden würden, wenn diese sich einmal am Endpunkt der Ordinate y und das andere Mal an dem der $(y + \triangle y)$ befände. Man hat daher immer

$$y^2 m \cdot \Delta l \lesseqgtr \Delta \mathfrak{M} \lesseqgtr (y + \Delta y)^2 m \cdot \Delta l$$

folglich
$$my^2 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x} \lesseqgtr \frac{\Delta \mathfrak{M}}{\Delta x} \lesseqgtr m (y + \Delta y)^2 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

und wenn man zu den Grenzwerthen übergeht, so erhält man
$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = m\, y^2 \cdot \frac{\partial l}{\partial x}$$

woraus
$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \cdot \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \partial x = m \int y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C \qquad (15)$$

wo die Constante so zu bestimmen ist, daſs das Integral für die Abscisse des Anfangspunkts C des Bogens verschwindet.

Beispiel. Es sei CD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Axe AB liegt, dessen Halbmesser $= r$. Nimmt man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$y^2 = r^2 - x^2; \text{ also } y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -x \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

Diese Werthe in Gleichung 15 substituirt ergibt

$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \partial x = m \int y \sqrt{y^2 + x^2}\, \partial x = mr \int y\, \partial x \qquad (16)$$

Es ist aber $\int y\, \partial x$ die Fläche des Kreisstücks zwischen der Abscisse und den beiden Ordinaten des Anfangs- und des Endpunkts des Bogens. Ist dieses Flächenstück vom Inhalt $= F$, so ist

$$\mathfrak{M} = m \cdot r \cdot F \qquad (17)$$

Dieses Resultat erhält man auch auf elementarem Wege:

Denn man denke sich den Bogen CD in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt, S_m sei der $m$te dieser Theile von C an gezählt, das Loth aus der Mitte J von S_m auf die Axe gefällt sei y_m, die Projection des Theils S_m auf die Axe sei z_m. Dann ist das Trägheitsmoment von S_m

$$\mathfrak{M}_m = m\, S_m \cdot y_m^2.$$

Denkt man sich nun das Dreieck EGH als ein sehr kleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse S_m und dessen waagerechte Cathete z_m ist, ferner von J den Halbmesser $JN = r$ gezeichnet, also das zweite Dreieck, wo der Halbmesser r die Hypotenuse und y_m die der z_m ähnlich liegende Cathete ist, so hat man

$$S_m : z_m = r : y_m$$

woraus
$$S_m = r \frac{z_m}{y_m}$$

mithin $\mathfrak{M}_m = m \cdot r \cdot z_m \cdot y_m$.

Es ist also das Trägheitsmoment des ganzen Bogens $= m \cdot r \sum (z_m \cdot y_m)$.

Da nun $z_m \cdot y_m$ die Fläche ist, die von $S_m \cdot z_m$ und den Endordinaten gebildet wird, so ist das Trägheitsmoment der ganzen Linie $= m \cdot r \cdot F$.

3. Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichmäſsig versehenen Umdrehungsfläche, wenn die Axe der Fläche zugleich die Dreh-axe ist.

Ist CD, Fig. 808, der Bogen der Curve, von der bei der Umdrehung um AB die krumme Fläche durchlaufen wird; sind x, y die Endordinaten des Bogens, die Drehaxe AB zur Abscissenlinie genommen, die krumme Fläche $= u$ und die auf die Flächeneinheit kommende Masse $= m$, das Trägheitsmoment der ganzen Masse $= \mathfrak{M}$, so hat man unter der Voraussetzung wie bei No. 2:

$$y^2 \cdot m \cdot \Delta u \lesseqgtr \Delta \mathfrak{M} < (y + \Delta y)^2 \cdot m \, \Delta u$$

Diese drei Vergleichungen durch Δx dividirt und zum Grenzwerth übergegangen gibt

$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\, \partial x.$$

Nach Bd. II, pag. 194 ist aber das Differenzial der Umdrehungsfläche u

$$= \frac{\partial u}{\partial x} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

Mithin ist

$$\mathfrak{M} = 2m\pi \int y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C \qquad (18)$$

Beispiel. Es sei, Fig. 809, die **Umdrehungsfläche eine Kugelzone, die ihren Mittelpunkt C in der Drehaxe hat;** so ist, wenn man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Abscissen nimmt,

$$y^2 = r^2 - x^2$$

hieraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

Fig. 809.

und folglich $$\mathfrak{M} = 2m\pi \int y^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, \partial x = 2m\pi \int y^2 \sqrt{y^2 + x^2}\, \partial x$$
$$= 2\pi mr \int y^2 = 2\pi mr \int (r^2 - x^2) + C$$

also das Trägheitsmoment der von dem Bogen EJ gebildeten Kugelzone

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,(r^2x - \tfrac{1}{3}x^3) \qquad (19)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch die Zone $= 0$ wird.

Hat der Anfangspunkt des Bogens die Abscisse a links von C, d. h. ist die Abscisse für diesen Anfangspunkt $= -a$, so muſs $\mathfrak{M}$ für $x = -a$ verschwinden. Dann ist also

$$0 = 2\pi mr\,(-r^2a + \tfrac{1}{3}a^3) + C$$

also vollständig für den Bogen DE

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,[r^2(x + a) - \tfrac{1}{3}(x^3 + a^3)] \qquad (20)$$

Die Klammergröſse multiplicirt mit π ist die körperliche Zone zwischen den Ordinaten y und y' und schreibt man dieselbe

$$(r^2x - \tfrac{1}{3}x^3) + (r^2a - \tfrac{1}{3}a^3)$$

so ist π mal der ersten Klammergröſse die von $CJEG$ gebildete körperliche Zone von der Höhe x, und π mal der zweiten die von $CJDF$ gebildete körperliche Zone von der Höhe a.

In dem Art. „Kugel", No. 26 hat man nämlich die Formel für die körperliche Zone

$$\tfrac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Für die Zone rechts von der Höhe x ist hier $a = r$; $b = y$ und $h = x$; demnach hat man die körperliche Zone

$$\tfrac{1}{6}\pi x\,(3r^2 + 3y^2 + x^2) = \tfrac{1}{6}\pi x\,(3r^2 + 3r^2 - 3x^2 + x^2) = \pi\,(r^2x - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Eben so erhält man die links liegende Zone von der Höhe $a = \pi\,(r^2a - \tfrac{1}{3}a^3)$.

Bezeichnet man den Inhalt der zwischen y und y' begriffenen körperlichen Zone mit K, so ist **das Moment der Zonenoberfläche**

$$\mathfrak{M} = 2mr \cdot K \qquad (21)$$

Erstreckt sich der Bogen bis H in die Drehaxe, **so ist die Fläche eine Calotte,** a ist $= r$ und aus Formel 20

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,[r^2(x + r) - \tfrac{1}{3}(x^3 + r^3)] = 2\pi mr\,[\tfrac{2}{3}r^3 + r^2x - \tfrac{1}{3}x^3] \qquad (22)$$

Erstreckt sich der Bogen auch auf der zweiten Seite bis zur Drehaxe, so ist auch $x = r$, **die Fläche ist eine Kugelfläche, und deren Trägheitsmoment**

$$\mathfrak{M} = \tfrac{8}{3}\pi mr^4 \qquad (23)$$

Bezeichnet man mit M die auf die ganze Kugelfläche vertheilte Masse $= 4\pi mr^2$, so ist das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{3}r^2 M \qquad (24)$$

d. h. **Das Trägheitsmoment der Masse einer Kugeloberfläche ist = dem von ⅔ der Masse, wenn diese in dem Abstand des Halbmessers von der Drehaxe angebracht wird.**

Die vorstehenden Resultate lassen sich auch durch elementare Betrachtung finden. Ist nämlich die Masse auf eine Zone gleichmäſsig vertheilt, so theile man die Höhe derselben in unendlich viele unendlich kleine Theile und lege durch die Theilpunkte Ebenen normal der Drehaxe, wodurch die Zone in lauter gleich groſse Zonen zerlegt wird, von denen jede $= 2\pi r \frac{h}{n}$ ist; deren Masse $= 2\pi r \frac{h}{n} \cdot m$.

Der Abstand des $m$ten Theils von der Axe sei y_m, so ist dessen Trägheitsmoment $= 2\pi r \frac{h}{n} \cdot m y_m^2$, folglich die Sum-

me aller Momente der n Zonen =

$$2rm \sum \pi \frac{h}{n} y_m^2.$$

Nun ist $\pi \cdot \frac{h}{n} y_m^2$ der Inhalt des $m$ten Kugelabschnitts, mithin die Summe $\sum \pi \frac{h}{n} y_m^2$ der Inhalt des ganzen Kugelabschnitts. Dieser mit K bezeichnet gibt das Trägheitsmoment $= 2rmK$.

Verwandelt sich die Zone in die Kugelfläche, so wird $K = \frac{4}{3}\pi r^3$, folglich das Trägheitsmoment der Kugelfläche $= \frac{8}{3}\pi m r^4 = \frac{2}{3} r^2 M$, wo M die auf die ganze Kugelfläche vertheilte Masse bezeichnet.

4. **Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichmäfsig versehenen Figur, die von der Abscisse, den beiden Ordinaten und einer Curve begrenzt ist, in Beziehung auf die Abscisse als Drehaxe.**

Die Masse der Flächeneinheit sei $= m$, zwischen den Abscissen x und $x + \Delta x$ sollen die Ordinaten entweder immerfort wachsen oder immerfort abnehmen. Denkt man sich nun zwei Rechtecke von der gemeinschaftlichen Höhe Δx, deren Grundlinien y und $(y + \Delta y)$, so wird von den

Fig. 810.

Trägheitsmomenten beider Rechtecke der Zuwachs $\Delta \mathfrak{M}$ des Moments der Figur eingeschlossen. Die Massen der Rechtecke sind $y \cdot \Delta x \cdot m$ und $(y + \Delta y)\Delta x \cdot m$, deren Trägheitsmomente sind aber = den Trägheitsmomenten ihrer Massen einmal auf y und das andere Mal auf $(y + \Delta y)$ gleichmäfsig vertheilt, daher diese Trägheitsmomente

$$= \tfrac{1}{3} y^2 \cdot y \cdot \Delta x \cdot m \text{ und } \tfrac{1}{3}(y + \Delta y)^2 (y + \Delta y) \Delta x \cdot m$$

Zwischen beide fällt $\Delta \mathfrak{M}$.

Wenn man also die drei Vergleichungen durch Δx dividirt und zu den Grenzwerthen übergeht, so ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = \tfrac{1}{3} m y^3$$

Woraus **das Trägheitsmoment der Figur**

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} m \int y^3 \partial x + C \qquad (25)$$

Beispiel. Es sei, Fig. 811, die begrenzende Curve eine gerade Linie AB, die **Figur also ein Trapes.** Man hat also

$$x_, : y_, = x : y$$

woraus $y = \frac{y_,}{x_,} x$

folglich

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} m \int \left(\frac{y_,}{x_,} x\right)^3 \partial x + C$$
$$= \tfrac{1}{3} m \left(\frac{y_,}{x_,}\right)^3 \int x^3 \partial x$$
$$= \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y_,}{x_,}\right)^3 \cdot x^4 + C$$

Für $x = x_,$ mufs $\mathfrak{M}$ verschwinden, daher vollständig

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y_,}{x_,}\right)^3 (x^4 - x_,^4) \qquad (26)$$

Will man das Trägheitsmoment durch die parallelen Seiten y, $y_,$ und durch die Höhe x ausdrücken, so hat man die Höhe $= h$ gesetzt: $h = x - x_,$

ferner $\quad x = \frac{x_,}{y_,} y$

folglich $\quad x_, + h = x = \frac{x_,}{y_,} y$

woraus $\quad x_, = \frac{h y_,}{y - y_,}$

und $\quad x = h + \frac{h y_,}{y - y_,} = \frac{h y}{y - y_,}$

Fig. 811.

Diese Werthe in Formel 26 substituirt gibt das Moment des Trapezes

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y - y_,}{h}\right)^3 \cdot \frac{h^4 y^4 - h^4 y_,^4}{(y - y_,)^4} = \tfrac{1}{12} m h \frac{y^4 - y_,^4}{y - y_,} = \tfrac{1}{12} m h (y + y_,)(y^2 + y_,^2) \qquad (27)$$

Ist M die Masse des Trapezes $= \frac{1}{2} h (y + y_{,}) m$, so hat man

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6} (y^2 + y_{,}^2) M \qquad (28)$$

Ist $y_{,} = 0$, so erhält man das Trägheitsmoment des rechtwinkligan Dreiecks, dessen aine Cathete die Drehaxe ist $= \frac{1}{6} y^2 M = \frac{1}{12} x y^3$ (29)
d. h. halb so grofs ais wenn die Massa auf der Cathete y vertheiit wäre.

Da jedes Dreieck sich in swei rechtwinkiige Drelecke theilen läfst, so ist das Trägheitsmoment eines Dreiecks, dessan Grundlinie dle Drehaxe ist = dem 6ten Theii der Masse, dieseihe in der Spitse des Dreiecks vereinigt gedacht.

5. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks mit daranf gieichförmig vertheilter Masse in Besiehung auf eina Axe, die in der Ehene des Dreiecks durch seine Spitse liegt.

Es sei (Fig. 812) die gegenüberliegende Saite mit der Axe parallel $= b$, deren Abstand von der Axe $= h$, die auf die Fiächeneinheit kommende Masse = 1. Theile

Fig. 812.

h in n gleiche Theile, ziehe durch die Thailpnnkte Paralleien mit der Axe nnd beschreibe swischen ihnen inwendig nnd answendig Rechtecke, berechne die Trägheitsmomente dar inwendigen Rechtecke, als wenn deren Massen auf den der Axe sunächst iiegenden Seiten, nnd die dar answendigen Rechtecke, als wenn deren Massen anf den der Axe entfarntest iiegenden Seiten vereinigt wären.

Das oberste inwendige Rechteck hat die Breite $\frac{n-1}{n} b$, die Höhe $\frac{1}{n} h$ nnd sein Abstand $= \left(\frac{n-1}{n}\right) h$, sein Trägheitsmoment ist aiso

$$\frac{n-1}{n} b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{n-1}{n} h\right)^2 = \frac{(n-1)^3}{n^4} bh^3$$

Das oberste answendige Rechteck hat die Breite b, die Höhe $\frac{1}{n} h$ nud den Abstand $= h$, sein Trägheitsmoment ist also

$$b \cdot \frac{1}{n} h \cdot h^2 = \frac{1}{n} bh^3$$

Mithin sind die Snmmen der Momante sämmtlicher in- nnd answendigan Rechtecke

$$\Sigma \frac{(n-1)^3}{n^4} bh^3 \text{ nnd } \Sigma \frac{n^3}{n^4} bh^3$$

Zwischen beiden, deren Unterschied $= \frac{1}{n} bh^3$ ist fällt das Moment des gegebenen Dreiecks.

Nnn ist
$$\Sigma (n-1)^3 = \frac{1}{4} (n-1)^2 \cdot n^2$$
$$\Sigma n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Zwischen beiden ist die Zahi eingeschiossen $\frac{1}{4} n^2 \cdot n^2 = \frac{1}{4} n^4$.

Zwischen baiden obigen Snmmen iiegt aiso anch $\frac{1}{4} \frac{n^4}{n^4} \cdot bh^3 = \frac{1}{4} bh^3$

und da das Moment des Dreiecks ebenfalis swischen beiden Snmmen liegt, so ist das Trägheitsmoment eines mit der Spitse in der Drehaxe nnd mit der Grnndiinie ‡ derselben befindlichen Dreiecks $= \frac{1}{4} bh^3$ (30)

Ist M die gesammte Masse des Dreiecks $= \frac{1}{2} bh$, so ist

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} h^2 M \qquad (31)$$

Das Moment ist also glaich dem Moment der halben Masse, dieselbe in einem Punkt nnter dem Abstand h vereinigt gedacht.

6. Das Trägheitsmoment eines materiellen Trapases, dessen eine paraiieie Seite Drahaxe ist.

Theiie das Trapes durch Lothe ana den Endpunkten der oberen Seite auf die untere in ain Rechteck A und swai rechtwinklige Dreiecke B, C, so ist nach der Beseichnung, Fig. 813, die Masse des Rechtecks $= \mathfrak{M}$, gesetzt

Fig. 813.

$$\mathfrak{M}_{,} = \frac{1}{3} h^2 \cdot M_{,} = \frac{1}{3} h^2 \cdot bh = \frac{1}{3} bh^3$$

Das Moment der beiden Drelecke B

und $C = \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{6} h^2 \cdot M_2$, wenn M_2 deren Masse bezeichnet,

$$= \frac{1}{6} h^2 \cdot \frac{1}{2}(a-b)\,h = \frac{1}{12}(a-b)\,h^3$$

Mithin das Moment des Trapezes die Summe der beiden Momente

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12}(a+3b)\,h^3 \tag{32}$$

Die Masse M des Trapezes ist $= \frac{a+b}{2} h$

mithin zugleich

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6} \frac{a+3b}{a+b} h^2 M \tag{33}$$

7. Das Trägheitsmoment eines beliebigen materiellen Dreiecks in Beziehung auf eine durch eine der Spitzen des Dreiecks und in dessen Ebene liegende Drehaxe.

Ist die auf die Flächeneinheit kommende Masse = 1, so hat man bei der Bezeichnung, Fig. 814, nach Formel 27:

Fig. 814.

Das Moment des Trapezes $CDJG =$

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{12}(f+g)(a+b)(a^2+b^2)$$

Die Trägheitsmomente der beiden Seitendreiecke sind nach Formel 29

$$\frac{1}{12} f a^3 + \frac{1}{12} g \cdot b^3.$$

Diese beiden Momente von dem des Trapezes abgezogen gibt das Moment des Dreiecks CDE

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12}(ag+bf)(a^2+ab+b^2) \tag{34}$$

Der Inhalt des Dreiecks CDE ist $=$

$$\frac{a+b}{2}(f+g) - \frac{af+bg}{2} = \frac{ag+bf}{2} = M$$

daher das Trägheitsmoment des $\triangle CDE$ auch

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)\,M \tag{35}$$

8. Das Trägheitsmoment eines Massensystems für irgend eine Axe ist = dem Trägheitsmoment für eine mit dieser parallele Axe durch den Schwerpunkt des Systems + dem Trägheitsmoment der gesammten Masse in ihrem Schwerpunkt vereinigt gedacht und dieser in Beziehung auf die erste Axe genommen. D. h. Ist $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt genommene Axe, M die gesammte Masse, $\mathfrak{M}'$ aber das Trägheitsmoment derselben in Beziehung auf eine mit jener im Abstand a parallelen Axe, so ist

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a^2 M$$

Denn es sei AB (Fig. 815) die durch den Schwerpunkt G des Systems liegende Axe, CD die in der Entfernung $GH = a$ mit ihr parallele Axe; m; m_1; m_2 ...

Fig. 815.

seien die einzelnen Massentheile des Systems, ihre Abstände von AB seien x; x_1; x_2 ...; von CD aber y; y_1; y_2 ...; endlich φ; φ_1; φ_2 ... die Winkel, welche die Abstände x; x_1 ... mit den Abständen a der beiden Axen mit den Durchschnittspunkten der Axe AB machen, diese Winkel von 0 bis 360° nach einer Seite hin gezählt (Fig. 816).

Fig. 816.

Da nun die x auf der Axe AB und die y auf der Axe CD normal stehen, so sind die Axen auch auf den Ebenen der Winkel zwischen x und y normal und folglich sind die Abstände der Standpunkte je zweier zusammengehörigen Lothe x und y auf den beiden Axen normal und folglich überall $= a$.

Man hat demnach in jedem Dreieck zwischen a und den x und y:

$$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\varphi$$

und wenn man mit dem Massenalement m multiplicirt

$$my^2 = ma^2 + mx^2 - 2max\cos\varphi$$

Eben so hat man

$$m_{,} y_{,}^2 = m_{,} a^2 + m_{,} x_{,}^2 - 2m_{,} a x_{,} \cos\varphi_{,}$$

u. s. w.

Addirt man nun alla diesa so gebildeten Gleichungen, so erhält man

$$my^2 + m_{,} y_{,}^2 + \ldots = (m + m_{,} + \ldots)\, a^2 + mx^2 + m_{,} x_{,}^2 + \ldots - 2a(mx\cos\varphi + m_{,} x_{,} \cos\varphi_{,} + \ldots)$$

Nun sind die Producte $x\cos\varphi$, $x_{,}\cos\varphi_{,}$, ... die Abstände der Massentheile von Ebenen, die sich sämmtlich in der durch den Schwerpunkt G mit CD parallel gelegte Axe durchschneiden, und swar liegen diese Abstände gegen die Ebenen entweder nach der einen oder der anderen Seite, je nachdem die Producte positiv oder negativ sind. Folglich ist die letzte Klammergröfse die algebraische Summe der statischan Momante sämmtlicher Massenthelle in Beziehung auf jena Ebenen aus. Diese Ebenan gehen aber durch den Schwerpunkt G des Systems, folglich ist diese algabraische Summe der Producte = 0.

Die Gleichung reducirt sich also auf folgende:

$$my^2 + m_{,} y_{,}^2 + \ldots = (m + m_{,} + \ldots)\, a^2 + mx^2 + m_{,} x_{,}^2 + \ldots$$

Nach der angenommanen Bezeichnung ist aber

$$my^2 + m_{,} y_{,}^2 + \ldots = \mathfrak{M}'$$

$$m + m_{,} + \ldots\ldots = M$$

$$mx^2 + m_{,} x_{,}^2 + \ldots = \mathfrak{M}$$

folglich hat man

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a^2 M \qquad (36)$$

9. Aus dem Satz No. 8 folgt, dafs in Bezug auf parallele Axen das **Trägheitsmoment für diejenige Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, ein Minimum ist; dafs es aber für alle parallele Axen unter einerlei Abstand vom Schwerpunkt unveränderlich dasselbe bleibt.**

10. **Das Trägheitsmoment eines Dreiecks in Bezug auf eine Axe in der Ebene desselben und durch den Schwerpunkt, ferner in Bezug auf jede andere Axe parallel mit der Ebene des Draiecks** (Fig. 817).

Fig. 817.

Ist DE eine durch den Schwerpunkt G des $\triangle ABC$ gelegte Axe, die Masse des Dreiecks $= M$, die Abstände der drei Winkelspitzen $= a$, b, c. Man siahe durch die Spitze A die Linie $FH \ddagger DE$, so sind die Abstände der Punkte B und C von $FH = a + b$ und $a \pm c$, folglich das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ für FH nach Formal 35

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{6}[(a+b)^2 + (a+b)(a \pm c) + (a \pm c)^2]\, M$$

Hiervon $a^2 M$ abgesogen, gibt das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreiecks in Beziehung auf die Axe DE.

Nun ist der Abstand $AJ = a$ des Schwerpunkts G von der Axe FH

$$= a = \frac{(a+b) + (a \pm c)}{3}$$

woraus $\quad a = b \pm c$

folglich ist das Moment des Dreiecks auf FH, wenn man c eliminirt

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{6}(7a - ab + b^2)\, M$$

und das gesuchte Moment auf $DE = \mathfrak{M}' - a^2 M$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(a^2 - ab + b^2)\, M \qquad (37)$$

und wenn man a eliminirt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(b^2 \pm bc + c^2)\, M \qquad (38)$$

Soll nun das Trägheitsmoment für eine beliebige andere mit der Dreiecksebene parallele Axe gefunden werden, so darf man nur durch den Schwerpunkt des Dreiecks eine Linie $\ddagger$ der Axe ziehen, das Trägheitsmoment für dieselbe nach Formel 37 oder 38 aufstellen und hierzu $a_{,}^2 M$ addiren, wenn $a_{,}$ den Abstand beider Axen beseichnet.

11. **Das Trägheitsmoment einer materiellen Figur, wenn diese durch eine Curve und beide Endordinaten begrenzt ist und die Dreh-**

axe durch einen Punkt der Abscisse normal auf der Ebene der Figur steht.

Es sei für die Figur *CAGF* der Durchschnittspunkt *E* der Drehaxe zugleich der

Fig. 818.

Anfangspunkt der Coordinaten. Es sei das Trägheitsmoment der Figur = $\mathfrak{M}$, das Flächenstück selbst = u. Aendert sich x um Δx, und hiermit y um Δy, u um Δu, also die Masse mu um $m\Delta u$, so denke man diese zuerst auf y und dann auf $y + \Delta y$ gleichmäfsig vertheilt, so werden beide das wahre Moment $\Delta \mathfrak{M}$ einschliefsen.

Nun ist nach Formel 10

das auf y vertheilte Moment =

$$(x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, m \cdot \Delta u$$

das auf $y + \Delta y$ vertheilte Moment =

$$[(x + \Delta x)^2 + \tfrac{1}{3}(y + \Delta y)^2]\, m \cdot \Delta u$$

Zwischen beiden wenn man sie mit Δx dividirt ist also auch $\frac{\Delta \mathfrak{M}}{\Delta x}$ begriffen.

Beide einschliefsende Quotienten haben aber den gemeinschaftlichen Grenzwerth $(x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, m \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, folglich hat auch die zwischen fallende Gröfse $\frac{\Delta \mathfrak{M}}{\Delta x}$ denselben Grenzwerth. D. h. es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = m\,(x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, \frac{\partial u}{\partial x}$$

Da nun nach Obigem $\partial u = y \cdot \partial x$, so hat man

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = m\,(x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, y$$

woraus das Moment der Figur

$$\mathfrak{M} = m \int (x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, y\, \partial x + C \tag{39}$$

12. Beispiel. Es sei die Linie (*AG*) eine gerade, die durch die Drehaxe *E* geht, also die Linie *EG*. Dann ist ihre Gleichung wenn man $u = x\, tg\, \alpha$ setzt

$$x\, tg\, \alpha = y$$

und

$$\mathfrak{M} = m \int (x^2 + \tfrac{1}{3} y^2)\, y\, \partial x = m \int (x^2 + \tfrac{1}{3} x^2\, tg^2 \alpha)\, x\, tg\, \alpha\, \partial x$$
$$= m\, tg\, \alpha\, (1 + \tfrac{1}{3} tg^2 \alpha) \int x^3\, \partial x = \tfrac{1}{4} m\, tg\, \alpha\, (1 + \tfrac{1}{3} tg^2 \alpha)\, x^4 + C$$

Setzt man $x = b$, $y = h$, so ist $tg\, \alpha = \frac{h}{b}$ und man hat das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks für eine durch die Spitze von b normal auf der Dreiecksebene befindliche Drehaxe

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} m \cdot b \cdot h\, (3b^2 + h^2) \tag{40}$$

Die Masse des Dreiecks ist $M = \tfrac{1}{2} mbh$, mithin hat man auch das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(3b^2 + h^2)\, M = \tfrac{1}{2}(b^2 + \tfrac{1}{3} h^2)\, M = \tfrac{1}{4}\, bh\, (b^2 + \tfrac{1}{3} h^2) \tag{41}$$

D. h. das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks für die Axe, welche durch die Spitze normal auf seiner Ebene steht, ist so grofs, als wenn die halbe Masse auf der gegenüberliegenden Cathete gleichmäfsig vertheilt wäre.

Das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Drehaxe *E* ist

$$= (\tfrac{2}{3} b)^2 + (\tfrac{1}{3} h)^2 = \tfrac{1}{9}(4b^2 + h^2)$$

Also das Moment $\mathfrak{M}'$ des Dreiecks auf eine durch den Schwerpunkt normal auf die Dreiecksebene gerichtete Axe ist

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{2}(b^2 + \tfrac{1}{3} h^2)\, M - \tfrac{1}{9}(4b^2 + h^2)\, M = \tfrac{1}{18}(b^2 + h^2)\, M \tag{42}$$

13. Das Trägheitsmoment eines beliebigen Dreiecks für eine Axe, die auf dessen Ebene normal ist.

Die Axe gehe zuerst durch den Winkelpunkt *A*, dessen Abstand *AD* von der gegenüberliegenden Seite *BC* sei h, und b und c seien die Abstände der beiden anderen Spitzen *B* und *C* von dem Punkt *D*.

Die Masse der Flächeneinheit sei = 1, so ist das Moment des $\Delta\, ABD$ nach Formel 41

Fig. 819.

$= \frac{1}{4} bh (h^2 + \frac{1}{3} b^2)$

das Moment des $\triangle ACD = \frac{1}{4} ch (h^2 + \frac{1}{3} c^2)$

folglich das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf A

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{4} h [bh^2 + \frac{1}{3} b^3 - ch^2 - \frac{1}{3} c^3]$$
$$= \frac{1}{4} h (b - c)[h^2 + \frac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)] \quad (43)$$

Ist M die Masse des Dreiecks $ACB = \frac{1}{2} h (b - c)$, so hat man auch das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf A

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} [h^2 + \frac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)] M \quad (44)$$

Der Schwerpunkt G des $\triangle ABC$ liegt auf der BC in E halbirenden Linie AE, und es ist $AG = \frac{2}{3} AE$ daher

$$AG^2 = \frac{4}{9}(AD^2 + DE^2) = \frac{4}{9}\left[h^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]$$

Daher das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf die in dem Schwerpunkt G befindliche Axe

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} [h^2 + \frac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)] M - \frac{4}{9}\left[h^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right] M$$
$$= \frac{1}{18}(h^2 + b^2 + c^2 - bc) M \quad (45)$$

14. Ist das Dreieck ACC' gleichwinklig, also $AC' = AC$, so hat man nur das Moment des $\triangle ACC'$ zu bestimmen, das Moment dessen Hälfte, des $\triangle ADC$ wie No. 13 das Moment des $\triangle ABD$, wenn man in demselben c für b setzt

$$= \frac{1}{4} ch (h^2 + \frac{1}{3} c^2)$$

Das Moment des gleichschenkligen $\triangle ACC'$ in Beziehung auf die Axe in A ist demnach

$$= \frac{1}{2} ch (h^2 + \frac{1}{3} c^2)$$

Bezeichnet man wie gewöhnlich die ganze Grundlinie CC' mit einem Buchstaben a, so hat man vom $\triangle ACC'$ das Trägheitsmoment für die Axe in A

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4} ah (h^2 + \frac{1}{12} a^2) \quad (46)$$

und da dessen Masse $M = \frac{1}{2} ah$ auch

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}(h^2 + \frac{1}{12} a^2) M \quad (47)$$

15. Das Trägheitsmoment einer materiellen Kreisebene für eine durch seinen Mittelpunkt normal auf der Ebene befindliche Axe.

Ist M die Masse, also die Masse m der Flächeneinheit $= \frac{M}{\pi r^2}$, so sei $\mathfrak{M}'$ das Trägheitsmoment des concentrischen Theils der Kreisebene vom Halbmesser $= x$. Beim Zuwachs von x um $\triangle x$ wächst die Masse um

$$\pi m [(x + \triangle x)^2 - x^2] = \pi m (2x + \triangle x) \triangle x$$

Denkt man sich alle diese Massentheile erst im Abstand x, dann im Abstand $x + \triangle x$ vom Mittelpunkt, so wird das wahre Moment der Zuwachsmasse von beiden Momenten eingeschlossen und es ist

$$\pi m (2x + \triangle x) \triangle x \cdot x^2 < \triangle \mathfrak{M}' < \pi m (2x + \triangle x) \triangle x (x + \triangle x)^2$$

Die drei Vergleichungen durch $\triangle x$ dividirt und zu den Grenzwerthen übergegangen gibt

$$\frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = 2\pi m x^3$$

woraus $\mathfrak{M}' = 2\pi m \int x^3 \partial x = \frac{1}{2} \pi m x^4$

wo $C = 0$ ist.

Für $x = r$ hat man das Trägheitsmoment der ganzen Kreisebene

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \pi m r^4 = \frac{1}{2} r^2 M \quad (48)$$

Dies Resultat erhält man elementar, wenn man den Kreis in lauter kleine Dreiecke zerlegt denkt, deren Spitzen im Mittelpunkt liegen; alsdann ist nach No. 12 das Moment jedes der Dreiecke = dem Moment der halben Masse ($\frac{1}{2} \pi r^2 m$) in der Grundlinie, also im Abstand r von der Axe entfernt; mithin gilt dies von allen Dreiecken zusammen genommen, d. h. vom ganzen Kreise.

16. Das Trägheitsmoment eines materiellen Kreisringes von den Halbmessern r und ϱ in Beziehung auf die durch den Mittelpunkt normal der Ebene befindliche Drehaxe.

Setzt man die Masse des Ringes $= M$,

die des Ergänzungskreisea $= M'$, so ist das Trägheitsmoment dea ganzen Krelsea

$$= \tfrac{1}{2} r^2 (M + M')$$

das des Ergänzungskreises

$$= \tfrac{1}{2} \varrho^2 M'$$

folglich das dea Ringes $= \tfrac{1}{2} r^2 (M + M') - \tfrac{1}{2} \varrho^2 M'$

Nun ist $M' : M + M' = \varrho^2 : r^2$
woraus $M : M' = r^2 - \varrho^2 : \varrho^2$

und $M : M + M' = r^2 - \varrho^2 : r^2$

folglich ist $M' = \dfrac{\varrho^2}{r^2 - \varrho^2} \cdot M$:

$$M + M' = \frac{r^2}{r^2 - \varrho^2} \cdot M$$

folglich ist das Trägheitsmoment des Kreisrings

$$\mathfrak{M} = \left(\tfrac{1}{2} r^2 \cdot \frac{r^2}{r^2 - \varrho^2} - \tfrac{1}{2} \varrho^2 \cdot \frac{\varrho^2}{r^2 - \varrho^2} \right) M = \tfrac{1}{2} \frac{r^4 - \varrho^4}{r^2 - \varrho^2} M = \tfrac{1}{2}(r^2 + \varrho^2) M \qquad (49)$$

17. **Das Trägheitsmoment eines Cylinders in Beziehung auf seine Axe als Drehaxe.**

Denkt man sich den Cylinder in eine unendliche Menge von Cylindern von unendlich kleinen Höhen zertheilt, so hat jeder einzelne dieser Theile dasselbe Moment mit dem Kreise $\tfrac{1}{2} r^2 M$ (Formel 48), mithin der ganze Cylinder die Summe dieser Momente zum Moment, also desgleichen das Trägheitsmoment $\tfrac{1}{2} r^2 M$.

Man kann aber auch für die Ermittelung des Moments die Massentheile des Cylinders parallel mit seiner Axe nach einer Seite hin fortgeführt und auf einen seiner Endkreise gebracht denken, wo dann das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe dasselbe bleibt. Es ist nun der Cylinder zu einer materiellen Kreisebene geworden und man hat nach Formel 48

Das Trägheitsmoment eines vollen Cylinders in Beziehung auf seine Axe.

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} r^2 M \qquad (50)$$

Die Masse M des Cylinders ist $= \pi r^2 h$, mithin hat man auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi r^4 h \qquad (51)$$

18. **Das Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders in Beziehung auf seine Axe als Drehaxe.**

Es ist dies bei derselben Betrachtung mit No. 17 wie Formel 49

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(r^2 + \varrho^2) M \qquad (52)$$

Die Masse M ist $= \pi (r^2 - \varrho^2) h$, demnach auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi (r^4 - \varrho^4) h \qquad (53)$$

19. **Das Trägheitsmoment einer Kugel in Beziehung auf eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Drehaxe.**

Es sei AB die Drehaxe, FG der auf AB normale durch den Mittelpunkt gerichtete, DE ein zweiter ihm paralleler Kreisdurchschnitt, der Halbmesser CG der Kugel $= r$, der Abstand beider Kreisebenen $= x$, der Halbmesser von DE $= y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Kugelabschnitts von der Höhe $r + x$ mit $\mathfrak{M}'$, so ist das Trägheitsmoment dessen Zuwachses $\triangle \mathfrak{M}'$ begriffen zwischen

Fig. 820.

dem zweier Cylinder von der Höhe $\triangle x$ und deren Grundflächen die Halbmesser y und $y + \triangle y$ haben. Ist m die Masse der Cubikeinheit, so sind diese Trägheitsmomente nach Formel 51

$$\tfrac{1}{2} \pi m y^4 \cdot \triangle x \text{ und } \tfrac{1}{2} \pi m (y + \triangle y)^4 \triangle x$$

folglich $\dfrac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \pi m y^4$

folglich

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{2} \pi m \int y^4 \partial x = \tfrac{1}{2} \pi m \int (r^2 - x^2)^2 \partial x$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi m (r^4 x - \tfrac{2}{3} r^2 x^3 + \tfrac{1}{5} x^5) + C$$

Das Integral zwischen den Grenzen $x = -r$ und $x = +r$ gibt das Trägheitsmoment der ganzen Kugel. Für $x = -1$ wird $\mathfrak{M}' = 0$, also $C = \tfrac{4}{15} \pi m r^5$. Diesen Werth eingesetzt und $x = +r$ genommen entsteht das Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$\mathfrak{M} = \tfrac{8}{15} \pi m r^5 \qquad (54)$$

Die Masse der Kugel ist $= \tfrac{4}{3} \pi m r^3$, folglich ist zugleich

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} r^2 M \qquad (55)$$

20. Ein zweites Verfahren für die Auffindung des Trägheitsmoments der Kugel ist folgendes:

Es sei x der Halbmesser eines concentrischen Theils der Kugel, $\mathfrak{M}'$ dessen Trägheitsmoment, K' dessen Inhalt, so sind die zusammen gehörigen Aenderungen $\triangle x$, $\triangle K'$, $m \triangle K'$ und $\triangle \mathfrak{M}'$.

Die Masse zuerst auf den Halbmesser x, sodann auf den Halbmesser $x + \triangle x$ vereinigt gedacht, geben die beiden einschliefsenden Trägheitsmomente. Nun hat man nach Formel 24

$$\tfrac{2}{3} m x^2 \triangle K' < \triangle \mathfrak{M}' < \tfrac{2}{3} m (x + \triangle x)^2 \triangle K'$$

woraus $\dfrac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{2}{3} m x^2 \dfrac{\partial K'}{\partial x}$

Nun ist $K' = \tfrac{4}{3} \pi x^3$

folglich $\dfrac{\partial K'}{\partial x} = 4 \pi x^2$

Mithin $\dfrac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{8}{3} \pi m x^4$

und $\mathfrak{M}' = \tfrac{8}{15} \pi m x^5 + C$

wo die Constante fortfällt.

Für $x = r$ und $M = \tfrac{4}{3} \pi m r^3$ entsteht das Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} r^2 M$$

21. Die ad No. 19 angewendete Methode beschränkt sich nicht auf die Kugel allein, sondern gilt für alle Umdrehungskörper, wenn ihre Axe als Drehaxe genommen wird.

Ist nämlich die Erzeugungslinie ihrer Oberfläche durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben, die Axe des Körpers als Abscissenlinie genommen und ist $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Körpers, der zwischen zweien auf der Drehaxe normal geführten Ebenen begriffen ist, von welchen die eine den Abstand x auf der Abscisse vom Coordinaten-Anfangspunkt genommen hat, so ist nach denselben Schlüssen wie No. 19 bei der Kugel, die zu x gehörige Ordinate der Erzeugungslinie $= y$ gesetzt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi m \int y^4 \partial x$$

Dies Integral mufs immer zwischen den Grenzen genommen werden, welche die beiden auf der Axe normalen den Körper begrenzenden Ebenen bestimmen.

22. Das Trägheitsmoment eines Körpers, der durch Flächen begrenzt wird, deren Punkte durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind.

Man nehme die Drehaxe des Körpers zur Axe der Z, A sei der Anfangspunkt der Coordinaten, AX und AY die Axen der X und der Y. $DGFH$ sei die krumme

Fig. 821.

Fläche, welche mit den drei Coordinatenebenen $AENK$, $AGDK$ und $AEFG$ und den beiden, den letzten beiden Ebenen in den Abständen x und y parallel gezogenen Ebenen $EFHN$ und $DHNK$ den Körper begrenzt. Dann ist $EF = z$, die zu $AK = x$ und $AE = y$ gehörige Ordinate des Punkts F und zwischen x, y, z ist eine Gleichung gegeben. Die auf die Körpereinheit kommende Masse sei $= m$.

Das Trägheitsmoment des bezeichneten Körpers in Beziehung auf AZ sei $= \mathfrak{M}$.

Aendert sich x um $\triangle x$ allein, so ändert sich der Körper um dessen Verlängerung $DHNKd_1h_1n_1h_1$ das Moment $\mathfrak{M}$ ändert sich um das Moment $\triangle \mathfrak{M}$ dieses Zuwachskörpers, und natürlich dieses auf x als Urvariable genommen hat man nach der Taylor'schen Reihe (Bd. II, pag. 299, Formel 1)

$$\mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} + R'$$

wo R' die übrigen Ergänzungsglieder in Summa bezeichnet.

woraus $$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} + R'$$

Aendert sich y um $\triangle y$ allein, so ändert sich der Körper um dessen Verlängerung $FHNEf_1h_2n_2e$, und man hat wie vorher die Momentsänderung, d. h. das Trägheitsmoment des genannten Zuwachskörpers in Beziehung auf die Axe der Z

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} \triangle y + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial y^2} \cdot \frac{\triangle y^2}{1 \cdot 2} + R,$$

Aendert sich x und y zugleich, so ändert sich der Körper um die beiden vorher betrachteten Zuwachskörper + dem Prisma $HNh_1n_1MJh_2n_2$, und man erhält

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial y^2} \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} + R''$$

Zieht man von dieser Gesammtänderung die Summe der ersten beiden Aenderungen ab, so erhält man das Trägheitsmoment des über NJ stehenden Prisma in Beziehung auf die Axe der Z, Abstand AN:

$$= \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + R'' - R' - R, \quad \text{(I)}$$

wo R'', R', R, Gröſsen sind, die mit $\Delta x \cdot \Delta y$ dividirt, bei der beliebigen Abnahme dieser beiden beliebig klein werden können.

Ist V das Volumen des Körpers, so ist eben so die Differenz zwischen der Gesammtänderung des Körpers und der Einzeln-Aenderungen nach x und nach y also das Prisma

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + R_{,,} \quad \text{(II)}$$

Nun ist offenbar der Unterschied I. das Moment des Volumen II.; das Quadrat des kleinsten Abstandes ist $AN^2 = x^2 + y^2$, das Quadrat des gröſsten ist

$$AJ^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$$

Multiplicirt man also das Volumen mit m und einzeln mit den Quadraten beider Abstände, so begreifen die Producte das oben bestimmte Moment zwischen sich. Man hat demnach:

$$m(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + R_{,,} < \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + \ldots$$
$$< m\left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2\right] \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + R_{,,}$$

Dividirt man nun die drei Vergleichungen mit $\Delta x \cdot \Delta y$, und geht zu den Grenzwerthen über, so hat man

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} = m(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y}$$

Es ist aber $\partial V = z \cdot \partial x \cdot \partial y$

woraus $\quad \dfrac{\partial V}{\partial x \cdot \partial y} = z$

mithin $\quad \dfrac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x \cdot \partial y} = m(x^2 + y^2)\, z$

und $\quad \mathfrak{M} = m \int^2 (x^2 + y^2)\, z \cdot \partial x \cdot \partial y \quad (54)$

Da diese Integrirung zwei Constanten einführt, so sind diese so zu bestimmen, daſs die Integrale für $x = 0$ und $y = 0$ verschwinden.

22 a. **Beispiel.** Das Trägheitsmoment eines geraden Prisma, dessen Grundfläche ein Trapez ist, in Beziehung auf die parallele Grundkante als Drehaxe.

Fig. 822.

Es seien $AB = a$ und $DE = b$ die parallelen Grundkanten der Grundebene des Prisma, AB die Drehaxe, h deren Höhe, l die Länge des Prisma. Nimmt man den einen Endpunkt A der Kante zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Kante AB selbst zur Axe der Z, die darauf normale Kante l zur Axe der X und die auf beiden Kanten normale Linie AF zur Axe der Y, so ist nach dem vorigen Satz das Trägheitsmoment des Körpers

$$\mathfrak{M} = m \int^2 (x^2 + y^2)\, z\, \partial x \cdot \partial y$$

Nimmt man nun eine beliebige Länge $AG = y$, zieht die mit AB Parallele GJ, so hat man

$$z = HJ = GJ - GH = a - \frac{a - b}{h}\, y.$$

Setzt man nun z aus dem Integral zu eliminiren, diesen Werth ein, so ist

$$\mathfrak{M} = m\int^2 (x^2 + y^2)\left(a - \frac{a-b}{h}y\right)\partial x \cdot \partial y + C$$

Integrirt man $\mathfrak{M}$ auf x, wo also y constant gesetzt wird, so erhält man

$$\mathfrak{M} = m\int^2\left[x^2\left(a - \frac{a-b}{h}y\right) + y^2\left(a - \frac{a-b}{h}y\right)\right]\partial x \cdot \partial y$$

$$= m \cdot \int(\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x)\left(a - \frac{a-b}{h}y\right)\partial y + C$$

Dieses Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ genommen gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}ml\int(l^2 + 3y^2) \cdot \frac{ah - ay + by}{h}\partial y$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{ml}{h}\int[ahl^2 - (a-b)l^2 y + 3ahy^2 - 3(a-b)y^3]\partial y$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{ml}{h}[ahl^2 y - \tfrac{1}{2}(a-b)l^2 y^2 + ahy^3 - \tfrac{3}{4}(a-b)y^4] + C$$

Dieses Integral zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = h$ genommen: gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}mlh\left[\frac{a+b}{2}l^2 + \tfrac{1}{4}(a+3b)h^2\right] \quad (55)$$

Die Masse M des Prisma ist $\frac{a+b}{2}h \cdot l \cdot m$; daher auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}\left(l^2 + \tfrac{1}{2}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M \quad (56)$$

Ist die Grundfläche des Prisma ein Parallelogramm, also $b = a$, so ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}(l^2 + h^2)M \quad (57)$$

23. Diese Formel 57 findet man unmittelbar aus Formel 54, wenn man s constant $= a$ setzt.

Dann ist also

$$\mathfrak{M} = ma\iint(x^2 + y^2)\partial x \cdot \partial y$$

Auf x integrirt

$$m = ma\int(\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x)\partial y$$

x zwischen 0 und l genommen.

$$\mathfrak{M} = m \cdot a \cdot l\int(\tfrac{1}{3}l^2 + y^2)\partial y$$

Auf y integrirt

$$m \cdot a \cdot l(\tfrac{1}{3}l^2 y + \tfrac{1}{3}y^3)$$

y zwischen 0 und h genommen

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}m \cdot a \cdot l(l^2 h + h^3) = \tfrac{1}{3}m \cdot a \cdot l \cdot h(l^2 + h^2)$$

Nun ist $M = a \cdot h \cdot l \cdot m$, daher auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}(l^2 + h^2)M = \tfrac{1}{3}(XF)^2 M \quad (58)$$

Wenn also das Parallelepipedum um eine Kante schwingt, so ist sein Trägheitsmoment dasselbe, als wenn der dritte Theil seiner Masse in der diagonal gegenüberliegenden Kante vereinigt wäre.

24. Zur Prüfung der Richtigkeit von vorstehenden und ähnlichen Berechnungen kann man wie folgt verfahren. Man nehme das Moment des rechtwinkligen Parallelepipeds nach No. 23 und ziehe davon ab das Moment des Prisma der Grundebene AEF.

Ersteres ist $\tfrac{1}{3}m \cdot a \cdot l \cdot h(l^2 + h^2)$

Letzteres durch x, y, s ausgedrückt Formel 54, in welcher $s = GH = \frac{a-b}{h}y$.

Also $$\partial m_{,} = \iint(x^2 + y^2)\frac{a-b}{h}y\,\partial x \cdot \partial y$$

$$= m\frac{a-b}{h}\iint(x^2 y + y^3)\partial x \cdot \partial y + C$$

Dieses Differenzial nach x integrirt und x von 0 bis l genommen gibt

$$m\frac{a-b}{h}l\int(\tfrac{1}{3}l^2 y + y^3)\partial y + C$$

Dieses Differenzial nach y integrirt und y zwischen 0 und h genommen gibt

$$m(a-b)hl(\tfrac{1}{6}l^2 + \tfrac{1}{4}h^2$$

Mithin die Differenz genommen gibt das Trägheitsmoment des Prisma von der Grundebene $ABDE =$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}malh(l^2 + h^2) - m(a-b)hl[\tfrac{1}{6}l^2 + \tfrac{1}{4}h^2)$$

$$= \tfrac{1}{3}mlh[\tfrac{1}{2}(a+b)l^2 + \tfrac{1}{4}(a+3b)h^2] = \tfrac{1}{3}\left(l^2 + \tfrac{1}{2}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M$$

wie Formel 55 und 56.

25. Schreibt man Formel 56:

$$\mathfrak{M} = \left(\tfrac{1}{3}l^2 + \tfrac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M$$

so hat man Formel 12: $\tfrac{1}{3}h^2 M$ als das Trägheitsmoment einer geraden materiellen Linie, die um einen ihrer Endpunkte in einer Ebene schwingt, also auch das Moment eines um eine Grundflächenkante

schwingenden Prisma, wenn dessen Masse auf die Höhe oder Länge l gleichmäſsig vertheilt ist. Ferner ist nach Formel 33 $\frac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2 \cdot M$ das Trägheitsmoment eines Trapezes, wenn es um die gröſsere parallele Seite a schwingt, zugleich also auch das Moment eines Prisma, wenn dessen Masse auf die trapesförmige Grundfläche gleichmäſsig vertheilt ist.

Demnach ist das Trägheitsmoment eines vierseitigen Prisma = der Summe der Trägheitsmomente, wenn die Masse desselben auf dessen Länge und dieselbe Masse auf die Grundebene vertheilt wird

$$=\left(\tfrac{1}{3}h^2 + \tfrac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M.$$

Für $b=0$ erhält man hieraus das Trägheitsmoment des dreiseitigen Prisma x von der Länge l, dessen Grundfläche die Seite a und die Höhe h hat, wenn man also das erste h mit l vertauscht

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3}l^2 + \tfrac{1}{6}h^2)M = \tfrac{1}{6}(2l^2 + h^2)M \qquad (59)$$

Es ist $\frac{1}{3}l^2M$ das Trägheitsmoment der Länge, $\frac{1}{6}h^2M$ das des Dreiecks, man hat bei dem dreiseitigen Prisma also dasselbe Gesetz wie bei dem vierseitigen.

26. Man kann diese Formel auch unmittelbar aus Formel 54 entwickeln, wenn man BE zieht und das $\triangle ABE$ als Grundebene betrachtet, alsdann ist $HK = z$ und man hat $a : z = h : h - y$

woraus $$z = \frac{a}{h}(h-y)$$

Diesen Werth in Formel 54 gesetzt gibt

$$\mathfrak{M} = m\int^2 (x^2+y^2)\frac{a}{h}(h-y)\partial x \cdot \partial y$$

$$= m\frac{a}{h}\int^2 (hx^2 - yx^2 + hy^2 - y^3)\partial x \cdot \partial y$$

Nach x integrirt und x von 0 bis l genommen gibt:

$$\mathfrak{M} = m\frac{a \cdot l}{h}\int(\tfrac{1}{3}hl^2 - \tfrac{1}{3}l^2y + hy^2 - y^3)\partial y$$

Nun wieder nach y integrirt und y zwischen 0 und h genommen:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}m \cdot a \cdot l \cdot h(2l^2 + h^2)$$

Nun ist $M = \frac{1}{2}ah \cdot lm$

woraus wie Formel 49:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(2l^2 + h^2)M.$$

Der Abstand des Schwerpunkts eines Trapezes von der Drehaxe a ist $= \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h$, im Prisma liegt er auf der halben Länge. Daher ist der Abstand des Schwerpunkts dieses Prisma von der Drehaxe im Quadrat $= (\frac{1}{2}l)^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h\right)^2$.

Multiplicirt man das Quadrat mit M und zieht es von dem Moment, Formel 56 ab, so erhält man das Trägheitsmoment des Prisma für die durch den Schwerpunkt, parallel mit einer der beiden Grundkanten genommene Axe:

$$\mathfrak{M} = \left[\tfrac{1}{12}l^2 + \tfrac{1}{18}\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}h^2\right]M \qquad (60)$$

27. Es sind die Trägheitsmomente eines Massensystems in Beziehung auf drei unter sich normale Coordinatenaxen gegeben. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige Axe soll bestimmt werden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Es sei AB die neue Momentenaxe, X, Y, Z seien die drei gegebenen Axen, α, β, γ die Winkel der neuen Axe mit

Fig. 823.

den alten, m sei ein Massentheilchen des Systems, dessen Abstand von $A = Am = d$; x, y, z dessen Coordinaten, δ der Winkel zwischen d mit AB, p das Loth von m auf AB, so ist das Trägheitsmoment des Elements m auf $AB = p^2 \cdot m$.

Nun ist $p = d \sin\delta$; $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$, $\frac{z}{d}$ sind die Cosinus der Winkel, den die Coordinatenaxen mit d bilden. Daher ist

$$\cos\delta = \cos\alpha \cdot \frac{x}{d} + \cos\beta \cdot \frac{y}{d} + \cos\gamma \cdot \frac{z}{d}$$

folglich $d\cos\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$

Aber $p^2 = d^2\sin^2 d = d^2(1-\cos^2\delta) = d^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$

Ferner ist $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Folglich $$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cdot\cos\gamma$$

oder $p^2 = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma - 2xy \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2xz \cos\alpha \cdot \cos\gamma - yz \cos\beta \cdot \cos\gamma$,
daher das Trägheitsmoment in Beziehung auf die neue Axe:

$$mp^2 = mx^2 \sin^2\alpha + my^2 \sin^2\beta + mz^2 \sin^2\gamma - 2m\,xy \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2m\,xz \cos\alpha \cdot \cos\gamma - 2m\,yz \cos\beta \cdot \cos\gamma$$

Gleiche Ausdrücke erhält man für alle übrigen Massentheile m_1; m_2; $m_3 \ldots$, deren Coordinaten $x_1\ y_1\ z_1$; $x_2\ y_2\ z_2$; ... sind.

Daher ist das Trägheitsmoment des ganzen Systems

$$\mathfrak{M} = \sin^2\alpha \textstyle\sum mx^2 + \sin^2\beta \sum my^2 + \sin^2\gamma \sum mz^2 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \sum mxy - 2\cos\alpha \cdot \cos\gamma \sum mxz - 2\cos\beta \cdot \cos\gamma \sum myz \qquad \text{(I)}$$

Sind die Coordinatenebenen so angenommen und ist das Massensystem so beschaffen, dafs jede Ebene das System in 2 congruente oder symmetrische Hälften theilt, so werden die drei letzten Glieder einzeln = 0. Denn alsdann gibt es zu beiden Seiten jeder Ebene z. B. XY für z und $-z$ zwei gleiche Massentheile, deren Momente sich gegenseitig aufheben. Da sich nun allgemein darthun läfst, dafs für jedes Massensystem durch jeden beliebigen Punkt sich wenigstens drei rechtwinklige Coordinatenaxen annehmen lassen, für welche jede der drei letzten summarischen Glieder verschwinden, die Hauptaxen, so sollen die Axen hier als Hauptaxen gedacht werden. Dann reducirt sich die Gleichung auf

$$\mathfrak{M} = \sin^2\alpha \textstyle\sum mx^2 + \sin^2\beta \sum my^2 + \sin^2\gamma \sum mz^2 \qquad \text{(II)}$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Systems für die Axe der X mit A, für die Axe der Y mit B, für die Axe der Z mit C, so ist

$$A = \textstyle\sum m(y^2 + z^2) = \sum my^2 + \sum mz^2$$
$$B = \textstyle\sum m(x^2 + z^2) = \sum mx^2 + \sum mz^2$$
$$C = \textstyle\sum m(x^2 + y^2) = \sum mx^2 + \sum my^2$$

Hieraus folgt

$$\tfrac{1}{2}(A + B - C) = \textstyle\sum mz^2$$
$$\tfrac{1}{2}(A - B + C) = \textstyle\sum my^2$$
$$\tfrac{1}{2}(-A + B + C) = \textstyle\sum mx^2$$

Diese Werthe in den Ausdruck II. für $\mathfrak{M}$ substituirt, gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(-A + B + C)\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}(A - B + C)\sin^2\beta + \tfrac{1}{2}(A + B - C)\sin^2\gamma$$

oder $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}A(-\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + \frac{1}{2}B(\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + \frac{1}{2}C(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma)$

Nun ist $-\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = -1 + \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1 + \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos^2\alpha$

weil $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Eben so findet man den Factor von $\frac{1}{2}B = 2\cos^2\beta$ und den von $\frac{1}{2}C = 2\cos^2\gamma$.

Also hat man endlich

$$\mathfrak{M} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \qquad \text{(III)}$$

Da nun $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$ so ist aus III.

$$\mathfrak{M} = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma$$

Eben so weil $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$

$$\mathfrak{M} = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta$$

Sind nun die Momente der Hauptaxen ungleich und $A > B > C$, so ist das Moment A für die Axe der X das gröfste und das C für die Axe der Z das kleinste unter allen Axen, die denselben Anfangspunkt haben, weil $A - B$, $A - C$, $B - C$ positive Gröfsen sind. Ist der Anfangspunkt zugleich Schwerpunkt, so ist C das kleinste Trägheitsmoment für alle Momentenaxen der Trägheit.

Sind zwei der Trägheitsmomente in Beziehung auf die Hauptaxen einander gleich, z. B. $B = C$, so wird aus III.

$$\mathfrak{M} = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$= A\cos^2\alpha + B(1 - \cos^2\alpha)$$
$$= B + (A - B)\cos^2\alpha$$

Folglich bleibt dann das Trägheitsmoment des Systems für alle Axen ein und dasselbe, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, dessen Axe die Axe A und dessen Seite mit ihr den Winkel α bildet.

Sind $A = B = C$, so ist $\mathfrak{M} = A$.

D. h. das Trägheitsmoment für alle Axen, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt werden, bleibt dasselbe.

Monat, s. d. Art. „Astronomischer Monat" und „Cyclus".

Mond. Der stete Begleiter unserer Erde, die Erhellnng unserer Nächte. Seine Bewegung um die Erde und mit dieser um die Sonne, so dafs fortdauernd der zwischen beiden gemeinschaftliche Schwerpunkt in der Ekliptik sich befindet und darin fortschreitet, s. den Art. „Centralbewegung“ mit Fig. 279. Es ist hierbei zu beachten, dafs wegen der Kreisbewegnng des Mondes um die Erde der gedachte Schwerpunkt in jedem Augenblick verrückt wird und dafs dies aufser den Kreisbewegnngen des zwischen Erde nnd Mond bestehenden Massensystems noch geradlinige Bewegungen zur Folge hat.

Die Mondbahn um die Erde durchschneidet die Ekliptik uuter einem nur kleinen Winkel von 5° 8′ 47″ im Mittel uud weicht höchstens $5\frac{1}{4}$° von derselben ab.

Es sei *C* der Mittelpunkt der Erde, *qq* die Durchschnittslinie der Aequatorebene, *ee* die unter $23\frac{1}{2}$° mit derselben geneigte der Ekliptik nnd *mm* die der Mondbahn, so ist $\angle ecm = 5° \, 8' \, 47'$. Diese Mondbahuebeue bleibt (die Schwankungeu des Systems vorläufig uuberücksichtigt gelassen)

Fig. 824.

ebeu so constant parallel mit sich selbst als die Erd-Aequatorebene. Der Mond links stehend hat südliche Breite (gegen *ee*) und nördliche Abweichung (gegen *qq*), rechts nördliche Breite und südliche Abweichnng.

Die consequent bleibende Parallelität der einzelnen Bahnen veranlafst Aenderungen in den Lagen zwischen *ee* nnd *mm*

Es ist im Profil der Herbstpunkt *H* als Standpunkt *C* gedacht, und der Mond steht aufserhalb der Ekliptik *FSHW* unterhalb nnd innerhalb, oberhalb derselbeu. Dasselbe ist mit dem Erdaequator der Fall, und in beideu Lagen ist der Winkel *mcq* zwischen der Mondbahn und dem Erdaequator $(ecq - ecm) = 23\frac{1}{2}° - 5° \, 8\frac{3}{4}' = 18° \, 21\frac{1}{4}'$.

Schreitet man nnn im Kreise der Ekliptik mit der Erde nnd dem sie nmkreisendeu Mond von *H* über *W* nach *F* mit fort, so erblickt man vor *F* den Erdaequator innerhalb der Ekliptik unterhalb nnd aufserhalb der Ekliptik oberhalb derselben. Die Mondbahn dagegen ist als eine ebenfalls parallel bleibende Kreislinie mit dem hier links befindlichen Punkt rechts; aufserhalb gekommen nnd unterhalb geblieben, und der rechts befindliche Punkt *m* ist innerhalb der Ekliptik gekommen uud oberhalb geblieben; demnach sind in beideu Lagen $\angle mcq$ zwischeu Erdaequator und Mondbahn $(ecq + ecm) = 23\frac{1}{2}° + 5° \, 8\frac{3}{4}' = 28° \, 38\frac{3}{4}'$.

Der Mond dreht sich während eiues siderischeu Umlaufs ganz gleichförmig nm die Erde herum, nnd da er keiue eigene Rotatiou um seine Axe hat wie die Erde alle 24 Stunden und die übrigeu Planeteu, so macht er während dieses Umlaufs um die Erde nur eine Axeudrehung, nämlich eine Drehnng um die vom Mittelpunkt der Erde als Drehpunkt bis zu seinem Mittelpunkt als Endpunkt reichende Axe. Sein Aequator, die durch seinen Mittelpunkt gelegte mit dem Erdaequator parallel gedachte Ebeue bleibt fortdauernd in constanter Lage und parallel mit sich selbst, wie der Erdaequator; dessen Neigungswinkel mit seiner Bahu *mm* (die Schiefe seiner Ekliptik) beträgt nur $1\frac{1}{2}$°, (bei der Erde ist diese Schiefe $23\frac{1}{2}$°), und wegen gänzlich mangelnder Rotation um sich selbst bleibt er nur mit immer derselben Seite der Erde zugewendet.

Der Mond erleidet mehr als irgeud ein anderer Weltkörper eine Menge von attractorischen Einwirkungen, die während seiner Bewegung um die Erde und mit dieser um die Sonne theils regelmäfsig, theils unregelmäfsig periodisch sich ändern:

Die grofse Schiefe der Erdekliptik veranlafst, dafs der Mond theils den abgeplatteten Nord- und Südpolen theils dem Aequator der Erde zunächst kommt, so dafs seine Axe bald unten bald oben der Erde näher gerückt wird und somit fortdauernd in Schwankungeu verbleibt. Hierzu kommt die periodisch regelmäfsig wiederkehrende Ungleichheit der Anziehung durch die Sonne, je nachdem er in seinem Rundlauf um die Erde der Sonne sich

nähert nnd entfernt, welches von Neumond bis Vollmond in einem Längenunterschied von etwa 103000 Meilen statt findet nnd wodnrch die elliptische Mondbahn bald verkürzt, bald verlängert wird. Endlich kommen die Anziehungen dazn, welche die übrigen Planeten auf ihn ausüben nnd die nm so verschiedener an Gröfse ausfallen, je nachdem die Planeten, besonders die gröfsesten Jupiter, Saturn, Uranus in der Erdferne oder in der Erdnähe, nnd ob sie alle mehr oder weniger anf einer oder anf entgegengesetzten Seiten der Sonne sich befinden.

Der Mond ist aus diesen Gründen der den astronomischen Berechnungen auf das Widerspenstigste entgegentretende Weltkörper gewesen, und erst Laplace ist es dnrch nnsägliche Arbeit gelungen nachznweisen, dafs derselbe dem von Newton entdeckten Attractionsgesetz eben so wie die übrigen Weltkörper streng unterworfen ist. (Vergleiche den Art. „Centralbewegnng", pag. 15 mit Fig. 280.)

Dafs der Mond immer nur die eine Seite der Erde zuweiset, darüber sagt schon Galilei, dafs die diesseitige Mondhalbkugel eine natürliche Beziehung oder Neigung zu ihrem Hauptplaneten, der Erde habe. Denn als Erde nnd Mond ans dem formlosen Chaos sich zu bilden anfingen, fügten sich die einzelnen Weltatome nicht völlig concentrisch um den Mittelpunkt, sondern nach der Seite der Erde hin in stärkerem Maafse. D. h. also: Bei der noch weicheu zum Theil flüssigen Beschaffenheit des Mondes lagerten sich die schwereren Massen, von der Erde angezogen nach dieser hin, befestigten sich dort, und weil nun auf der entgegengesetzten Halbkugel die leichteren Theile verblieben, wurde eine Axenbildung für eine Rotation unmöglich. (Vergleiche den Art. „Attraction" mit Fig. 104, pag. 167.)

Die oben gedachten Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes und in dessen Bahn selbst sind denn anch die Ursach, dafs die Knoten, die Punkte, in welchen der Mond bei seiner Umdrehung die Erdekliptik durchschneidet, eben so sehr veränderlich sind; sie woichen bei jedem einzelnen Umlauf um die Erde nahe 1½° nach Westen znrück nnd beschreiben innerhalb 18 Jahren 228 Tagen (im Mittel) den ganzen Umkreis von 360 Grad.

Die oben erwähnte geringe Neigung des Mondaequators gegen die Ekliptik von nnr 1½ Grad, so dafs beide fast mit einander parallel laufen, ist dann die unmittelbare Ursach, dafs auf dem Mond die Wendekreise nnr 3° aus einander liegen nnd dafs die Polarzonen ebenfalls nur 1½° im Bogen sind. Von klimatischen Unterschieden kann also dort nicht die Rede sein und es mufs anf dem Monde ein ewiger Frühling und Tag- und Nachtgleiche bestehen.

Wenn wir Neumond haben, hat die uns abgekehrte Mondhälfte Tag und zwar auf die gauze Zeitdauer des halben synodischen Monats von ½mal 29½ Tagen = 354 Stunden; in den daranf folgenden 354 Stunden hat diese Mondfläche Nacht und zur Erleuchtung nur das schwache Licht des gestirnten Himmels. Die nns zngekehrte Mondhälfte hat die Abwechselung von Tag uud Nacht in denselben Zeitlängen: bei Nacht, wenn der Mond nns Neumond ist, ist dort Nacht nnd nnsere Erde leuchtet ihm als von der Sonne erleuchteter Moud mit einer Scheibe, die den Mondbewohnern 14 mal gröfser erscheint als uns die Mondscheibe, während ihnen die Sonnenscheibe wie uns gleich grofs ist.

Ist die durch den Mondmittelpunkt C gezogene Linie PP die nach der Erde gerichtete Axe, die darauf normale qq der Aequator, mm die Durchschnittslinie der

Fig 825.

Kreisebene, in welchor der Mond um die Erde sich dreht, ee die Ekliptik, in welcher Erde und Mond um die Sonno läuft, so ist $\angle mCe = 5° 8¾'$, $\angle eCq = 1° 30'$ folglich der Wiukel mCq, der zwischen der Bahn und dem Aequator des Mondes $= 6° 38¾'$.

Der Mond ist eine Kugel ohne irgend eine Abplattung; nm seinen Durchmesser

[Anmerk. Ist Bd. III, pag. 252, Fig. 709, H' dor Mittelpunkt des Mondes, C der Mittelpunkt der Erde, O der im Horizont mit H' liegende Ort der Erdoberfläche, so ist $\angle OH'C$ die Horizontalparallaxe des Mondes, also zugleich der Winkel, uuter welchom der Halbmesser CO der Erdkngel von dem Monde aus gesehen wird.]

zu finden hat man seinen scheinbaren Durchmesser in seiner Erdnähe 1978 Secunden, seine Horizontalparallaxe zugleich 3629 Sec., mithin der scheinbare Durchmesser der Erdkugel von dem Monde aus gesehen $= 2 \times 3629$ Sec. $= 7258$ Sec.

Demnach hat man

$7258'' : 1978'' = 1719$ Meilen : x Meilen

woraus x der Durchmesser des Mondes 468,4 Meilen.

Der Umfang des Mondes 1470,5 Meilen.

Die Oberfläche des Mondes 68924 □Meilen.

Der körperliche Inhalt 53 800 000 Kubikmeilen.

Die Gröfsen zwischen Erde und Mond sind im Verhältnifs

Durchmesser $= 3\frac{2}{3} : 1$

Oberfläche $= 14 : 1$

Volumen $= 50 : 1$

Die Oberfläche des Mondes hat etwa die Gröfse von Amerika.

Die Masse des Mondes als aliquoter Theil von der unserer Erde wird verschieden angegeben: Laplace bestimmt dieselbe aus der beobachteten Ebbe und Flut auf $\frac{1}{75}$. Dagegen wird in Betrachtung des Schwankens der Erdaxe die jetzt allgemein gültige Zahl $\frac{1}{87}$ angenommen.

Aus Masse und Volumen erhält man die Dichtigkeit des Mondes $= \frac{1}{87} : \frac{1}{50} = \frac{50}{87}$ $= 0{,}58$ der Erddichtigkeit.

Hieraus erhält man die Schwerkraft des Mondes in dem Fallraum für die erste Secunde, der Beschleunigung g:

Die Beschleunigung der Erde ist 15 par. Fufs, mithin bei $\frac{1}{87}$ Masse die Beschleunigung des Mondes bei einerlei Durchmesser mit der Erde $= \frac{15}{87}$ par. Fufs. Beim Monde aber beträgt der Halbmesser nur $\frac{1}{3\frac{2}{3}}$ des der Erde, der Sitz dessen Schwerkraft von der Mondoberfläche ist also um so viel geringer und die Mondbeschleunigung beträgt $(3\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{15}{87} = 2{,}32$ pariser Fufs.

Die gröfste Entfernung des Mondes von der Erde ist 55000 Meilen, die kleinste ist 48000 Meilen, wonach die Excentricität $= 3500$ Meilen. Diese Längen sind, wie oben nachgewiesen, und besonders die Excentricität grofsen periodischen Veränderungen unterworfen; die Excentricität wird nach einem Mittelwerth 0,055 der halben grofsen Axe angenommen und beträgt also $\frac{55000 + 48000}{2} \cdot 0{,}055 = 2832{,}5$ Meilen, noch nicht ganz 3000 Meilen.

Aus demselben Grunde setzt man die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde 52000 Meilen = 60 Erdhalbmessern $= \frac{1}{390}$ der Entfernung der Erde von der Sonne.

Monde, die der Planeten, des Jupiter, des Saturn und des Uranus s. u. „Nebenplaneten".

Mondcyclus, s. u. „Cyclus".

Mondenjahr, ein Jahr des Alterthums. 1 bei Solon und 2 bei den Juden, s. u. Kalender pag. 1.

Mondfinsternifs entsteht, wenn der Mond in den Schatten geräth, den die von der Sonne beleuchtete Erde hinter sich wirft; der Mond hat dabei Sonnenfinsternifs.

1. Um zuerst diesen Erdschatten kennen zu lernen, seien nebenstehend die Sonne und die Erde mit ihren Mittelpunkten S und E, CDF der Schattenkegel. Dessen Höhe CE sei $= h$, der Abstand ES zwischen Erde und Sonne H, so hat man deren Halbmesser $= R$ und r gesetzt:

Fig. 826.

$$R : r = H + h : h$$

woraus $$h = \frac{r \cdot H}{R - r}$$

Es sei $r = 1$, so ist $R = 112$, $H = 24400$ also $h = \frac{1 \cdot 24400}{111} = 220$ Erdhalbmesser, bei cc. 860 Meilen $= 189{,}200$ geogr. Meilen.

Der Mond in der Linie GH hat von der Erde eine Entfernung von 50000 Meilen oder cc. 60 Erdhalbmesser mithin ist der in der Mondbahn liegende Durchmesser GH des Schattenkegels aus der Proportion: $DF : GH = CE : Cm$

$$GH = DF \cdot \frac{Cm}{CE} = 2 \cdot \frac{220-60}{220} = \frac{16}{11}$$

Erdhalbmesser $= \frac{8}{11}$ Erddurchmesser. Da nun der Mond einen Durchmesser $= \frac{1}{3\frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$ des Erddurchmessers hat, so haben beinahe drei Monde neben einander in dem Erdschatten Platz.

Läge die Mondbahn in der Ebene der Ekliptik, so müfste alle 14 Tage eine totale Finsternifs statt finden, einmal eine Mond- und die nächsten 14 Tage eine Sonnenfinsternifs, bei welcher der Mond von E unterhalb um die Länge Em sich befindet. So aber kann eine Finsternifs nur in den Knoten geschehen, in den Punkten nämlich, in welchen der Mond die Ekliptik bei seinem jedesmaligen Umlauf zweimal durchschneidet, und dann müssen Sonne, Erde und Knoten in einerlei geraden Linie liegen.

Die Knoten sind aber in der Ekliptik nicht constant, im Gegentheil sie rücken jährlich 19° zurück und der Sonne entgegen. Wenn also in einem Jahre bei einem Knoten eine Finsternifs entsteht, und sie entstände in dem folgenden Jahre wieder in demselben Knoten, so geschähe dies in einer diesem Rückgange entsprechenden Zeit von 10 bis 11 Tagen früher. Es gibt Jahre, in welchen gar keine Finsternisse vorkommen, weil die eben gedachten Gradlinigkeiten des Knotens mit Sonne und Mond nicht statt finden.

Bei den Mondfinsternissen wird zuerst der östliche Rand des Mondes beschattet und die Verdunkelung schreitet fort bis zum westlichen Rande; den Mondbewohnern ist sie eine Sonnenfinsternifs.

2. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung des Durchmessers eines jedesmaligen Schattenkegels innerhalb der Mondbahn, da diese in ihrem Abstande von der Erde zwischen 48 und 55 tausend Meilen variirt und folglich jenen Durchmesser mit variabel macht. Es sei S der Mittelpunkt der Sonne, AS ihr Halbmesser; E der Mittelpunkt der Erde, EB ihr Halbmesser, DF die Linie der Mondbahn und es soll die Breite DM des von dem Monde zu passirenden Schattenkegels gefunden werden.

Fig. 827.

Der $\angle DEF$ ist als Aufsenwinkel $= \angle EAD + \angle EDA$,

$\angle FEM$ in der Verlängerung von AC ist $= \angle AES$

mithin ist

$$\angle DEM = \angle EAD + \angle EDA - \angle ACS.$$

Ob nun A und D die Ränder oder die Mittelpunkte von der Sonne und dem in DM eintretenden Mond sind, jedenfalls ist $\angle EAB$ die Horizontalparallaxe der Sonne, $\angle EDA$ die des Mondes und $\angle AES$ ist der Winkel für den scheinbaren Halbmesser der Sonne. Die ersten beiden Winkel sind an jedem beliebigen Aufgang von Sonne und von Mond zu messen, desgleichen $\angle AES$, der bekanntlich im Mittel 8 Minuten beträgt.

Es ist mithin die verlangte halbe Schattenbreite für die Passage des Mondes die Summe der beiden Horizontal-Parallaxen der Sonne und des Mondes weniger dem halben scheinbaren Durchmesser der Sonne. Je weiter die Sonne von der Erde und je näher der Mond der Erde, desto gröfser wird die Schattenbreite.

3. Der Mond hat vermöge der Neigung seiner Bahn bald nördliche, bald südliche Breite, die wie schon bemerkt 5½° niemals übersteigt. Aus der Betrachtung des Schattenkegels geht hervor, dafs der Mond, auch wenn er unter oder über der Ekliptik steht, noch verfinstert werden kann; die Grenze, bei welcher eine partiale Verfinsterung noch eintreten kann ist eine Breite von 1° 4′.

Aufser der ad 2 gedachten nothwendigen Kenntnifs der Horizontalparallaxen und der scheinbaren Gröfsen ist für die specielle Berechnung einer Mondfinsternifs noch erforderlich, die wahre Zeit der wahren Opposition des Mondes, dessen Breite für diesen Augenblick, die stündliche Bewegung der Sonne in Länge so wie die des Mondes in Länge und Breite, wozu übrigens Hülfstafeln vorhanden sind. Mit diesen Berechnungen wird in jedem

Fall eine zu vermuthende Finsternifs ermittelt, ob die eben gedachten Grenzen innegehalten oder überschritten werden, ob also eine Finsternifs eintritt oder nicht.

Um diese und die ferneren Rechnungen zu erleichtern reducirt man die Bewegung zweier Gestirne auf die eines einzigen, indem man den einen Körper stehend annimmt und die Bewegung des zweiten gegen den ersten als eine relative Bewegung ermittelt. Es geschieht dies folgender Art:

Es seien P, P' zwei Gestirne, deren Bewegungen gegenseitigen Zusammenhang haben. P' hat die stündliche Bewegung $P'A'$ in Länge, $A'H'$ in Breite;

Fig. 828.

P die stündliche Bewegung PA in Länge, AH in Breite. Trägt man $\triangle P'A'H'$ an PA in $PA'H'$, zieht die Parallele $H'D$ mit PA, so ist $A'A$ der Unterschied beider Bewegungen in Länge, DH der beider Bewegungen in Breite. Macht man nun $Pa = A'A$, $ah = DH$, so ist unter der Voraussetzung, dafs das Gestirn P' stille steht und P allein sich bewegt, Pa die relative Bewegung des Gestirns P in Länge und ah die relative Bewegung desselben in Breite. $P'H'$ ist die wirkliche Bewegung des Gestirns P', PH die des Gestirns P und Ph die relative wirkliche Bewegung des Gestirns P.

Die relativen Seitenbewegungen Pa und ah sind mit den bekannten wahren Seitenbewegungen $P'A'$, $A'H'$ und PA, AH gegeben, dann ist es auch $\angle hPa = \varphi$; denn es ist $tg\,\varphi = \frac{ah}{aP}$. Nun ist $Ph = aP \sec \varphi$.

4. Das Nächste ist die Ermittelung des Zeitpunkts für die Mitte der Finsternifs.

Es sei C der Mittelpunkt des Schattenkegels in der Mondentfernung, CA der ad 1 mit Fig. 826 gefundenen Halbmesser desselben, DE die mit ihrer Neigung gegen die Ekliptik ermittelte Mondbahn, F der Ort des Mondes in der wahren

Fig. 829.

Oppositien, CF die Breite des Mondes in demselben Augenblick, CG das auf die Bahnlinie DE gefällte Loth, H und J seien die Mittelpunkte des Mondes bei der ersten und der letzten Randberührung, so ist $\triangle JCG \cong \triangle HCG$ und G ist die gesuchte Mitte. In dem $\triangle CFG$ ist $\angle FCG$ = dem Neigungswinkel der Bahn mit der Ekliptik, die Breite CF ist aus den Tafeln bekannt, und es ist $FG = CF \sin FCG$ = Mondbreite × Sinus des Neigungswinkels.

Dieser Bogen FG in Zeit verwandelt entsteht daraus, dafs die bekannte stündliche Zeit der Mondbewegung zu der Zeit für die Bewegung desselben durch FG sich verhält, wie eine Stunde (= 3600 Bogensecunden) zu der verlangten Zeit. Aufserdem ist der kürzeste Abstand CG der relativen Bahn DE vom Mittelpunkt C des Schattendurchschnitts $= CF \cos FCG$ gefunden worden.

Zur Auffindung der Zeit für die Dauer der Finsternifs hat man den Halbmesser CK des Schattendurchschnitts und den scheinbaren Halbmesser HK, also auch $CK + HK = CH$ bekannt, woraus $HG = JG$, und folglich HJ bekannt wird. Diese Länge verwandelt sich in Zeit durch die Proportien 1 Stunde zu der Dauer auf die Bewegung durch HG, d. h. zur Dauer der halben Finsternifs, wie die stündliche Bewegung auf der relativen Bahn zur Länge GH in Bogengraden. Diese Zeit von dem ermittelten Zeitpunkt für die in G stattfindende Mitte der Finsternifs abgezogen gibt den Zeitaugenblick, in welchem der Mond in H tritt und die Finsternifs beginnt, und zu demselben hinzuaddirt den Zeitaugenblick für den Stand des Mondes in J, wo die Finsternifs endet.

So wie mit dieser partialen so findet man auch bei jeder totalen Mondfinsternifs aufser den Zeitpunkten für den Eintritt und den Austritt der Ränder die Zeitpunkte für den Anfang und das Ende der totalen Verfinsterung der Mondscheibe.

Die längste Dauer einer Mondfinsternifs vom Eintritt des Vorderrandes bis zum Austritt des Hinterrandes beträgt 4 Stunden 38 Minuten und die längste Dauer der totalen Finsternifs vom Eintritt des Hinterrandes bis zum Austritt des Vorderrandes 2 Stunden 18 Minuten.

Mondphasen. Ist *S* die Sonne, *E* die Erde, *ee* die Ekliptik, *M* der Mond, *mm* seine Bahn, die gegen *ee* etwa 5° 8¾' geneigt ist, so ist die erste Figur der Stand der Erde im Winter-, die zweite der im Sommersolstitium; die vordere Ansicht des Systems s. Fig. 796, pag. 126. Die Bewegungen der Erde und des Mondes geschehen wie die Pfeile anzeigen, also nach einerlei Richtung. Hierbei hat der

Fig. 830.

Mond keine Axendrehung, er dreht sich vielmehr um die Erde wie an einer sich drehenden Radspeiche befestigt. Steht der Mond in *M*, so ist er mit der Sonne in Opposition, es ist Vollmond, steht er in *M'*, so ist er mit der Sonne in Conjunction, es ist Neumond.

Kommt der Mond bei Conjunctionen in die Ebene der Ekliptik (man denke sich *M*, *S* und *E* in einer geraden Linie) so entsteht Sonnenfinsternifs, kommt dies bei Oppositionen vor so ist Mondfinsternifs.

Da die Erde, Fig. I, im Wintersolstitium steht, so ist auf der nördlichen Halbkugel Sommer, Fig. II, Winter. Von dem Punkt *a* des Parallelkreises *ab*, Fig. II, ist der Bogen *an* bis zur Linie nach dem Vollmond viel kleiner als Fig. I, der gleichnamige Bogen *bn*, der Mond, Fig. II, im Winter steht also uns Bewohnern der nördlichen Halbkugel viel höher als im Sommer.

Der Mond hat für uns 4 Hauptlichtwechsel: den Neumond, das erste Viertel, den Vollmond und das letzte Viertel. Neumond und Vollmond führen den gemeinschaftlichen Namen Syzygien, das erste und letzte Viertel den Namen Quadraturen.

Der Neumond zeigt uns seine unbeleuchtete Seite; einige Tage später geht der Mond bald nach Sonnenuntergang am westlichen Himmel auf als schmale Sichel, die Hörner nach oben gerichtet und geht bald wieder unter. Mit jedem Tage geht er östlicher und früher auf, später unter, die Sichel wird gröfser und 7 Tage nach Neumond geht er als halbe Scheibe, die Krümmung (von der Abendsonne) westlich Abends 6 Uhr in Süden auf, zu Mitternacht unter; dies ist das erste Viertel. Von hier ab wird die Scheibe immer voller und 7 Tage später geht er als volle Scheibe, als Vollmond, in Osten auf, wenn die Sonne untergeht. Von hier ab erfolgt der Aufgang alle Tage eine Stunde später; nach etwa 7 Tagen als halbe Scheibe, die Krümmung (von der Morgensonne) östlich um Mitternacht, Untergang bei Tage (letztes Viertel).

Um diese Lichterscheinungen und die damit zusammenhangenden Begebnisse zu verstehen, ist zunächst folgendes zu beachten.

Wenn die Erde nach der Richtung des Pfeils um ihre Axe sich dreht, so ist an jedem Ort *A* auf der Oberfläche in den

Fig. 831.

Tangenten als Horizontalen Westen und Osten so gerichtet, wie *w* und *o* bezeichnen. Süd und Nord fallen für *A*, winkelrecht auf *ow* und auf der Papierebene in dem Punkt *A* zusammen.

Wenn *ES* die Richtung nach der Sonne hin ist, so ist wegen der grofsen Entfer-

ung derselben auf jedem Ort der Erde also auch in *o* und *w* die Richtung $oS' \parallel wS'' \parallel ES$. Den Bewohnern des Ortes *o* erscheint die Sonne *S* im Horizont, es ist Sonnenanfgang; je näher *o* nach *s* kommt, desto gröfser wird die Sonnenhöhe, in *s* ist Mittag, von *s* nach *w* hin gedreht senkt sich die Sonne, in *w* steht

Fig. 832.

sie im Horizont, es ist Abend und im nächsten Augenblick der Drehung von *w* weiter nach *n* geht *S* unter. In Folge dieser Erdbewegung scheint es uns, als wenn die Erde still stände und die Sonne von *o* dem Aufgangspunkt über *p* und *q* bis nach *w* dem Untergangspunkt, also von Osten nach Westen sich drehet.

Der Mond ist zwar nicht so weit entfernt als die Sonne, allein die Entfernung ist doch so grofs, dafs man auch bei diesem dieselbe Parallelität der Richtungen seines Erscheinens auf allen Punkten der Erdoberfläche wie bei der Sonne annehmen kann; desgleichen dafs bei jedem Standpunkt des Mondes die Sonne auf denselben parallel der Linie *ES* gerichtet ist.

Die Sonne geht also in *o* auf, in *w* unter, in den Nachtgleichen Morgens und Abends etwa um 6 Uhr. Genau um 6 Uhr früh würde sie aufgehen, wenn die Nachtgleiche ebenfalls genau um 6 Uhr früh einträte, und pünktlich 6 Uhr Abends würde sie untergehen, wenn die Nachtgleiche ebenfalls pünktlich 6 Uhr Abends einträte. Geht im Frühlingspunkt die Sonne genau 6 Uhr auf, so geht sie später als 6 Uhr Abends unter, weil die Sonne während des Tages bis Abend schon um eine kleine Länge in die nördliche Halbkugel fortgeschritten ist. Geht im Herbstpunkt die Sonne früh 6 Uhr pünktlich auf, so geht sie Abends vor 6 Uhr unter, weil sie während des Tages bis Abend schon um eine kleine Länge in die südliche Halbkugel getreten ist.

In der Sommerwende, wenn diese gerade zu Mittag eintritt, geht sie eben so viel vor 6 Uhr Morgens auf als nach 6 Uhr Abends unter, in der Winterwende eben so viel nach 6 Uhr Morgens auf als vor 6 Uhr Abends unter. Ein ähnliches gilt von dem Mond, je nachdem er mit der Erde die Ekliptik schneidet oder nördlich oder südlich derselben näher oder ferner fortschreitet. Hiernach soll von der Zeit, ob um 6 Uhr oder um wie viel vor oder nach 6 Uhr Auf- und Untergang von Sonne und Mond geschieht, abgesehen werden.

In den beifolgenden Figuren ist der gröfsere Kreis die Erde mit dem Mittelpunkt *E*. In der Richtung senkrecht aufwärts steht die Sonne *S*; *n*, *s*, *o*, *w* heifsen der Nord-, der Süd-, der Ost-, der Westpunkt. Die kleinen Kreise bedeuten den Mond, wie er in den Punkten der Erdoberfläche *o*, *s*, *w*, *a*, *b*, *f* der Richtung nach gesehen wird.

Der Neumond, Fig. 833, geht mit der Sonne in *o* auf, in *w* unter, er bleibt

Fig. 833.

wegen der Tageshelle und weil seine uns zugekehrte Hälfte von der Sonne unbeleuchtet ist, uns unsichtbar.

Ist der Mond in einigen Tagen in die Lage Fig. 834 gekommen, so geht er nicht mit der Sonne in *o*, sondern erst in *a* auf, wenn $\angle aEM = 90°$ ist, wo die Sonne schon den Tagesbogen *oa* beschrieben hat; und wenn er bei der Tageshelle an sehen wäre, so würde er als schmale Sichel mit der Rundung nach oben, oder wie man sagt, mit den Hörnern nach unten erscheinen. Denn da *aM'* der Horizont von *a* ist, so liegen die durch *dc* abgeschnittenen Hörner unten, die Krümmung *g*

oben, indem *gh* nach dem Zenith gerichtet ist.

Der Mond beschreibt nun weiter mit der Sonne den Tagebogen, und wenn die

Fig. 834.

Sonne in *w* untergeht, so erscheint er bei dem schwächer gewordenen Tageslicht und zwar auch schon nahe dem westlichen Horizont und geht in *b*, der geraden Verlängerung von *aE* bald darauf unter, nachdem nämlich die Sonne den kleinen Nachtbogen *wb* beschrieben hat, und zwar als dieselbe Sichel, aber mit oberwärts gerichteten Hörnern, die in dem Horizont *bM''* oder *dc* von *b* liegen, während die Krümmung *g* unterhalb befindlich ist, weil hier *gh* die Richtung nach unterwärts hat.

Die Stellung Fig. 835 des Mondes zeigt ein noch weiteres Fortschreiten desselben.

Fig. 835.

Der Ort *a*, wo der Mond am Horizont aufgeht, liegt schon nahe dem Mittag *s*; wegen der Tageshelle ist der Aufgang nicht sichtbar und erst gegen Abend, wenn der Ort *o* über *a* in den Punkt *f* getreten ist, und das Tageslicht nun schwächer geworden, kommt er mit blassem Schein in die Gegend des südlichen Himmels und in der Nähe seines gröfsten Höhenpunkts zum Anblick. *mn* ist die Richtung des Horizonts von *f*, *EM* die Richtung nach dem Zenith, mithin stehen die Hörner in *cd* ziemlich lothrecht und nach Osten, während die Rundung der nun schon viel breiteren Sichel nach Westen gerichtet ist.

In *b*, der geraden Verlängerung von *aE* gegen Mitternacht, wenn die Sonne bis dahin noch den kleinen Nachtbogen *bn* zu beschreiben hat, geht der Mond unter, und zwar wieder wie Fig. 834, die Sichelhörner nach oben und die Rundung nach unten gerichtet.

In der Stellung des Mondes Fig. 836, geht der Mond zu Mittage in *s* unsichtbar auf, Abend 6 Uhr bei schon dunklem Lichte, indem die Sonne eben untergeht, hat er in *w* seinen Culminationspunkt

Fig. 836.

und wird als Halbkreis sichtbar; die Krümmung der Scheibe ist westlich. In *n* zu Mitternacht geht er unter mit der Krümmung der Scheibe nach unten. Diese Lichterscheinung ist das erste Viertel.

In der Stellung Fig. 837, geht der Mond in *a*, also Nachmittag auf, wird gegen Abend am östlichen Himmel sichtbar. Zur vollen sichtbaren Scheibe fehlt nur noch das von der Linie *cd* unterhalb des Horizonts abgeschnittene dunkle Stück; in *f* gegen Mitternacht culminirt er und in *b*, eben so weit vom Sonnenaufgang *o* wie *a* vom Sonnenuntergang *w*, geht er, das fehlende Stück der Scheibe nach oben gerichtet unter.

Fig. 837.

In der Stellung Fig. 838 ist der zunehmende Mond zum Vollmond geworden Er geht in *w* bei Sonnenuntergang auf, in *n* zu Mitternacht culminirt er und in *o* bei Sonnenaufgang geht er unter. Von hier an wird der Mond abnehmender Mond.

Fig. 838.

In der Stellung Fig. 839, geht der Mond in *a* zwischen Sonnenuntergang und Mitternacht auf; zur vollen erleuchteten Scheibe fehlt nur das oberhalb von der Linie *cd* abgeschnittene dunkle Stück. In *f* zwischen Mitternacht und Morgen culminirt er, in *b* Vormittags geht er wegen der Helligkeit des Tages unsichtbar unter.

Fig. 839.

In der Stellung Fig. 840 des Mondes ist das letzte Viertel; der Mond geht Mitternacht in *n* auf als ein Halbkreis, dessen Krümmung unterhalb liegt, in *o* bei Sonnenaufgang steht der Halbmesser lothrecht, die Krümmung liegt nach Osten. Der Mond culminirt hier, verschwindet bei zunehmender Tageshelligkeit immer mehr und geht Mittag in *s* unter.

Fig. 840.

In der Stellung Fig. 841 endlich geht der Mond zwischen Mitternacht und Morgen in *a* auf als eine Sichel, deren Krümmung durch die Linie *cd* in den Hörnern abgeschnitten, unterhalb liegt. Gleich nach Sonnenaufgang in *o* wird er unsichtbar, er culminirt Vormittags und geht Nachmittags unsichtbar unter.

Fig. 841.

Mondzirkel, s. v. w. „Mondcyclus“ s. u. Cyclus.

Monodimetrisches Krystallisationssystem ist das zweite, das zwei und einaxige System, bei welchem drei Axen, von denen zwei gleichartig sind, die dritte mit den ersten beiden ungleichartig ist, unter rechten Winkeln sich schneiden.

Monoklinoedrisches, auch **Monoklinometrisches Krystallisationssystem** ist das fünfte System, das zwei und eingliedrige System, bei welchem eine Axe die beiden anderen ihr ungleichartigen Axen unter rechten Winkeln, diese beiden ebenfalls unter sich ungleichartigen Axen unter schiefen Winkeln sich schneiden.

Monom ist eine einfache, eingliedrige Gröfse im Gegensatz zu zwei- und mehrgliedrigen Gröfsen. a ist ein Monom, $a \pm b$ ein Binom, $a \pm b \mp c$ ein Trinom.

Monotrimetrisches Krystallisationssystem, das dritte System, das drei und einaxige System, bei welchem drei unter einander gleichartige Axen von einer vierten ihnen ungleichartigen Axe rechtwinklig geschnitten werden.

Morgen, Morgenpunkt, s. u. „Abend“.

Morgendämmerung, s. u. „astronomische Dämmerung“.

Morgenseite die durch die Meridianebene eines Orts der Erde abgetheilte Hälfte der Himmelskugel, in welcher der Morgenpunkt liegt. In deren Horizont gehen alle Gestirne auf, während sie in dem Horizont der Abendseite untergehen.

Morgenweite eines Gestirns ist der Bogen im Horizont als Abstand zwischen dem Aufgangspunkt des Gestirns und dem Morgenpunkt. Das Nähere s. in dem Art. „Abendweite“ mit Fig. 2, ferner „Aufgang und Untergang der Gestirne“ mit Fig. 109 und 110, pag. 176.

Multinom oder **Polinom** ist eine aus unbestimmt vielen Gliedern bestehende Gröfse.

Multiplicandus ist eine Gröfse, die vervielfacht, die mit einer Zahl multiplicirt werden soll.

Multiplicator ist eine abstracte Zahl, welche angibt wie oft eine Gröfse genommen, oder mit welcher eine Gröfse multiplicirt werden soll.

Multiplication ist die Rechnungsart oder das Verfahren beim Multipliciren. Multipliciren heifst: eine gegebene Gröfse eine Anzahl Male nehmen oder eine Gröfse finden, in welcher eine gegebene Gröfse eine gegebene Anzahl Male enthalten ist. Die Gröfse, welche mehrere Male genommen, welche vervielfältigt werden soll, heifst der Multiplicandus; die Zahl, welche angibt, wie oft die erstere genommen werden soll, der Multiplicator, beide heifsen Factoren, das Resultat der Rechnung Product.

Hat man nur mit unbenannten Zahlen zu thun, so ist die Multiplication die dritte einfache Rechnungsart, die dritte der vier Species. Die Grundlage derselben ist das Einmaleins, welches auswendig zu lernen ist.

Die Multiplication kann betrachtet werden als eine Addition mit lauter gleichen Summanden. Denn zu dem Product 4 mal 6 gelangt man auch, wenn man vier Zahlen, jede = 6 zusammenaddirt.

Man zählt also 4 horizontale Reihen, jede von 6 Punkten zusammen und erhält 4 mal 6 Punkte,

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

sind zusammen 24 Punkte. Wenn man die 6 vertikalen Reihen jede von 4 Punkten zusammenzählt, also 6 mal 4 Punkte nimmt, erhält man nicht mehr und nicht weniger Punkte als vorhanden sind, nämlich 24 Punkte; man kann also multiplicand und Multiplicator mit einander vertauschen.

Diese Uebereinstimmung der Multiplication mit der Addition ist kein Grund, die Multiplication von den Species auszuschliefsen. Denn offenbar ist das Multipliciren eine von dem Addiren durchaus verschiedene Rechnungsweise. Die

Trennung der Multiplication von den Species geschieht von einigen Rechnenmeistern deshalb, weil man zur Darstellung des Products bei mehrziffrigem Multiplicator die einzelnen Productenreihen addiren mufs, dafs also die Multiplication eine Species zu Hülfe nimmt, also nicht selbstständig, nicht einfach bleibt.

Die theilweise Multiplication aber ist in dem (dekadischen) Zahlensystem begründet. Z. B. 103 mal 75 heifst: die Zahl soll verfünfundsiebzigfacht werden. Da nun das Einmaleins als Hülfsmittel dem dekadischen System entsprechend für Einer genügt, eine weitere Ausdehnung desselben vielmehr die Vortheile des Systems nur abweist, so geschieht zuerst eine Verfünffachung, hierauf eine Versiebenfachung der Zahl 103 und letztere verzehnfacht, wird nun mit dem ersten Product addirt. Und auf diese Weise müssen alle Rechenexempel ausgeführt werden, wenn man der Vortheile des Einmaleins und des dekadischen Systems theilhaftig werden will. Die Rechenart ist folgende. Man schreibt:

	103
	75
Es ist 5 mal 103 = ...	515
70 mal 103 = ...	721
Addirt gibt 75 mal 103 = ...	7725

Die einzelnen Producte 515 und 7210, von der man der Bequemlichkeit wegen die Null fortläfst, heifsen Partial-Producte. Das Zeichen für die Multiplication ist ein Punkt oder ein liegendes Kreuz: die Forderung 75 mal 103 wird geschrieben $75 \cdot 103$ oder 75×103.

Die Multiplication der gemeinen Brüche mit ganzen Zahlen und mit gemeinen Brüchen s. u. „Bruch", Bd. I., pag. 436, mit Decimalbrüchen s. u. „Decimalbruch". Die abgekürzte M. ist in einem kurzen Art Bd. I, pag. 5 gezeigt.

Ist ein periodischer Decimalbruch mit einer ganzen oder mit einer geschlossenen Zahl zu multipliciren, so ist nur zu beobachten, dafs die Perioden jedes Partiaiproducts für die Ermittelung der richtigen Periode des verlangten Products in hinreichender Anzahl neben und unter einander geschrieben werden.

```
Beispiel 1.  7,9 × 0,578 578 ...
                   5 207 207 207
                  40 500 500 50
                  4,5 707 707 ...

          2. 2,574 × 243,43257 43257 ....
                  973 73029 73029 73029
                17040 28020 28020 2802
               121716 28716 28716 287
               486865 14865 14865 14
              626,595 44631 44631 .....
```

Die Multiplication eines periodischen Decimalbruchs mit einem periodischen Decimalbruch führt zu keinem erwünschten Resultat, denn gesetzt man habe die Zahl $0{,}4646\ldots = \frac{46}{99}$ mit $0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$ zu multipliciren, so hat man $\frac{46}{891}$ zu berechnen und es können 890 verschiedene Reste entstehen, die Periode kann also 890 Ziffern begreifen. Oder man rechnet $\frac{1}{9} \times 0{,}46\,46\ldots$, so hat man gleichfalls keine Aussicht auf eine kurze, oder vielmehr man hat die Aussicht auf dieselbe lange Periode.

Die Multiplication der Buchstabengröfsen, s. „Buchstabenrechnung", pag. 438. Die Multiplication mit imaginären Gröfsen s. d. Art. pag. 283.

Eine eigenthümliche Art von Multiplication, bei welcher beide Factoren benannte, gleichartige und ungleichartige Gröfsen sind und ein Product liefern, welches mit keinem der beiden Factoren gleichartig ist, ist die Multiplication geometrischer Gröfsen mit einander. Den Zusammenhang, dafs Linien mal Linien = Flächen, und dafs Linien mal Linien mal Linien oder Linien mal Flächen = Körper sind, siehe die Art. „Flächenmaafs" und „cubisches Maafs". Wie Linien mit Linien zu Flächen multiplicirt werden, s. den Art. „Algebraische Geometrie" Bd. I, pag. 45 mit Fig. 41, 42 und 43. Eben so geschieht die Multiplication zu Körpern, z. B.:

3′ 5″ × 7′ 4″ × 6′ 5″ ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen drei Kanten die Factoren zu Längen haben.

3′ 5″ × 7′ 4″ sind = dem zu beiden Factoren als Seiten gehörenden Rechteck $= 25\frac{1}{18}$ □′ = 25 □′ 8 □″.

Diese Seitenfläche mit dem dritten Fac-

tor 6′ 5″ als Höhe multiplicirt gibt das Parallelepiped $= 25 \square' \, 8 \square'' \times 6' \, 5'' = 6 \times 25 + \frac{8 \times 6 + 5 \times 25}{144} + \frac{5 \times 8}{1728} =$ 151 Kubikfufs 388 Kubikzoll.

Dasselbe Verfahren wird angewendet, wenn geometrische oder stereometrische numerische Ausrechnungen nach Formeln geschehen sollen, wovon das Wörterbuch sehr viele Beispiele liefert.

Noch ist der Multiplication mit trigonometrischen Functionen, wenn diese in Potenz oder in Wurzel gegeben sind, zu gedenken:

Es sei auszurechnen: $12 \times \sin^2(13^\circ \, 17')$

Man hat $\log \sin (13^\circ \, 17') = 9{,}361\,2870 - 10$

also $\log \sin^2 (13^\circ \, 17') = 18{,}722\,5740 - 20$

wofür man natürlich $8{,}722\,5740 - 10$ nimmt.

Ist $\sqrt[3]{\cos (12^\circ \, 50')}$ ein Factor, so hat man

$$\log \cos (12^\circ \, 50') = 9{,}9890137 - 10$$

also $\log \sqrt[3]{\cos (12^\circ \, 50'} = \frac{1}{3}(9{,}9890137 - 10) = \frac{1}{3} x (29{,}9890137 - 30) = 9{,}9963379 - 10$

N.

Nacht ist im gewöhnlichen Sprachgebranch, wenn die Sonne nnter dem Horizont sich befindet, und in der Regel schliefst man noch die Dämmerung von derselben ans. Wissenschaftlich heifst Nacht der Zeitranm, welcher begriffen ist zwischen den beiden Angenblicken, in welchen der Mittelpunkt der Sonne zwischen Untergang und Aufgang derselben den Horizont berührt. Es wird also nicht nur die Dämmerung ausgeschlossen sondern auch noch die wirkliche Tageszeit, in welcher die Sonne von ihrem Mittelpunkt bis znm Rande und vermöge der Ablenkung ihrer Strahlen durch die Luftschichten noch länger die Erde bescheint.

Bezeichnet man mit D die Ascensional-Differenz (s. „Ascension" mit Fig. 82) der Sonne für einen Ort der Erdoberfläche, mit A die nördliche oder südliche Abweichnng der Sonne (Höhe derselben über dem Aeqnator) und mit H die Aeqnatorhöhe des Orts, so hat man

$$\sin D = \frac{tg\, A}{tg\, H}$$

Oder wenn man D durch die Polhöhe P des Orts ansdrücken will, weil diese mit seiner geographischen Breite über einstimmt,

$$\sin D = tg\, A \cdot tg\, P$$

Nun ist der halbe Tag des Orts in Bogenmaafs, d. h. die Bogenlänge von dem Aufgange des Sonnenmittels bis zu seiner Culmination zu Mittage

$$= 90^\circ \pm D \text{ Bogenmaafs,}$$

also in Zeitmaafs $= \frac{90^\circ \pm D}{360^\circ} \times 24$ Stunden,

wo $+D$ für gleichnamige, $-D$ für ungleichnamige A mit dem Ort genommen wird; also für uns Bewohner der nördlichen Halbkugel $+D$, wenn die Sonne nördliche, $-D$ wenn sie südliche Abweichung hat.

Der ganze Tag hat also
in Bogenmaafs $2\,(90^\circ \pm D)$

und in Zeitmaafse $\frac{90^\circ \pm D}{180^\circ} \times 24$ Stunden.

Da für jeden Ort der Erde Tag und Nacht zu 24 Stunden und 360° sich ergänzen, so hat man die Nachtdauer

in Bogenmaafs $= 2\,(90^\circ \mp D)$

in Zeitmaafs $= \frac{90^\circ \mp D}{180^\circ} \times 24$ Stunden.

Oder bei Einführung der Werthe A, H, P

$$\text{die Nachtdauer in Bogenmaafs} = 2\left[90^\circ \mp Arc \cdot \sin\left(\frac{tg\, A}{tg\, H}\right)\right] = 2\,[90^\circ \mp Arc\sin(tg\, A \cdot tg\, P)]$$

$$\text{in Zeitmaafs} = \frac{90^\circ \mp Arc\sin\left(\frac{tg\, A}{tg\, H}\right)}{180^\circ} \times 24 \text{ Stunden.}$$

$$= \frac{90^\circ \mp Arc \cdot \sin\,(tg\, A \cdot tg\, P)}{180^\circ} \times 24 \text{ Stunden.}$$

Aus diesen Formeln geht nun folgendes hervor:

A. Die Bewohner des Aequators haben das ganze Jahr hindurch 12 Stunden (Tag

und) Nacht, weil $H = 90^\circ$ oder $P = 0$, folglich $tg\ H = \infty$ oder $tg\ P = 0$, folglich der Sinus $0 = 0$ ist.

B. Dasselbe findet für sämmtliche Erdbewohner an den Nachtgleichentagen statt, wo die Sonne in dem Aequator steht.

Anmerk. Für die Pole erhält man $sin (0 \times \infty) = sin \frac{0}{0}$, den Sinus also unbestimmt; allein Tag + Nacht sind = 24 Stunden, beide addirt geben $\frac{180^\circ \mp sin(?)}{180^\circ} \times 24$ Stunden $= \frac{180^\circ}{180^\circ}$ 24 Stunden = 24 Stunden, folglich Tag = Nacht = 12 Stunden.

C. Die kürzesten Nächte haben die Erdbewohner für den Stand der Sonne in den gleichnamigen, die längsten für die Sonne in den ungleichnamigen Wendepunkten, weil dort A sein Maximum $23\frac{1}{2}^\circ$ erreicht

Für die Polarkreise ist ebenfalls $H = 23\frac{1}{2}^\circ$, also $arc \cdot sin\ 1 = 90^\circ$. Mithin die kürzeste Nacht $= \frac{90^\circ - 90^\circ}{180^\circ} 24 = 0$, die längste Nacht $= \frac{2 \cdot 90^\circ}{180^\circ} \times 24 = 24$ Stunden. Im ersten Falle streift die Sonne zu Mitternacht den Horizont ohne unterzugehen, im zweiten Fall streift sie ihn ohne aufzugehen.

Für die Pole wird der Sinus ∞, also *arc sinus* unmöglich.

In dem Art. „Ascensionaldifferenz“ ist berechnet worden für Berlin der längste Tag = der längsten Nacht = 16 Stund. 36 Min. 22,4 Sec. der kürzeste Tag = der kürzesten Nacht = 7 Stund. 23 Min. 37,6 Sec.

Nachtbogen eines Gestirns ist der Bogen, den das Gestirn vom Untergang bis zum Anfange am Himmel beschreibt. Dessen geometrische Construction für die Bewohner des Aequators, s. Bd. I, pag. 175, mit Fig. 108, für die übrigen Erdbewohner mit Fig. 109.

Nachtdämmerung ist die Dämmerung, die sich bis Mitternacht erstreckt, so dafs der Ort keine eigentliche Nacht hat. Ein Stand der Sonne 18° unter dem Horizont eines Orts ist die Dämmerungsgrenze; mit diesem Stande beginnt die Morgendämmerung und endet die Abenddämmerung. Die Orte der Erde in demjenigen Parallelkreise, für welchen während der kürzesten Nacht die Sonnentiefe 18° beträgt, bilden die Grenzorte für permanente Nachtdämmerung. Von diesem Parallelkreise nach dem Pole zu werden die Sonnentiefen immer geringer und mit ihnen die Zahl der um die kürzesten Nächte liegenden permanenten Nachtdämmerungen immer gröfser.

In dem Art. „Astronomische Dämmerung“, pag. 139, ist nachgewiesen, dafs die Mittagshöhe (Sh) der Sonne gleich ist der Aequatorhöhe (Qh) des Orts ± der Abweichung (A) der Sonne oder gleich dem Complement der geographischen Breite (gB) des Orts ± A:

Dafs die Mitternachtstiefe (Sf) + der Mittagshöhe (Sh) der Sonne gleich ist der doppelten Aequatorhöhe (Qh) = dem doppelten Complement der gB des Orts.

Dafs folglich die Mitternachtstiefe (Sf) der Sonne gleich ist der doppelten Qh weniger der Sh, folglich gleich der Qh ∓ der Abweichung der Sonne.

Also

$$Sh = Qh \pm A = 90^\circ - gB \pm A \quad (1)$$

$$Sf + Sh = 2Qh = 180^\circ - 2gB \quad (2)$$

$$Sf = 2Qh - Sh = Qh \mp A = 90^\circ - (gB \pm A) \quad (3)$$

und $$gB = 90^\circ - (Sf \pm A) \quad (4)$$

In dem vorliegenden Fall, wo die Sonne in dem nördlichen Wendekreise steht und wo Sf für die Nachtdämmerungsgrenze 18° beträgt hat man nach Formel 4

$$gB = 90^\circ - (18^\circ + 23\tfrac{1}{2}^\circ) = 48\tfrac{1}{2}^\circ$$

Es hat also kein Ort der nördlichen Halbkugel vom Aequator bis zu $48\frac{1}{2}^\circ$ geogr. Breite Nachtdämmerung.

Steht die Sonne in dem südlichen Wendekreise, so ist die geringste Mitternachtstiefe der Sonne die negative Sonnenhöhe $= -18^\circ$ für die Dämmerungsgrenze und man hat nach Formel 1

$$-18^\circ = 90^\circ - gB - 23\tfrac{1}{2}^\circ$$

woraus $gB = 84\frac{1}{2}^\circ$, also $5\frac{1}{2}^\circ$ vom Nordpol entfernt, von wo aus nach dem Pol hin während des Winters kein Ort eine Nachtdämmerung erhält. Um zu erfahren, unter welcher südlichen Abweichung die erste Dämmerung am Pol eintritt, hat man die geringste Mitternachtstiefe = 18°, wenn die Mittagshöhe der Sonne − 18° beträgt, also bei $A = -18^\circ$, d. h. wenn die Sonne eine südliche Breite von 18° besitzt, wie auch Formel 1:

$$-18^\circ = 90^\circ - 90^\circ - A \text{ ergibt.}$$

Während des Steigens der Sonne von diesem Stande aus verbreitet sich die Nachtdämmerungsgrenze nur langsam vom Pole ab nach den Polarkreisen hin, denn erst beim Stande von $12\frac{1}{2}^\circ$ südlicher Breite trifft die Grenze auf jenen Punkt von $5\frac{1}{2}^\circ$ vom Pol ab gerechnet; die Mitternachtstiefe am Pol beträgt nur $-5\frac{1}{2}^\circ$.

Steht die Sonne im Aeqnator, so ist die Grenze der Nachtdämmerung nnter 72° Breite, also 18° unter den Polen, die Pole haben die Sonnentiefe = 0, die Polarkreise dieselbe = 23½° nnd erst bei 5½° nördlicher Breite der Sonne bilden die Polarkreise die Grenze der Nachtdämmerung.

Nachtfernrohr ist ein Fernrohr, nm bei Nacht dunkle Gegenstände zu beobachten oder aufzusuchen. Ersteres geschieht besonders von dem Schiffer, letzteres von dem Astronom, der es deshalb auch Kometensucher nennt. Es liegt bei diesem Instrument mehr an Helligkeit und grofsem Gesichtsfeld als an Vergröfserung und man erreicht dies durch ein flacheres nnd weiteres Objectiv nnd begnügt sich mit einer 10maligen Vergröfsernng bei einfachem Ocular. Die Frauenhoferschen Kometensucher haben bei 34 Linien Objectiv-Oeffnung, 24 Zoll Brennweite nnd bei 10maliger Vergröfsernng ein Gesichtsfeld von 6 Grad Durchmesser.

Nachtgleichen sollten heifsen Tag- und Nachtgleichen. Diese finden auf der Erde jährlich zwei mal statt in den Angenblicken, wo die Sonne in der Erdaequatorebene, also normal der Erdaxe anf deren Mitte gerichtet sich befindet und wo sie die Erdoberfläche von Pol zu Pol beleuchtet. Die Zeitpunkte dieser Stellungen fallen auf den 21ten März nnd den 23ten September, den Anfangspunkten des Frühlings und des Herbstes, woher auch der erste Punkt der Frühlingspunkt, der zweite der Herbstpunkt genannt wird.

Bei der Bewegung der Erde in der Ekliptik bleibt ihr Aeqnator nnter einem Neigungswinkel von 23½° mit derselben parallel mit sich selbst. Denkt man sich diesem Aequator parallel durch die Sonne eine Ebene gelegt (den Weltaequator), so schneidet diese die Ekliptik in zweien diametral gegenüberliegenden Punkten, und diese Durchschnittspunkte sind die oben gedachten Nachtgleichenpunkte, der Frühlingspunkt und der Herbstpunkt (vergl. „Aeqnator der Erde“ mit Fig. 34 nnd „Frühlingspunkt“).

Die Nachtgleichenpnnkte bleiben nicht constant, sie rücken jährlich um 50,2 Bogensecunden von Ost nach West, also der Bewegung der Erde entgegengesetzt, indem die der Erdaxe parallele Weltaxe nm die Axe der Ekliptik in dieser entgegengesetzten Richtung im Kreise sich herumdreht ohne ihre Neigung gegen dieselbe zu ändern und jene Durchschnittspunkte mit nimmt. Man nennt diese Verrückung der Nachtgleichenpunkte das Vorrücken der Nachtgleichen, während es eigentlich ein Zurückrücken ist. Dagegen steht die Sonne still und die Bewegung der Punkte veranlafst, dafs die Erde früher mit ihr in denselben zur Herstellnng der Nachtgleichen zusammentrifft und so hat man die gewählte Bezeichnung geeigneter gefunden.

In Folge dieser Verrückung der Nachtgleichen geschieht es nun, dafs alle Sterne jährlich nm 50,2 Sec. an Länge und gerader Aufsteigung znnehmen ohne ihre Breite nnd Abweichung zu ändern. In 71,87 Jahren beträgt dies 1 Grad und in 25873 Jahren 360 Grade, so dafs nach dieser Zeit, welche das grofse platonische Jahr genannt wird, alle Sterne dieselbe Länge wieder erhalten, welche sie in dem vergangenen hatten.

Der Grund der fortdauernden Bewegung der Nachtgleichen liegt besonders in der Abplattung der Erde, vermöge welcher Sonne und Mond, wenn sie in der Aequatorebene der Erde sich nicht befinden eine nngleiche Anziehung auf deren beide Halbkugeln ausüben, sowie in noch mehreren anderen störenden Ursachen.

Die Nachtgleichenpunkte zeichnen sich durch keine bestimmten Merkmale am Himmel ans nnd können es auch ihrer Veränderlichkeit wegen nicht. Es ist aber deren Lage genau zu wissen nothwendig, denn der Frühlingspunkt ist allen nur möglichen astronomischen Bestimmungen der Anfangspunkt. Die Ermittelung dieser Nachtgleichenpunkte geschieht nun dadurch, dafs man zu bestimmten Zeitangenblicken vor nnd nach dem Eintreten eines derselben, z. B. des Frühlingspunktes, die Abweichungen der Sonne nnd die vergleichenden geraden Aufsteigungen derselben mit denen eines oder mehrerer Fixsterne durch genaue Beobachtungen feststellt.

Tritt der Frühlingspunkt ein, sehen wir von mehreren einander sich berichtigenden Beobachtungen ab und nehmen der nachfolgenden Erklärung wegen nur zwei Beobachtnngen an, so ist die erste Abweichung der Sonne südlich, die zweite nördlich. Direct sind diese Abweichungen nicht zu finden; allein man mifst zwei Mittagshöhen der Sonne nnd findet sie aus diesen mit Hülfe der bekannten Aeqnatorhöhe des Beobachtungsortes.

Es bedeute der Kreis den Erddurchschnitt mit dem Mittelpunkt C; QQ den Aeqnator, O den Beobachtungsort, OH sein Horizont, Oq die mit dem Aequator

Parallele; S, S die Richtungen der Sonne an zwei Mittagen, S vor, S' nach dem Eintritt des Frühlingspunkts, so sind die

Fig. 842.

Bogen SH, $S'H$ die beobachteten Mittagshöhen, Sq und $S'q$ die verlangten Abweichungen der Sonne und Bogen qH ist die Aequatorhöhe von Q.

Man sieht, es ist

$$Sq = qH - SH = -(SH - qH)$$

und $S'q = S'H - qH$

Also, wie schon in dem Art. „Abweichung“ kurz angegeben, die Abweichung der Sonne $= \pm$ der Mittagshöhe weniger der Aequatorhöhe des Orts.

Nun sei wieder qq der Aequator. Es sind ermittelt $SD = h$ die südliche, $S'B = h'$ die nördliche Abweichung der Sonne. Ist s ein Fixstern (man nimmt möglichst schnell an gegenseitiger Berichtigung mehrere), so hat man wie bei der Sonne dessen Abweichungskreis sA bestimmt, und

Fig. 843.

man konnte vor eintretenden Mittagshöhen visiren die Punkte B, D, A der geraden Aufsteigungen dieser Gestirne. Es ergaben sich dadurch die Aufsteigungsunterschiede $AB = d$, $BD = d'$. Setzt man nun die Höhen h, h' auf die Punkte B, D normal mit dem Aequator, zieht die gerade Linie $S'S$, so liegt in dem Durchschnittspunkt F derselben mit qq der Frühlingspunkt F, und zwar sehr nahe, weil man die Bewegung der Erde in der Ekliptik zwischen der kurzen Zeit der Beobachtungen als gleichförmig ansehen kann.

Man hat demnach in den ähnlichen Dreiecken FBS' und FDS, wenn man $AF = x$ setzt:

$$S'B : SD = BF : DF$$

also $h' : h = x - d : d + d' - x$

woraus $x = d + \frac{h' d'}{h + h'}$

Der Frühlingspunkt ist also festgestellt durch die Rectascension eines Fixsterns, dessen Standpunkt am Himmel constant ist, und man hat nun die Mittel, ihn auch mit Hülfe anderer Fixsterne immer von Neuem aufzufinden.

Desgleichen ist der Zeitaugenblick des Eintritts der Nachtgleiche hieraus zu bestimmen. Denn ist t der Zeitpunkt der beobachteten ersten, t' der der beobachteten zweiten Mittagshöhe, also deren Zeitdifferenz $= t' - t$, so erhält man den Zeitpunkt T des Eintritts der Nachtgleiche aus der Proportion

$$t' - T : T - t = BF : DF = h' : h$$

woraus $T = \frac{ht' + h't}{h + h'}$

und wenn man $t = 0$ setzt, die Zeit T von der ersten Mittagshöhe DS bis zu dem Eintritt der Nachtgleiche F

$$T = \frac{ht'}{h + h'}$$

Es sei $BS' = h' = 11$ Minuten, $DS = h = 5$ Minuten Bogenmaafs, $t' - t = t' = 24$ Stunden, so ist

$T = \frac{5}{16} \times 24$ Stunden $= 7\frac{1}{2}$ Stunden nach der Beobachtung der ersten Mittagshöhe DS.

Nachtgleichenpunkte, s. u. „Nachtgleichen“.

Nachtlänge, s. u. „Nacht“.

Nadir, Fufspunkt ist der dem Zenith entgegengesetzt liegende Punkt der Himmelskugel, der zweite Pol des Horizonts eines Orts der Erde. Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so würde jedes Nadir das Zenith der Antipoden sein.

Näherung. Einer Näherung bedürfen Gröfsen, deren Werth nicht genau anzugeben ist; der durch Näherung gefundene Werth heifst der Näherungswerth, das Verfahren für die Auffindung des Näherungswerthes heifst Näherungsweise.

Brüchen, deren Zähler und Nenner grofse Primzahlen unter sich sind, nähert man sich mit Hülfe der Kettenbrüche (s. d.), man erhält Näherungsbrüche.

Den nicht ausgehenden Zahlengröfsen, den Irrationalzahlen nähert man sich auf verschiedene Weise: Wurzeln durch successive Wurzelausziehung auf eine beliebige Anzahl von Decimalen. Die Verhältnifszahl π ist in mehreren verschiedenen Reihen angegeben, die alle mehr oder weniger convergiren. Für transcendente Gröfsen, als Logarithmen, goniometrische und cyclometrische Functionen hat man desgleichen convergirende Reihen entwickelt.

Die Differenzialrechnung verfährt annähernd durch angenommenes Wachsen und Abnehmen veränderlicher Gröfsen, integrirt wird häufig durch Reihenentwickelung.

Die Exhaustionsmethode ist ein Annäherungsverfahren, um den wirklich richtigen Werth einer geometrischen Gröfse zu ermitteln, indem sie zwei Gröfsen einführt, von denen die eine bei beliebiger Vergröfserung immer kleiner, die andere bei beliebiger Verkleinerung immer gröfser bleibt als die aufzufindende Gröfse, die aber einer dritten constanten Gröfse beliebig nahe kommen können, deren Gröfse sie einschliefsen und die deshalb der gesuchten Gröfse gleich sein mufs.

Die Rectification von Curven, die Quadratur, die Cubatur liefern in der Regel nur Näherungs-Resultate.

Näherungsbruch, Näherungsweise, Näherungswerth, s. n. „Näherung".

Name eines Verhältnisses ist die Differenz der beiden Glieder eines arithmetischen Verhältnisses.

Nebenaxe (Kryst.) s. n. „Axensystem der Krystalle", No. 2, pag. 260.

Nebenlast (Mech.) ist die Last, deren Gewältigung nicht Absicht und Zweck ist, welche aufser der zur Ueberwindung gegebenen Nutzlast durch die Zusammensetzung der in einander greifenden Maschinentheile sich erzeugt. Zu dieser gehören:

A. Das Anlassen einer Maschine, d. h. die Versetzung derselben aus der Ruhe in Bewegung, welches langsam beginnen und mit allmählicher Steigerung der Geschwindigkeit bis zum normalen Gange geschehen mufs; als der Nachtheil, dafs mit dem nöthigen Kraftaufwand keine oder eine nur unbedeutende Nutzlast gewältigt wird.

B. Das Ablassen der Maschine, d. h. die Versetzung der Maschine aufser Betrieb mit derselben Wirkung in entgegengesetzter Richtung, wobei desgleichen Kraft auf Nutzlast nicht verwendet wird.

C. Die Reibungen der an einander gleitenden und in einander sich drehenden Maschinentheile.

D. Der Widerstand der Beharrung der in Bewegung befindlichen Massen (s. „Moment der Trägheit").

E. Die durch Stöfse dem gesammten Maschinenwerk mitgetheilten Erschütterungen, durch welche dieselben in ihren geradlinigen und kreisförmigen Bewegungsrichtungen durch schnell auf einander erfolgende Querbewegungen gestört werden, auch durch Elasticität der Massen entgegengesetzte Richtungen, also Rückwirkungen erfahren. Besonders geschieht dies bei Stampf- und Hammerwerken.

F. Klemmungen nicht genau genug bearbeiteter zusammengreifender Radzähne.

G. Die regelmäfsig periodisch eintretenden Richtungswechsel (die sogenannten todten Punkte). Z. B. Bei Dampfmaschinen mit Balancier die regelmäfsig abwechselnden Auf- und Niedergänge. Der Nachtheil dieser Einrichtung ist zusammengesetzt: der Balancierarm beim Aufwärtsgange hat das Bestreben weiter zu gehen, es gehört ein Kraftaufwand dazu, ihn zum Stehen zu bringen. Um nun niederzugehen mufs er aus der Ruhe in Bewegung gebracht werden, wozu wieder ein Kraftaufwand gehört. Beide Kraftäufserungen haben auf die Nutzlast eine nur geringe Wirkung. Man begegnet diesem sehr nachtheiligen Hindernifs durch Einführung einer neuen Nebenlast, nämlich einer permanent wirkenden Schwungmasse, eines Schwungrades.

Nebenmonde, Monde von Monden werden als vorhanden behauptet und bestritten.

Nebenplaneten, Monde. Es gibt nur vier Planeten unseres Sonnensystems, welche Monde haben: die Erde mit einem Mond, der Jupiter mit vier Monden, der Saturn mit sieben und der Uranus mit sechs Monden.

Sämmtliche Monde haben, genauen Beobachtungen zufolge die Eigenschaft unseres Mondes, dafs sie ihrem Hauptplaneten immer nur eine Seite zukehren. Auch ihre Bahnen stimmen mit denen ihrer Hauptplaneten ziemlich genau überein.

1. Die Monde des Jupiter.

Diese Monde sind sogleich nach Erfindung der Fernröhre entdeckt worden, und

zwar von Simon Mayer zu Anspach am 12ten Januar 1609 und von Galilei am 7ten Januar 1610. Erst in neuerer Zeit ist man mit den Monden genauer bekannt geworden und namentlich haben die Beobachtungen deren Verfinsterungen über Bahnen und Umlaufszeiten nähere Kenntnifs gebracht. Die Bahnen der ersten beiden sind wenig elliptisch, die beiden äufseren sind es mehr. Sämmtliche 4 Monde sind merklichen Störungen unterworfen und zwar in Folge der gegenseitigen Einwirkungen auf einander. Deren Bahnen liegen fast alle in der Ebene der Bahn des Jupitor. Die Neigung des ersten wird angegeben 3° 18′ 38″, die des vierten 2° 36′, beide bleiben constant. Die Bahnen des zweiten und dritten sind veränderlich. Der zweite änderte die Neigung gegen den Jupiter-Aequator innerhalb dreifsig Jahren von 2° 46′ bis zu 3° 46′, der dritte in einem Zeitraum von 132 Jahren von 3° 2′ bis zu 3° 26′.

Die Umlaufszeiten der Monde und deren tägliche Bewegung in Bogenmaafs sind

	Periodische Umlaufszeit.	Tägliche Bewegung.
des 1ten Monds	1 Tg. 18 St. 27 Min. 33 Sec.	203° 29′ 20,4″
„ 2 „ „	3 „ 13 „ 13 „ 42 „	101° 22′ 29,1″
„ 3 „ „	7 „ 3 „ 42 „ 33 „	50° 19′ 3,5″
„ 4 „ „	16 „ 16 „ 32 „ 8 „	21° 34′ 16,0″

Abstände der Monde vom Jupiter. Die ersten Zahlen sind die scheinbaren Abstände in Halbmessern des Jupiter nach Delambre, die letzten sind die wahren Abstände in geographischen Meilen, wenn Jupiters Aequatoreal-Durchmesser = 20100 Meilen beträgt.

Der 1te Mond	5,6985 Halbmesser	57300 geogr. Ml.
„ 2 „ „	9,0665 „	91100 „ „
„ 3 „ „	14,4619 „	145300 „ „
„ 4 „ „	25,4359 „	255600 „ „

Wahre Gröfse der Monde

	nach Schröter	nach Struve
Des 1ten Monds	564 geogr. Ml.	532 geogr. Ml.
„ 2 „	„ 465 „	„ 477 „ „
„ 3 „	„ 818 „	„ 780 „ „
„ 4 „	„ 570 „	„ 667 „ „

2. Die Monde des Saturn.

Diese Monde sind mit sehr langen Fernröhren entdeckt worden. Huyghens entdeckte am 25ten März 1655 den sechsten Mond, Cassini am 25ten October 1671 den siebenten Mond, derselbe am 13ten December 1672 den fünften Mond, im März 1684 den dritten und den vierten Mond, Herschel mit einem 40füfsigen Telescop den 28ten August 1789 den zweiten und derselbe endlich am 17ten September 1789 den ersten Mond.

Die Ebenen der sechs inneren Mondbahnen sind von dem Ring des Saturns wenig abweichend, der siebente dagegen hat eine Neigung von 12 Grad gegen denselben.

Die Umlaufszeiten der Monde und deren tägliche Bewegung in Bogenmaafs sind

	Periodische Umlaufszeiten.	Tägliche Bewegung.
der 1te Mond	0 Tg. 22 St. 37 Min. 33 Sec.	381° 51′ 53″
„ 2 „ „	1 „ 5 „ 53 „ 9 „	262° 43′ 38″
„ 3 „ „	1 „ 21 „ 18 „ 26 „	190° 41′ 52″
„ 4 „ „	2 „ 17 „ 44 „ 51 „	131° 24′ 42″
„ 5 „ „	4 „ 12 „ 25 „ 11 „	79° 41′ 25″
„ 6 „ „	15 „ 22 „ 41 „ 25 „	22° 34′ 37″
„ 7 „ „	79 „ 7 „ 53 „ 43 „	4° 32′ 17″

Abstände der Monde vom Saturn. Die ersten Zahlen sind die scheinbaren Abstände in Winkeln für die mittlere Entfernung; für die zweiten Zahlen ist der Halbmesser des Ringes 38500 geogr. Ml.; für die dritten Zahlen ist der Aequatoreal-Durchmesser des Saturns 17290 geogr. Ml. angenommen.

Scheinbare Abstände.	Wahre Abstände	
	in Ringhalbmessern	in geogr. Meilen
Des 1ten Monde 28,67 Sec.	1,42	27400
„ 2 „ „ 36,79 „	1,83	35200
„ 3 „ „ 43,05 „	2,16	41600
„ 4 „ „ 56,00 „	2,78	53600
„ 5 „ „ 78,00 „	3,88	74700
„ 6 „ „ 180,00 „	8,95	172300
„ 7 „ „ 522,05 „	25,98	499800

3. Die Monde des Uranus. Herschel entdeckte am 11ten Januar 1787 die beiden gröfsten Monde desselben, den zweiten und den vierten; später die übrigen vier Monde, den ersten am 18ten Januar 1790, den dritten am 26ten März 1794, den fünften am 9ten Februar 1790, den sechsten am 28ten Februar 1794. Die Bahnen sind beinahe senkrecht auf der Uranusbahn um die Sonne, gegen welche dessen Aequator ebenfalls senkrecht steht.

Synodische Umlaufszeiten.	Entfernungen	
	in Halbmessern des Uranus	in geogr. Ml.
Des 1ten Mondes 5 Tg. 21 St. 25 Min. — Sec.	13,0	48900
„ 2 „ „ 8 „ 16 „ 56 „ 5 „	16,5	62000
„ 3 „ „ 10 „ 23 „ 4 „ — „	19,2	72200
„ 4 „ „ 13 „ 11 „ 8 „ 59 „	22,0	82700
„ 5 „ „ 38 „ 1 „ 49 „ — „	44,2	166200
„ 6 „ „ 107 „ 16 „ 40 „ — „	86,5	325200

Nebenwinkel sind Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und deren beide andere Schenkel in einer geraden Linie liegen.

Bd. II, pag. 53, Fig. 337 sind $\angle ACD$ und $\angle BCD$ Nebenwinkel, denn CD ist ihr gemeinschaftlicher Schenkel und deren beide andere Schenkel AC, BC liegen in einer geraden Linie AB.

Nebenwohner (Periöci) sind die Bewohner, die unter einerlei Breite auf entgegengesetzten Seiten des Meridians wohnen. Sie haben dieselben Jahreszeiten aber entgegengesetzte Tageszeiten.

Negativ, s. u. „Affirmativ".

Negative Gröfsen, s. u. „Entgegengesetzte Gröfsen", Bd. III, pag. 53.

Neigung ist ein geometrischer Begriff und bedeutet alles was nicht rechtwinklig, was nicht normal auf einander ist. Ein Winkel wird erklärt als die Neigung zweier geraden Linien, wenn man vom sphärischen Winkel absieht; da nun ein rechter Winkel ebenfalls ein Winkel ist, so kann man denselben auch erklären als einen Winkel, dessen Schenkel auf einander normal stehen.

Wird eine gerade Linie in einem beliebigen Punkt von einer anderen mit deren Endpunkt berührt, so bilden sie zwei Winkel mit einander; offenbar ist die Neigung beider Linien auf der Seite des kleineren Winkels, auf der zweiten Seite könnte man sie eher eine Abweichung nennen. Normal sind also gerade Linien mit einander, wenn sie auf beiden Seiten weder Neigung noch Abweichung haben.

Zwei Ebenen, die sich schneiden, schneiden sich in einer geraden Linie. Diese beiden Ebenen bilden auf jeder der bei-

den Seiten alle nur möglichen Winkel von 0 bis 2 Rechten, je nachdem man, von einem Punkt der Durchschnittslinie aus, auf beiden Ebenen gerade Linien in verschiedenen Lagen zieht, oder je nachdem man die Lage einer Durchschnittsebene wählt. Zieht man von einem Punkt der Durchschnittslinie beide Linien in der beiden Ebenen angehörigen Durchschnittslinie nach einerlei Richtung, so wird der Winkel = 0, zieht man sie nach entgegengesetzten Richtungen, so wird der Winkel = 180°. Da nun die Lage zweier solcher Ebenen nur durch einen Winkel bestimmt werden kann, so ist natürlich, dafs man einen bestimmten constanten Winkel als Maafs ihrer Neigung wählen mufs, und es ist dieser der Winkel, den die Durchschnittslinien einer normal durch beide Ebenen gelegten Ebene mit einander bilden.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene steht, so bilden beide ebenfalls so viele verschiedene Winkel, als Ebenen durch die Linie gelegt werden können. Nur eine dieser Durchschnittsebenen wird mit der gegebenen Ebene normal und in dieser bildet die Durchschnittslinie mit der Standlinie auf einer Seite den möglich kleinsten, auf der anderen Seite den möglich gröfsten Winkel. Der kleinere dieser beiden Winkel ist der Neigungswinkel der Standlinie mit der Ebene.

Gröfste Kreise, die unter sich und mit Parallelkreisen auf Kugeln sich schneiden, haben desgleichen verschiedene Lagen mit einander, die ebenfalls durch die von den Kreisen oder deren Bogen mit einander gebildete sphärische Winkel gemessen werden. Diese sphärischen Winkel vergleicht man aber erst mit geradlinigen Winkeln, und zwar mit denjenigen, welche die in den Durchschnittspunkten der Bogen in deren Ebenen gezogenen Tangenten mit einander machen. Mit diesen Winkeln werden die sphärischen Winkel als in einerlei Verhältnifs befindlich betrachtet, oder, was zu demselben Ergebnifs führt, beiderlei Winkel werden einander gleich gesetzt. Demnach messen die gedachten Tangentenwinkel mit ihrer Gröfse die Neigungen der Kugelkreisbogen unter einander.

Neigung der Bahn eines Planeten oder eines Kometen bezieht sich auf die Lage dieser Bahn gegen die Bahn unserer Erde, auf der jene Bahnen beobachtet werden. Da sämmtliche Planeten und Kometen in Ebenen umlaufen, die den Mittelpunkt der Sonne in sich schliefsen und die Erde ebenfalls, so schneiden sämmtliche Bahnen die Ekliptik in einer durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Linie, der Knotenlinie. Die Durchschnittspunkte einer Bahn mit der erforderlich verbreiterten Ebene der Ekliptik, welche diametral einander gegenüberliegen, sind die Knoten, und die sphärischen Winkel, welche an diesen Punkten beide Bahnen (von der Ekliptik eine Parallele dort gedacht) mit einander bilden, sind die Neigungswinkel beider Bahnen.

Neigung der Bahn von Nebenplaneten, den Monden, ist deren Neigung mit der Bahn ihres Centralgestirns, ihres Hauptplaneten.

Neigung der Magnetnadel, Inclination, s. u. „Magnet“.

Neigungscompafs, Inclinatorium ist ein Mefsinstrument zur Messung des Winkels, den eine genau im Schwerpunkt aufgehängte (equilibrirte) Magnetnadel im magnetischen Meridian von der Horizontalen abweicht (vergl. „Abweichung der Magnetnadel“).

Neigungsebene ist diejenige Ebene, welche auf jeder von zweien sich schneidenden oder auch blofs geneigten Ebenen normal sich befindet; der von den Durchschnittlinien der Neigungsebene mit den beiden anderen Ebenen gebildete Winkel ist deren Neigungswinkel.

Neigungsnadel ist die Magnetnadel im Neigungscompafs.

Neigungswinkel, s. u. „Neigung“.

Nenner ist die unter dem Bruchstrich, die dividirende Zahl (s. „Bruch“).

Neoide. Hierunter versteht man eine Curve, welche für zweckmäfsige Hebung und Senkung der den Spinnmaschinen angehörigen Spindeln angewendet werden soll. Ihre Construction ist folgende.

Man zeichnet in einem Kreise Halbmesser mit Verlängerungen und macht letztere proportional den von denselben abgeschnittenen Bogen.

Fig 844.

Es sind also

$DE : FG$ = Bogen AD : Bogen AF

Es ist mithin $DE = k \cdot$ Bogen AD; $FG = k \cdot$ Bogen AF, wo k eine ganz beliebige Zahl ist.

Zum Ueberflufs erklärt man auch, dafs der beliebige constante Factor k noch mit dem Halbkreisbogen $ADFB$ dividirt werden solle, so dafs

$$DE = \frac{a}{\pi r} \text{ Bogen } AD;\ FG = \frac{a}{\pi r} \text{ Bogen } AF.$$

Ist der ganze Kreis abgewickelt, so kann eine zweite Windung construirt werden; die Verlängerung in CE von D aus wird sodann der Kreisumfang + dem Bogen AD.

Da k oder $\frac{a}{\pi r}$ jede beliebige Zahl, also auch ein ächter Bruch sein kann, so kann man von den Bogenlängen AD, AF ganz absehen. Man theile die Kreislinie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, gibt der ersten Verlängerung die beliebige Länge a, der zweiten die Länge $2a$ u. s. w.

Nepersche Analogien. In Beziehung auf das zu dem Art. Gaufs'sche Gleichungen gezeichnete Kugeldreieck, Fig. 652, pag. 137 bestehen die Analogien in folgenden Gleichungen:

$$1.\ tg\ \tfrac{1}{2}(a+b) \cot \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$2.\ tg\ \tfrac{1}{2}(a-b) \cot \tfrac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$3.\ tg\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ tg\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$4.\ tg\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\ tg\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}$$

Die Gaufs'schen Gleichungen sind in dem Art. „Kugeldreieck" am Schlufs pag. 122 entwickelt; aus denselben lassen sich die Analogien leicht ableiten. Man erhält nämlich

Die 1te Analogie durch Division von Gleichung 1 durch Gleichung 3.
Die 2te „ durch Division von Gleichung 2 durch Gleichung 4.
Die 3te „ durch Division von Gleichung 4 durch Gleichung 3.
Die 4te „ durch Division von Gleichung 2 durch Gleichung 1.

Aus den Neper'schen Analogien erhält man nun zwei Winkel, wenn die ihnen gegenüberliegenden Seiten und der dritte Winkel gegeben sind, und zwei Seiten, wenn die ihnen gegenüberliegenden Winkel und die dritte Seite gegeben sind.

Sind nämlich die beiden Seiten a, b und der ihnen gegenüberliegende Winkel γ gegeben, so erhält man aus Gleichung 1 und 2 die Winkel $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; die beiden gefundenen Werthe addirt ergeben α, der zweite Werth von dem ersten abgezogen ergibt β.

Sind die beiden Winkel α, β und die ihnen gegenüberliegende Seite c gegeben, so erhält man durch Gleichung 3 und 4 die Längen $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a-b)$.

Nepersche Logarithmen. Die ersten Logarithmen überhaupt bestanden in seinem logarithmischen Canon für die Sinus und Tangenten der Winkel von Minute zu Minute.

Netz, Dreiecksnetz ist für ausgedehnte Land- oder Feldvermessungen eine Aneinanderreihung von grofsen Dreiecken, deren Spitzen von der Natur oder von Bauwerken schon ausgezeichnet sind oder durch besondere Signale bezeichnet werden. Deren Vermessung und Berechnung mit Hülfe einer Basis und durch Winkelaufnahmen, s. den Art. „Gradmessung".

Neumond ist der Mond in der Lage zwischen Sonne und Erde, so dafs die uns zugekehrte Seite von der Sonne unbeleuchtet ist (s. „Länge der Sonne und des Mondes und Mondphasen.")

Neun ist die letzte Ziffer im dekadischen System.

Die Zahl 9 hat folgende eigenthümliche Eigenschaften:

1. Wenn die Summe der Ziffern einer Zahl durch 9 ohne Rest theilbar ist, so ist auch die Zahl durch neun ohne Rest theilbar. Z. B. 7425. Denn es ist

$$\begin{aligned} 5 &= \quad\quad\quad\ \ 5 \\ 20 &= 2 \times 9 \quad + 2 \\ 400 &= 4 \times 99 \ \ + 4 \\ 7000 &= 7 \times 999 + 7 \end{aligned}$$

Demnach

$$7425 = 2 \times 9 + 4 \times 99 + 7 \times 999 + (5+2+4+7)$$

Die ganze Zahl ist also durch 9 theilbar, wenn die eingeklammerte Summe der Ziffern durch 9 theilbar ist. Es sind also auch alle Zahlen durch 9 ohne Rest theilbar, welche entstehen, wenn man die Ziffern 7, 4, 2, 5 beliebig verstellt, als 2457, 2547 u. s. w.

2. Die Summe der Ziffern einer Zahl, in welche die 9 nicht aufgeht, durch 9 dividirt läfst denselben Rest, welcher entsteht, wenn man die Zahl durch 9 dividirt.

Die Richtigkeit des Satzes geht aus 1 hervor.

3. Jede Potenz von 10 durch 9 dividirt läfst den Rest 1.

4. Soll eine Zahl mit 9 multiplicirt werden, multiplicire mit (10 − 1); statt mit 99 mit (100 − 1); statt mit 999 mit mit 1000 − 1

$9 \times 576 = 5760 - 576 = 5184.$

99 × 7879 schreib das Subtractionsexempel:

$$\begin{array}{r} 787900 \\ 7879 \\ \hline \end{array}$$

giht $99 \times 7979 = 780021$

u. s. w.

5. Statt eine Zahl, in welche die 9 aufgeht mit 9 zu dividiren, kann man addiren; denn dividirt man durch die zweitheilige Zahl (10 − 1), z. B. die Zahl 31104, so erhält man folgendes Exempel

$$\begin{array}{r|l} 31104 & 10 - 1 \\ \underline{31100 - 3110} & \overline{3110 + 311 + 31 + 4} \\ 4 + 3110 = 3114 & \text{Oder untereinander geschrieben:} \\ \underline{3110 - 311} & 3110 \\ = +315 & 311 \\ \underline{310 - 31} & 31 \\ +36 & \underline{4} \\ & 3456 = 31104 : 9 \end{array}$$

2. Beispiel: 979533 : 9 schreib:

	979533	97953
1. Rest	97956	9795
2. Rest	9801	980
3. Rest	981	98
4. Rest	99	9
5. Rest	18	2

979533 : 9 = 108837

3. Beispiel: 35987485 : 999

$$\begin{array}{lr|l} & 35987485 & 1000 - 1 \\ & \underline{35987000} & \overline{35987} \\ & \left\{ \begin{array}{r} 485 \\ + 35987 \end{array} \right. & \\ \text{Rest} & 36472 & 36 \\ & \underline{36000} & \\ & \left\{ \begin{array}{r} 472 \\ + 36 \end{array} \right. & \\ \text{Rest} & 508 & \end{array}$$

35923[illegible] = 35987485 : 999

6. Wenn zwei Zahlen M und N durch 9 die Reste m, n geben, so geben die Producte $M \times N$ und $m \times n$ ebenfalls gleiche Reste.

Denn es sei $M = 9 \cdot a + m$; $N = 9 \cdot b + n$

so ist $M \times N = 81ab + 9(an + bm) + mn$

Demnach mufs $\frac{1}{9} MN$ mit $\frac{1}{9} mn$ denselben Rest geben.

7. Wird eine Zahl M durch eine Zahl N dividirt, und es ensteht der Quotient Q und der Rest R so ist:

$$\frac{M}{N} = Q + \frac{R}{N}$$

oder $M = N \times Q + R$

Hieraus ist zu ersehen, dafs wenn N, Q, R, M einzeln durch 9 dividirt Reste lassen, die Reste von N und Q multiplicirt, dies Product mit dem Rest des Restes addirt einen Rest geben müssen, der dem Rest des Dividendus gleich ist.

Neunerprobe ist ein Prüfungsmittel für Ausrechnungen in den vier Species. Sie gründet sich auf die im vorigen Artikel nachgewiesenen Eigenschaften der Zahl 9. In dem Art. „Addition" No. 4, ist die Neunerprobe für Addition erklärt; sie gilt auch wenn Minusgröfsen in den Summanden vorkommen, also auch für die Subtraction und gründet sich auf No. 2 des vorigen Art.

Die Probe für Multiplication be-

steht darin, daſs man Reste, welche aus der Division jedes Factors mit der 9 hervorgehen multiplicirt. Dies Product der Reste mit 9 dividirt muſs mit dem Product der gegebenen Zahlen durch 9 dividirt einerlei Rest haben.

Z. B. $3425 \times 2794 = 9569450$.

3425 hat den Rest 5; 2794 den Rest 4; das Product 20 der Reste gibt den Rest 2 und der Rest der Zahl 9569450 hat ebenfalls den Rest 2.

Um die eben angegebenen Reste der Zahlen zu finden hat man nach No. 1 des vorigen Art. nur nöthig die Summe deren Ziffern dazu zu nehmen. Das angegebene Verfahren selbst gründet sich auf No. 6 des vorigen Art.

Die Probe für Division besteht nach No. 7 des vor. Art. darin, daſs man aus der Division durch 9 die Reste des Divisors und des Quotient multiplicirt, dies Product mit dem Rest des mit 9 dividirten Restes addirt. Diese Zahl und der Dividend durch 9 dividirt müssen beide einerlei Rest geben.

Z. B. $9542780 : 248 = 38478 + \frac{236}{248}$

Der Dividendus hat den Rest $= 8$

Der Divisor den Rest 5

Der Quotient den Rest 3

Der Rest den Rest 2

$5 \times 3 + 2 = 17$, Rest 8, also mit dem Rest des Dividend gleich.

Neutralitätsreihen, s. d. „Atomgewicht“, pag. 165 links.

Niedere Analysis, Analysis des Endlichen. Hierunter versteht man die gesammte Arithmetik mit Ausnahme der Differenzial- und Integralrechnung, s. d. Art. „Analysis“.

Niedere Benennung ist bei benannten Zahlen der Theil eines Ganzen, das Ganze die höhere Benennung. Bei Geld z. B. ist Thaler die höhere, Groschen die niedere Benennung.

Niveau ist der allgemeine Name eines Nivellir-Instruments mit Fernrohr und Libelle.

Nivelliren heiſst, den Höhenunterschied zweier und mehrerer auf der Erdoberfläche befindlichen Punkte zu bestimmen. Es geschieht zur Anlage von Kunststraſsen, als Chausseen, Eisenbahnen, zu Anlage von Kanälen, um das Totalgefälle zwischen den zu verbindenden Fluſsstellen zu finden, auf die Kanalstrecke zu vertheilen und das Erforderniſs von Schleusen beurtheilen und dieselben richtig anlegen zu können; für Entwässerung, Bewässerung, Drainirung von Ländereien. Man bezeichnet das Nivelliren auch mit dem ungeeigneten Namen Wasserwägen. Es hat dies seinen Grund entweder darin, daſs es früher vorzugsweise zu hydrotechnischen Zwecken angewendet worden, oder auch, daſs das erste Nivellirinstrument aus einer mit Wasser angefüllten communicirenden Röhre, der noch heut so genannten Wasserwaage bestanden hat.

Je nach dem Grade der erforderlichen Genauigkeit sind auch die Hülfsmittel, die Längenmaaſsstäbe und die Nivellirinstrumente zu wählen.

Ferner wird der Zweck am vollkommensten erreicht, je einfacher und je unmittelbarer dabei verfahren werden kann. Fallen keine Hindernisse, als tiefe Schluchten, hohe Berge in die zu nivellirende Linie, so ist das Nivelliren eine äuſserst einfache Arbeit.

Das einfache Nivelliren erfordert zwei Instrumente, das Nivellirinstrument und die Nivellirlatte mit verschiebbarer Tafel. Jedes Nivellirinstrument hat die Einrichtung, daſs mit demselben eine genau horizontale Linie visirt werden kann. Die Nivellirlatte ist von der Unterkante ab in Fuſse, Zolle und Linien eingetheilt, die quadratische Tafel ist durch eine lothrechte und eine waagerechte Mittellinie in vier Quadrate getheilt, welche durch abwechselnd schwarze und weiſse Färbung auf die Ferne kenntlich gemacht sind.

Um nun den Höhenunterschied der beiden Punkte A und B zu finden, stellt der Feldmesser das Instrument über den höheren Punkt A, läſst einen geübten Arbeiter die Latte BF lothrecht über den Punkt B erhalten und vermittelst Handzeichen die Tafel so lange verschieben, bis seine Visirlinie auf die waagerechte Mittellinie der Tafel trifft. Die mit dieser Linie waagerechte Kante eines Schiebers gibt auf dem Maaſsstab die Höhe BE an, von der die Höhe AC der Visirlinie über dem Punkt A abgezogen den Höhenunterschied der Punkte A und B angibt.

Die Visirlinie hat wegen des veränderlichen Stativs bei jeder Aufstellung eine andere Höhe über dem Aufstellungspunkt, sie müſste also jedesmal vermessen werden. Man nivellirt aber aus der Mitte, d. h. man stellt das Instrument in der Mitte zwischen den beiden zu nivellirenden Punkten auf, wo dann deren Höhenunterschied unabhängig von der Höhe der Visirlinie erhalten wird.

Sind nämlich *B* und *D* die beiden zu nivellirenden Punkte, so wird mit dem Instrument erst die Linie *CE*, hierauf die Linie *CG* visirt, das kleinere von dem grösseren der beiden notirten Maafse abgezogen ergibt den Höhenunterschied beider Punkte *B* und *D*.

Fig. 845.

Für grösere Strecken wird das Nivellement auf diese Weise begonnen und fortgesetzt; die Entfernungen je zweier auf einander folgenden Punkte heifsen Stationen, die Punkte selbst Stationspunkte.

Es sei der nächste Stationspunkt *H*, so bleibt der Nivellirstab in *D* stehen, nur die Tafel wird nach *H* gedreht, das Instrument wird in der Mitte zwischen *D* und *H* aufgestellt, nach *D* (rückwärts) und nach *H* (vorwärts) visirt, beide Maafse *DG'* und *HJ* wenn *J* der visirte Punkt ist, werden notirt und deren Unterschied gibt die Höhe zwischen *D* und *H*.

Es sei gefunden: Erste Station.
Rückwärts $BE = 4'\ 3''\ 6'''$
Vorwärts $DG = 1'\ 4''\ 8'''$ gibt $2'\ 10''\ 10'''$ Steigen

Zweite Station.
Rückwärts $DG' = 4'\ 1''\ 2'''$
Vorwärts $HJ = 4'\ 10''\ 7'''$ gibt $0'\ 9''\ 5'''$ Fallen

beträgt von *B* bis *H* $2'\ 1''\ 5'''$ Steigen.

Zur Versicherung, dafs die Maafse richtig abgelesen worden, wird die Tafel nach der Ablesung verschoben und zum zweiten Mal visirt. Zeigt sich eine bemerkbare Differenz, zum dritten Mal.

Die Aufzeichnung der gefundenen Maafse geschieht sofort in einem dazu eingerichteten Journal tabellarisch. Es werden hierin auch Columnen für Hausarbeit zugefügt, um in diese die noch auszurechnenden Zahlen einzuschreiben, welche zum Auftragen des Nivellementsprofils unmittelbar erforderlich sind.

Anbei erfolgt eine Tabelle als Beispiel wie dieselbe eingerichtet werden könnte.

Stations-Nummer	Stations-Länge	Rückwärts		Vorwärts		Steigen	Fallen	Vertikal-Länge
		einzeln abgelesen	Mittel	einzeln abgelesen	Mittel			
1	20	4. 3. 7 4. 3. 8 4. 3. 7	4. 3. 7	2. 6. 5 2. 6. 5	2. 6. 5	1. 9. 2	—	58. 2. 10
2	15	6. 3. 2 6. 3. 2	6. 3. 2	4. 1. 7 4. 1. 8 4. 1. 8	4. 1. 8	2. 1. 6	—	56. 1. 4
3	20	3. 1. 9 3. 1. 8 3. 1. 8	3. 1. 8	5. 3. 4 5. 3. 5 5. 3. 4	5. 3. 4	—	2. 1. 8	58. 3. 0

Die esten beiden Columnen sind Stubenarbeit, welche vor dem Nivellement geschieht. Denn die Stationslängen sind beim Vermessen der zu nivellirenden

Strecke dem Terrain entsprechend dem Augenmaafs nach bestimmt und mit numerirten Pfählen bezeichnet. Nur die dritte und die fünfte Columne sind auf dem Felde auszufüllen, die übrigen werden nach beendigtem Nivellement wieder zu Hause berechnet und ausgefüllt.

Die durch Punkte getrennten drei Zahlen sind Fufse, Zolle und Linien. Die Mittel, die Zahlen, welche als Mittelwerthe aus den jedesmaligen drei Ablesungen genommen werden, von einander abgezogen liefern das Steigen und Fallen, und die Differenzen deren beiden Summen den summarischen Höhenunterschied zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt der nivellirten Länge.

Um das Nivellementsprofil auftragen zu können, zeichnet man eine Horizontallinie, trägt von einem Anfangspunkt aus die Stationslängen ab, fällt aus den Stationspunkten Lothe und bestimmt auf diesen die nivellirten Punkte durch Abstände von der Horizontalen, die aus den beiden vorletzten Columnen berechnet worden sind.

Gesetzt der Höhenunterschied zwischen dem tiefsten und dem höchsten Punkt der nivellirten Linie betrage gegen 40 Fufs, so kann man, den kleinsten leerbleibenden Abstand, den des höchsten Punkts von der Horizontalen etwa 10 Fufs gesetzt, die Normalverticale = 50 Fufs annehmen. Die Ermittelungen des tiefsten und des höchsten Punkts sind aber weitläufig und es ist am einfachsten, wenn man mit dem Anfangspunkt sogleich eine Vertikalhöhe annimmt, weil dann die übrigen alle der Reihenfolge nach berechnet werden können. Setzt man die Vertikale für den Anfangspunkt = 60 Fufs, so hat man die des zweiten Stationspunkts

= 60′ − 1′ 9″ 2‴ = 58′ 2″ 10‴

die des dritten = 58′ 2″ 10‴ − 2′ 1″ 6‴ = 56′ 1″ 4‴

die des vierten = 56′ 1″ 4‴ + 2′ 1″ 8‴ = 58′ 3″ 0‴

Nivellir-Instrumente. Das einfachste derselben ist die **Setzwaage** mit Bleiloth für Höhenabmessungen sehr naher Punkte (s. „Bleiwaage“ mit Fig. 225 und 226). Die nächstfolgende ist die **Nivellirwaage**, die gemeine **Wasserwaage**, **Kanalwaage**, welche in dem Art. „Canalwaage“ mit Fig. 275 beschrieben ist. Die dieser unmittelbar sich anschliefsende ist die **Quecksilberwaage**. Dieser besteht aus einer hölzernen viereckigen Röhre von 1 bis 1½ Fufs Länge, welche an beiden Enden in aufrecht stehende genau ausgearbeitete hohle Würfel mündet. Das ganze Instrument hat die Form eines Kastens und wird mit einem an der unteren Fläche befindlichen Ansatz auf ein Stativ befestigt; auf der oberen Fläche befindet

Fig. 846.

sich eine Röhrenlibelle. Die Röhre wird soweit mit Quecksilber gefüllt, dafs die in beide Endhöhlungen eingesteckten und an deren Wandungen möglichst anschliefsenden Elfenbeinwürfel darauf schwimmen können. Beide Würfel haben metallene Aufsätze mit Diopteru. Die Objectivdiopter ist ein quadratischer Rahmen mit Fadenkreuz, die Oculardiopter eine kleine runde Durchsehéöffnung; besser ist es, wenn jede der beiden Diopteru zugleich Ocular- und Objectivdiopter ist, damit man zur Verificirung die Waage bei fest bleibendem Stativ umdrehen kann. Bei richtig einspielender Libelle wird eine genaue Horizontale visirt.

Die **Nivellirwaagen mit Fernrohr** sind die an Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Leistung vorzüglichsten Instrumente. Das Fernrohr (s. d. Art.) hat etwa 18 Zoll Länge, in dessen Brennpunkt ein Fadenkreuz; dessen Axe ist bei richtig eingestellter Libelle genau horizontal. Um diese genaue Uebereinstimmung hervorzubringen ist das Fadenkreuz nach der Richtung der Axe und senkrecht mit derselben durch Schrauben mikrometrisch verstellbar eingerichtet. Das Fernrohr hat zwei Auszüge, von welchen die Lage des Fadenkreuzes unabhängig ist. Daher wird durch das Ausziehen des Objectivrohrs der entfernte Gegenstand, durch das Ausziehen des Ocularrohrs das Fadenkreuz in Deutlichkeit gröfser.

Das eigentliche Instrument ruht wie alle übrigen Instrumente auf einem Stativ mit drei verstellbaren Füfsen. Eine

Feststellung desselben und eine Construction seiner Theile, dafs bei der Umkehrung oder überhaupt bei einer Drehung des Fernrohrs um jeden beliebigen Bogen die Lage dessen Axe in der Horizontale richtig bleibt ist Hauptbedingung, was jeder Mechaniker auf seine eigenthümliche Weise herzustellen weifs.

Nivellirstäbe mit Tafel (Zielscheibe) gehören sich von gutem festem Holz. Sie haben etwa 10 Fufs Länge, und damit sie nicht schwanken, von 3 bis 4 Zoll □ Stärke. Die Zielscheibe ist ungefähr 12 Zoll im □ von Holz oder von Eisenblech. Sie wird entweder horizontal gehälftet oder in vier gleiche Quadrate getheilt und deren Hälften oder Viertel durch abwechselnd weifsen und schwarzen Anstrich auf die Ferne kenntlich gemacht. Im ersten Fall ist die horizontale Mittellinie, im zweiten der Mittelpunkt das Visirziel.

Nonius ist ein gegen den eingetheilten Kreisring oder Kreisbogenring eines Winkelmessers verschiebbar liegender zweiter kleinerer ebenfalls eingetheilter Kreisbogenring, durch welchen man in den Stand gesetzt wird, noch viel kleinere Winkeltheile, nämlich aliquote Theile der auf jenem Kreisring angegebenen kleinst möglich zu verzeichnen gewesenen Winkeltheile anzugeben und abzulesen.

Je gröfser der Halbmesser einer einzutheilenden Kreislinie ist, desto kleinere Unterabtheilungen können demselben gegeben werden. Bei 6 Zoll Halbmesser kann man jeden der 360 Grade noch in 6 gleiche Theile richtig und lesbar abtheilen, so dafs man unmittelbar Winkel von 10 Minuten ablesen kann.

Um nun die Möglichkeit klar darzustellen, dafs man mit Hülfe des Nonius noch kleinere Unterabtheilungen ablesbar erhält, sei Fig. 847 ein geradliniger Maafsstab AB von 10 gleichen Theilen. Will

Fig. 847.

man nun einen Nonius construiren, der Zehntel dieser Theile wahrnehmen und ablesen läfst, ohne dafs man jene Theile einzeln direct durch Theilstriche in Zehntel verkleinert, so nimmt man einen zweiten Stab CD, trägt auf diesem eine Länge von 9 Theilen des ersten Maafsstabes ab und theilt diese in 10 gleiche Theile. Jeder dieser 10 Theile hat also eine Länge von $^9/_{10}$ eines Theils von AB, und legt man die Nullpunkte beider Maafsstäbe genau aufeinander, so sind die ersten beiden Theilstriche $^1/_{10}$ eines der Theile von AB von einander entfernt, die beiden zweiten Theilstriche $^2/_{10}$ eines solchen Theils u. s. f. Die beiden 9ten Theilstriche $^9/_{10}$ und die beiden 10ten Theilstriche $^{10}/_{10}$ Theile = einem ganzen Theil von AB von einander entfernt.

Nun verbindet man den Nullpunkt des Nonius mit der Axe des Fernrohrs so, dafs beide in derselben vertikalen Ebene sich befinden. Gesetzt nun, man habe den zweiten Schenkel eines Winkels visirt und fände ihn, wie Fig. 848 zeigt,

Fig. 848.

zwischen 72,1 und 72,2 Grad, so sucht man mit Hülfe einer scharfen Lupe denjenigen Theilstrich des Nonius, der mit einem Theilstrich des Limbus in einerlei gerade Linie fällt. Man findet den vierten Theilstrich Es ist also Noniusstrich 3 von Limbusstrich 4 um 0,01 Grad auseinander, Noniusstrich 2 von Limbusstrich 3 um 0,02 Grad, Noniusstrich 1 von Limbusstrich 2 um 0,03 Grad und Noniusstrich 0 von Limbusstrich 1 um 0,04 Grad. Man hat also den Winkel gemessen = 73,14 Grad.

Will man von den kleinsten Theilen des Limbus noch $m$tel ablesen, so nimmt man auf dem Nonius die Länge von $(m - 1)$ Theilen und theilt dieselbe in m gleiche Theile.

Nordpunkt eines Orts der Erdoberfläche ist einer der 4 Cardinalpunkte eines Horizonts, sowohl des wahren als des scheinbaren, nämlich der im Horizont liegende nördliche Endpunkt seines Meridians (s. „Cardinalpunkte").

Nordstern ist der Polarstern.

Nordsüdlinie ist die Mittagslinie (s. „Cardinalpunkte").

Normal (Norma, Richtmaafs), s. v. w. winkelrecht. Normal sind gerade Linien, wenn sie rechte Winkel mit einander bilden; normal ist eine gerade Linie auf einer Ebene, wenn sie mit jeder durch den Standpunkt in derselben gezogenen geraden Linie rechte Winkel bildet; normal sind zwei Ebenen auf einander, wenn deren Neigungswinkel ein rechter Winkel ist (vergl. „Neigung").

Normalaxe in einem Krystall ist die zur Bestimmung dessen Form senkrecht gestellte Hauptaxe (s. „Axen und Axensystem der Kryställe").

Normale ist eine Linie, die normal, die winkelrecht ist; man hat also Normalen auf Linien und Ebenen (s. „Ebene"). Die Normale in dem Punkt einer Curve ist die in diesem Punkt auf dem Curven-Element normale Linie also zugleich die auf der in diesem Punkt an die Curve gezogenen Tangente normale Linie. Der Winkel dieser Normalen mit der rechtwinkligen Ordinate ist gleich dem Winkel (α) zwischen Tangente und Abscisse und $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (s. Bd. II., pag 185, Formel 2 mit Fig. 536).

Ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv, so liegt die Normale nach der Richtung der wachsenden Abscisse; ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ, so liegt die Normale entgegengesetzt. Die Subnormale (Formel 3) DN ist $= y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$; ist diese positiv, so liegt die Subnormale vom Standpunkt D der Ordinate nach der Abscissenrichtung.

In Bd. II, pag. 185 mit Fig. 536 ist für rechtwinklige Coordinatengleichungen ermittelt:

Für den Winkel $BTD = \alpha$ zwischen der Curventangente und der Abscisse

$$tg\,\alpha = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Da nun $\angle DBN = \angle BTD$, so gilt auch die Formel für diesen Winkel der Normalen mit der Ordinate.

Die Normale BN macht mit der Abscisse den $\angle BNT = 90° - \alpha$, mithin gilt die Formel auch für die Cotangente dieses Winkels.

Die Normale BN ist $= y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

Die Subnormale DN ist $= y\,\frac{\partial y}{\partial x}$

Daselbst, pag. 186 mit Fig. 537 ist für Polarcoordinaten entwickelt:

Für den Winkel CBT zwischen der Ordinate z und der Tangente

$$cot\,CBT = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)}{z} \text{ oder } tg\,CBT = \frac{z\,\partial\varphi}{\partial z}$$

Folglich ist für den Winkel CBN zwischen der Normale und der Ordinate

$$cot\,CBN = \frac{z\,\partial\varphi}{\partial z} \text{ oder } tg\,CBN = \frac{\partial z}{z\,\partial\varphi}$$

Der Winkel CBD zwischen Polar- und rechtwinkliger Ordinate $= (\varphi - 90°)$.

Die Normale $BN = \sqrt{z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$

Die Subnormale $CN = \frac{\partial z}{\partial\varphi}$

Normalmaafs ist für jedes Land das gesetzliche Maafs. Des jetzt fast ganz allgemeinen Verkehrs wegen zwischen allen Völkern der Erde sollte ein Normalmaafs ein Maafs für alle Erdbewohner sein; ein solches Maafs sollte aber offenbar die Beschaffenheit haben, dafs sämmtliche Erdbewohner einerlei Ursach haben, es als Norm anzunehmen und anzuerkennen.

Das Hauptsächlichste aller Normalmaafse ist ein Normallängenmaafs, und ich habe in dem Art. „Längenmaafs" am Schlufs nachgewiesen, dafs es kein angemesseneres geben könne als die Länge des im Aequator schwingenden Secundenpendels, welche mit der Länge des Meters übrigens ziemlich nahe übereinstimmt.

Aus dem allgemein geltenden Längenmaafse gingen unmittelbar die allgemein geltenden Flächen- und Körpermaafse hervor, und hierauf die allgemein geltenden Gewichtsmaafse, wenn jeder einzelne Staat damit einverstanden ist, dafs man das Gewicht des von der Natur auf der ganzen Erde in gleicher Beschaffenheit verbreiteten Stoffs zu Grunde legt, nämlich das Gewicht des destillirten Wassers in seiner gröfsten Dichtigkeit bei 4 Grad C.

Null ist ein Begriff, der nicht gegeben ist, und da man den Begriff erst entwickeln mufs, ein zusammengesetzter Begriff. Der Begriff Null kann auf die verschiedenste Weise definirt werden:

Null ist der Anfang des Entstehens

einss Etwas; denn jeder gegenwärtige Zeitangenblick ist eine Nnll, der Anfangspnnkt jeder zu ziebenden geraden Linie ist eine Null; Null ist die Differenz zwischen gleichem Miñuend und Snbtrahend; Nnll ist die Grenze des gleichartig Entgegengesetzten, z. B. in der Reihe der additiven und subtractiven Logarithmen. Nnll nnd Nichts sind unterschieden, denn Nichts ist das Nichtdasein, das Nichtverhandensein eines Etwas. Null als Gröfse betrachtet nnd damit gerechnet gibt ungereimte Resultate (vergl. „Absurd). Gleichwohl wird Null als eine im Verschwinden begriffene Gröfse betrachtet nnd damit rechnungsweise verfahren.

Nullpunkt ist der Anfangspunkt einer Skala, einer Reihe, eines Winkelmessers.

Nullzeichen (0) das Zeichen für Nnll ist schen beim Zahlenscbreiben und Zahlenrechnen von Wichtigkeit, we mit demselben die Ordnnngsstellen, welche leer bleiben sellen, ausgefüllt werden.

Numeriren heifst jede nach dem dekadischen System gescbriebene Zahl richtig aussprechen und jede ausgesprochene Zahl dem dekadischen System entsprechend niederschreiben.

Numerisch ist wss bestimmte Zahlen betrifft als: numerische Gleichnngen, solche, deren bekannte Gröfsen bestimmte Zahlen sind, sie beifsen auch Zahlengleichnngen im Gegensatz zu den Literal- eder Bnchstabengleichnngen.

Numerus, die Zahl. Man nennt besonders Nnmerus die Zahl in Beziehnng auf ihren Legarithmus und sagt: die Numeri und ihre Legarithmen.

Nutatien (Schwanken) der Erdaxe ist die fortdauernde Aenderung der Erdaxe in ihrer Parallelität mit sich selbst. Die Axe hat gegen die Axe der Ekliptik eine Neigung von 23½ Grad, nämlich gerade so viel als die Schiefe der Ekliptik beträgt. Die Nutation besteht nun darin, dafs dieser Winkel fertdauernd bald vergröfsert, bald verkleinert wird. Es liegt dies in den verschiedenen Anziehungen, welche die Sonne und der Mond und besenders dieser auf unsere Erde ausüben, je nachdem deren gegenseitige Lagen verschieden werden:

Die Bahn des Mondes ist gegen die Ekliptik etwa 5 Grad geneigt, die Ekliptik gegen den Erdaeqnator 23½ Grad. Nun stellen die Lagen des Mondes gegen die Erde sich felgender Art: Tritt der aufsteigende Mondknoten in den Frühlingspunkt, se hat der Erdaeqnator gegen die Mondbahn eine Neigung ven $(23\frac{1}{2}+5) = 28\frac{1}{2}$ Grad, und tritt er in den Herbstpunkt, se haben beide eine Neignng ven $(23\frac{1}{2}-5) = 18\frac{1}{2}$ Grad. In dem ersten Fall wird die Erdaxe ven dem Pol der Ekliptik um 9 Secnnden entfernt, in dem zweiten nm 9 Secnnden genähert, so dafs die jährlichen Neigungsänderungen durch den Mond allein 18 Secunden betragen

Hierzu kommen noch die Aenderungen, welche aus dem Verrücken der Nachtgleichen hervorgehen, welche alse die Sonne durch Attractien, und zwar ebenfalls regelmäfsig periedisch bewirkt.

Ferner die Störungen durch Annäberung gröfserer Planeten in verschiedenen Richtnngen, besenders des Jnpiters.

O.

Obere Halbkugel, Himmels- und Erdhalbkugel, s. v. w. „Nördliche Halbkugel“; eine uneigentliche Bezeichnung.

Oberfläche ist Begrenzung eines geometrischen Körpers, als Fläche ist sie kein Theil desselben, durch ihre Form aber bestimmt sie zugleich die des Körpers selbst. Sie ist eben oder uneben. Ebene Oberflächen sind drei- und mehrseitige Figuren, die wiederum regelmäfsig oder unregelmäfsig sein können. Sind sämmtliche Oberflächen regelmäfsig, so ist auch der Körper ein regelmäfsiger.

Krumme Oberflächen gibt es von unzählig vielen Formen, dagegen werden nur solche geometrisch betrachtet, die nach einem bestimmten Gesetz gekrümmt sind. Die am meisten vorkommenden krummen Oberflächen sind die Umdrehungsflächen, Flächen, die durch Umdrehung von Linien um Axen entstanden zu denken sind oder auch wirklich so construirt worden. Die durch Umdrehung gerader Linien erzeugten Oberflächen sind die Cylinder- und die Kegelfläche. Im ersten Fall liegt die erzeugende gerade Linie ‡ der Axe, im zweiten Fall nicht; auch ist in diesem zweiten Fall nicht nöthig, dafs sie mit der Axe in einerlei Ebene liege. Liegt eine gerade Linie normal der Axe und dreht sich in einer auf der Axe normalen Ebene, so entsteht ein Kreisring. Von den durch krumme Linien beschriebenen Flächen betrachtet man nur diejenigen, deren Erzeugungslinien selbst eine geometrisch zu betrachtende Form besitzen; als die Kugelfläche, die Flächen aus den Kegelschnittslinien, der Cycloide u. s. w.

Die krummen Oberflächen sind entweder erhaben (convex) oder hohl, (concav). Concave Oberflächen schliefsen niemals einen Raum, sie begrenzen nur Körper in Verbindung entweder mit erhabenen Oberflächen und geben mit diesen ring- oder schalenförmige Körper, oder mit ebenen Endflächen.

Die Gröfsenbestimmung einer von Curven begrenzten Ebene, s. Bd. II, pag. 192 mit Fig. 540, die einer durch Umdrehung von Curven erzeugten Umdrehungsfläche pag. 193 mit Fig. 541.

Objectiv, s. v. w. „Objectivglas“ in einem Fernrohr.

Objectivdiopter die dem zu visirenden Punkt zugewandte Diopter.

Oblongum ist ein rechtwinkliges Parallelogramm mit ungleichen Seiten.

Occidens, s. v. w. „Abend, Abendpunkt“.

Octaeder ist einer der 5 vieleckigen regulären Körper oder Polyeder, welche zur Untersuchung ihrer Eigenschaften einen Artikel in diesem Wörterbuch erhalten sollen.

Das Octaeder wird von 8 regelmäfsigen Dreiecksflächen eingeschlossen, es hat 12 gleich grofse Kanten und 6 vierflächige Ecken mit 24 gleichen ebenen Winkeln.

Bedeuten m, n, N, α, k, r und R, ferner J^2 und J^3 dasselbe wie in dem Art. „Dodekaeder“ so ist hier:

$$m = 4,\ n = 3,\ N = 8$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\alpha = 109^\circ\ 28'\ 16''$$

$R = \frac{1}{2} k\ tg\ \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\ 45^\circ = \frac{1}{2} k \sqrt{2}$	$= 0{,}707\ 1068 \times k$
$= r \cdot \frac{tg\ 45^\circ}{cot\ 60^\circ} = r\sqrt{3}$	$= 1{,}732\ 0508 \times r$
$r = \frac{1}{2} k\ tg\ \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\ 60^\circ = \frac{1}{6} k \sqrt{6}$	$= 0{,}408\ 2483 \times k$
$= R \cdot \frac{cot\ 60^\circ}{tg\ 45^\circ} = \frac{1}{3} R \sqrt{3}$	$= 0{,}577\ 3503 \times R$
$k = 2R\ cot\ \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\ 45^\circ = R\sqrt{2}$	$= 1{,}414\ 2136 \times R$
$= 2r\ cot\ \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\ 60^\circ = r\sqrt{6}$	$= 2{,}449\ 4897 \times r$
$J^2 = \frac{1}{4} nk^2\ cot\ 60^\circ = \frac{1}{4} k^2 \sqrt{3}$	$= 0{,}433\ 0127 \times k^2$
$= nR^2\ cot^2\ \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\ 60^\circ \cdot cot^2\ 45^\circ = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$	$= 0{,}866\ 0254 \times R^2$
$= nr^2\ cot^2\ \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\ 60^\circ = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$	$= 2{,}598\ 0762 \times r^2$
$J^3 = \frac{1}{12} n\ Nk^3\ tg\ \frac{1}{2}\alpha \cdot cot^3\ 60^\circ = \frac{1}{3} k^3 \sqrt{2}$	$= 0{,}471\ 4045 \times k^3$
$= \frac{1}{3} n\ NR^3\ cot^2\ \frac{1}{2}\alpha \cdot cot^3\ 60^\circ \cdot cot^3\ 45^\circ = \frac{4}{3} R^3$	$= 1{,}333\ 3333 \times R^3$
$= \frac{1}{3} n\ Nr^3\ cot^2\ \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\ 60^\circ = 4r^3 \sqrt{3}$	$= 6{,}928\ 2032 \times r^3$

Octaeder (Kryst.) 1. wie das geometrische regelmäfsige O. gestaltet (s. Bd. I, pag. 257, Fig. 138 punktirt) ist eine der Grundformen des regulären oder isometrischen Systems.

2. Das quadratische Octaeder. (Die quadratische Pyramide) mit quadratischer Basis *BDEG* (Fig. 138, Bd. I, pag. 257) gehört zu dem tetragonalen, dem quadratischen System und ist eine Grundform desselben. Es hat 8 gleiche gleichschenklige Dreiecke, 8 gleiche Scheitelkanten *AB*, *AD*, *FE*..., 4 gleiche Randkanten *BG*..., 2 gleiche gleichkantige Scheitelecken *A*, *F*; 4 ungleichkantige Randecken, *B*, *D*, *E*, *G*. *AF* zwischen den Scheitelecken ist die Hauptaxe, *BE*, *DG* zwischen den Randecken sind die Nebenaxen. Ist die Hauptaxe länger als die Nebenaxen sind, so heifst das O. ein spitzes, ist sie kleiner, ein stumpfes Octaeder.

3. Das rhombische Octaeder, Orthotyp, gehört zu dem rhombischen, dem orthotypen System und ist eine Grundform desselben. Es hat eine rhombische Basis, 8 congruente ungleichseitige Dreiecke; 12 Kanten, nämlich 4 schärfere und 4 stumpfere Scheitelkanten und 4 gleiche Randkanten. Von den 6 Ecken sind die beiden Scheitelecken gleich, die Randecken sind 2 gleiche spitzere und 2 gleiche stumpfere. Ist die Hauptaxe gröfser als die Nebenaxen, so heifst das O. ein spitzes, ist sie kleiner, ein stumpfes Octaeder.

4. Rectanguläres Octaeder gehört zu dem rhombischen System und ist eine Grundform desselben. Die Basis ist ein Rectangel. Es hat 4 gröfsere und 4 kleinere gleiche gleichschenklige Dreiecke, 12 Kanten, und zwar 8 gleiche Scheitelkanten, 2 kürzere und 2 längere; gleiche Randkanten; 6 Ecken, wovon die beiden

Fig. 849.

Scheitelecken gleich und gleichkantig; die vier Randecken gleich und ungleichkantig sind. Die Hauptaxe verbindet die Scheitelecken.

5. Klinorhombisches Octaeder, 2 und 1 gliedriges O., gehört zu dem klinorhombischen System. Es hat 8 ungleichseitige Dreiecke zu Flächen, von

Fig. 850.

welchen je 4 gegenüberliegende einander gleich sind, nämlich die beiden oberen vorderen mit den beiden unteren hinteren und die beiden unteren vorderen mit den beiden oberen hinteren Flächen. 12

Kanten, die viererlei sind: Nämlich 4 Scheitelkanten AC, von denen je 2 gegenüberliegende gleich sind, 4 gleiche Scheitelkanten BC und 4 gleiche Seitenkanten AB. Die 6 Ecken sind dreierlei, nämlich die beiden dreierlei kantigen Endecken C an den Enden der Hauptaxe, 2 dreierlei kantige Seitenecken A und 2 symmetrische Seitenecken B.

Octaederecken (Kryst.) heifsen die vierflächigen Ecken, so wie Hexaederecken die dreiflächigen (vergl. „Dodekaeder").

Octaedralzahlen, s. u. „Figurirte Zahlen", pag. 101 mit Fig. 639 und 640.

Octangel, Octangulum, s. v. w. „Achteck".

Octant ist der achte Theil einer Kreislinie. Auch wird so jeder Ort des Mondes genannt in der Mitte zwischen den Orten des Vollmonds, des Neumonds und der beiden Viertel.

Octogon, Octogonum, s. v. w. „Achteck".

Octogonalzahlen sind diejenigen Polygonalzahlen, deren Bildung das Achteck zu Grunde liegt. Es verhält sich mit diesen Zahlen wie mit den Dekagonalzahlen und ihre Entstehung ist wie Fig. 556, pag. 252, wenn man Achtecke statt der Zehnecke construirt. Die Zahlenreihe ist

	1 · 8 · 21 · 40 · 65 ..... $n(3n-2)$
1. Differenzenreihe	7 · 13 · 19 · 25 .....
2. Differenzenreihe	6 · 6 · 6 .....

Die Summe der ersten n Octogonalzahlen ist $\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$.

Ocular, s. v. w. „Ocularglas in einem Fernrohr" (s. auch „astronomisches O.").

Oculardiopter ist die dem Auge zugewandte Diopter.

Oelmühle mit Stampfen und Schlägerzeug, wobei Wasser die wirkende Kraft ist.

Annahmen.

1. Die Mühle soll 10 Paar, oder 20 Stück Stampfen haben.

2. Sie soll zweiheblig sein, d. h. für jeden Stampfer sollen sich zwei Daumen auf der Welle befinden, mithin wird die Welle 40 Daumen erhalten.

3. Die Hubhöhe eines jeden Daumens soll wie gewöhnlich 16 bis 17 Zoll betragen.

4. Wird angenommen, dafs immer fünf Stampfen in Bewegung sind.

5. Das Wasserrad sei 16 Fufs hoch.

6. Der eingetauchte Theil der Schaufeln betrage 9 Zoll.

7. In Bezug auf 3 und 4 ist 1 Fufs 8 Zoll = $1\frac{2}{3}$ Fufs eine zweckmäfsige Abmessung für den Theilungshalbmesser der Daumwelle.

Berechnung einiger Dimensionen.

Wie bemerkt sollen 5 Stampfen zugleich auf der Daumwelle hangen, mithin ist ef die Hubhöhe, die zu 1,309' angenommen wird.

Aus der Figur ist ersichtlich, dafs der sechste Daumen bei f angreift, wenn der erste bei e losläfst. Die 40 Daumen werden, wie im Maschinenbau gelehrt wird, nach gewissen Regeln auf dem Mantel der Welle neben einander eingelocht. Den Abstand nimmt man gewöhnlich zu 7 Zoll an.

Der Winkel abc ist = 45°; denn da 40 Daumen in gleichen Entfernungen in der

Fig. 851.

Welle eingelocht werden, so wird die Entfernung von Mitte zu Mitte je zweier Daumen 9° betragen, mithin $\angle abc = 45°$ sein.

Nach Eytelw. Statik §. 282 bezeichnet β den $\angle ebf$, der noch bestimmt werden mufs. Zu dem Ende verhält sich $bf:fe = 1:tg\,\beta$ oder $1\frac{1}{3}':1{,}309' = 1:tg\,\beta$, es ist also $tg\,\beta = \frac{1{,}309}{1\frac{1}{3}} = 0{,}7854 = tg\ 38^\circ\ 8'\ 46''$.

Die schon angegebene Hubhöhe ef ist bekanntlich = dem Bogen $fa = h$.

Demnach $2 \cdot \pi bf = \frac{360^\circ}{45^\circ}\,h$

oder $2 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} = \frac{360^\circ}{45^\circ}\,h = 8h$,

daher $h = 2 \cdot \frac{1\frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7}}{8} = 1{,}309'$

Umgekehrt kann man aus der gegebenen Hubhöhe die Anzahl der Daumen, und den Durchmesser des Theilrisses der Daumenwelle finden.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob es auch zweckmäfsig sei, 5 Stampfen zugleich auf die Welle zu hängen

Nähme man statt 5 nur 4 Stampfen, so wäre in Bezug auf die Figur $\angle abc = 4 \cdot 9^\circ = 36^\circ$, daher $r \cdot arc\ 36^\circ = h$, also $r = \frac{h}{arc\ 36^\circ}$. Da aber schon ein Baum vom Halbmesser $1\frac{1}{3}'$ auf die hier erforderliche Länge selten ist, so ist es nicht rathsam, den Halbmesser noch gröfser anzunehmen. Nimmt man aber 6 statt 5 Stampfen, so ist $abc = 6 \times 9^\circ = 54^\circ$ mithin $r = \frac{h}{arc\ 54^\circ}$.

Es ist also hier $r < \frac{h}{arc\ 45^\circ}$, so dafs die Welle sehr leicht zu schwach werden könnte, und ein Zusammendrehen möglich wäre. Diesem Zufolge ist die angenommene Zahl von 5 Stampfen zweckmäfsig und beizubehalten.

Uebrigens ändert sich der Moment der Last wenig, ob man 4, 5 oder 6 Stampfen annimmt. Denn so wie die Anzahl der Stampfen, die zugleich auf der Welle hangen, zunimmt, nimmt der Theilungshalbmesser der Daumenwelle ab, und umgekehrt. Nur ist die Reibung bei 6 Stampfen etwas gröfser als wie bei 5, und eben so bei 5 gröfser als bei 4 Stampfen.

Bestimmung der im Theilrifs der Daumenwelle erforderliche Kraft.

Die hier zu überwältigenden Widerstände sind dreierlei Art.

1. Der statische Widerstand (Gewicht der Stampfen).

2. Der Reibungswiderstand an den Scheidelatten.

3. Der mechanische Widerstand.

Bestimmung des statischen Widerstandes.

Gewicht des Holzes.

1. Ein Stampfer zu $13\frac{1}{2}$ Fufs lang (gewöhnlich 15 Fufs) 5 Zoll und $5\frac{1}{2}$ Zoll ins Geviert, also $13\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} \times \frac{5\frac{1}{2}}{12} = 2{,}4305$ Cubikfufs.

2. Eine Hubelatte 8 Zoll lang, 5 Zoll □ stark = 0,1158 Cubikfufs.

Summa an Holz für die Stampfer 2,5463 Cubikfufs, daher das Gewicht = $2{,}5463 \times 66 \times 0{,}755 = 126{,}9$ Pfund.

Gewicht des Eisens für einen Stampfer.

Ringe und Nägel etwa	10,66 Pfund
Summa	137,56 Pfund.

Dieses macht für die 5 Stampfen, die zugleich auf der Welle hangen $5 \times 137{,}56 = 687{,}80$ Pfund.

Bestimmung des Reibungswiderstandes.

Wenn f die Kraft bezeichnet, welche am Ende der Hubelatte vertikal aufwärts angebracht, die Reibungen an den Scheidelatten und am Daumen das Gleichgewicht hält, so ist

Fig. 852.

$$f = \mu \frac{2 \cdot b + \mu(c - 2k) + (c - 2\mu a + 2ab) tg\beta}{(1-\mu^2)c + (2k + 2a\, tg\beta\, \mu^2}$$

Es sei nnu

$\mu = \frac{3}{28} = 0{,}107$ (Eicheu auf Eichen)

$b = 8 \text{ Zoll} + \frac{5\frac{1}{4} \text{ Zoll}}{2} = \frac{7}{8}$ Fufs

$c = 7\frac{7}{8}$ Fufs (so grofs wie möglich siehe Statik.)

$k = 1$ Fufs (so klein wie möglich)

$a = 1\frac{3}{8}$ Fufs der Theilungshalbmesser der Welle

$\beta = 38^\circ\, 8'\, 46''$ und $Q = 687{,}80$ Pfund.

Setzt man diese Werthe in obige Formel, so ergiebt sich:

$$f = 50{,}65 \text{ Pfund.}$$

Nur in demjenigen Falle, wo $tg\beta < \frac{b(1-\mu^2) - \mu k}{\mu a}$ findet die Formel III. für f ihre Anwendung; im entgegengesetzten Falle aber die Formel II.

Bestimmung des mechanischen Widerstandes.

Die bewegende Kraft, welche zu der trägen Masse von 5 Stampfen erforderlich, ist

$$P = \frac{S}{gT^2} N$$

In diesem Falle ist $S = 1{,}309$, $N = 687{,}80$ Pfund (5 Stampfen) $g = 15{,}625$ Fufs.

Die Zeit T, die dem durchlaufenen Wege g angehört, ergiebt sich auf folgende Weise:

Es wird angenommen dafs das Wasserrad sich 7mal in einer Minute herumdrehe, so dafs es zu einer Umdrehung $\frac{60}{7} = 8{,}57$ Secunden nöthig hat. Es habe

Fig. 853.

ferner das Stirnrad a 68 Zähne und der Drehling b habe 32 Stöcke, bei einer Theilung von $4\frac{1}{2}$ Zoll. Dann ist $68:1$ Umgang $= 32$ zu der Anzahl der Umläufe des Drehlings $= \frac{68}{32} = 2{,}125$, d. h. der Drehling dreht sich 2,125 mal herum, wenn sich das Wasserrad und mit diesem das Stirnrad einmal herumdreht. Nun aber braucht das Wasserrad 8,57 Sekunden, man hat also die Gleichung

$$1 \cdot 8{,}57 \text{ Sec.} = 2{,}125 \cdot x \text{ Secunden}$$

also $x = \frac{8{,}57}{2{,}125} = 4{,}033$ Secunden,

welche der Drehling, oder die Daumenwelle zu einem Umgange braucht.

Nun verhält sich:

Ein Umgang : 4,033 Sekunden $= \frac{45}{360}$ Umgänge : T und hieraus ist $T = 4{,}033 \cdot \frac{45}{360} = 0{,}504$ Sekunden = die Zeit, welche jeder Daumen vom Angriffe bis zum Loslassen der Hebelatte gebraucht, oder in welcher letztere die Hubhöhe $S = 1{,}309$ Fufs erreicht hat.

Substituirt man diese Werthe in P, so ergibt sich:

$$P = 226{,}83 \text{ Pfund}$$

Die Summe der im Theilrifs der Daumenwelle erforderlichen Kraft zur Bewegung der 5 Stampfen ist also

$= 687{,}8 + 50{,}65 + 226{,}83 = 965{,}28$ Pfd. $= Q$.

Es ist aber noch nicht auf das Schlägelzeug Rücksicht genommen worden, wozu die erforderliche Kraft weiterhin bestimmt werden wird.

Reduktion der Kraft Q auf den Theilrifs des Drehlings.

Es ist hier a der Halbmesser des Drehlings, mithin 32 mal der Theilung des Drehlings $= 2\pi a$ und hieraus

$$a = \frac{32\left(\frac{4\frac{1}{2}}{12}\right)}{2\pi} = \frac{32\left(\frac{4\frac{1}{2}}{12}\right)}{2 \cdot \frac{22}{7}} = 1{,}9 \text{ Fufs}$$

r der Halbmesser des Theilrisses der Welle $= 1\frac{3}{8}$ Fufs.

$\mu = \frac{1}{16}$, ϱ der Halbmesser der Zapfen $= \frac{5}{24}$ Fufs.

$Q = 965{,}28$ Pfund.

M nach einer ungefähren Schätzung $= 6355$ Pfund, d. h. das Gewicht der Daumenwelle nebst Zubehör.

Die Bestimmung der Welle α und β ist hier etwas schwieriger. Es bezeichne a das Stirnrad, II. den Drehling für den

Fig. 854.

Stampfer und 1. den für das Schlägelzeng, welcher Letztere jedoch hier noch aufser Acht gelassen werden kann.

Die Lage der Drehlinge gegen *ac* hängt von Umständen ab, die bei jeder Mühle verschieden sind.

Bei diesem Fall ist der Abstand *bc* = 2¼ Fufs.

Ferner ist $\frac{68\frac{4\frac{1}{2}}{12}}{2\cdot\frac{22}{7}} = 4{,}06$ Fufs des Halbmessers des Stirnrades, also $ab = 4{,}06 + 1{,}91 = 5{,}97$ Fufs.

$$\sin\psi = \frac{bc}{ab} = \frac{2{,}25}{5{,}97} = \sin 22^\circ\ 8'\ 27''$$

Nun ist nach der Figur $\alpha = 3k - \psi = 270^\circ - 22^\circ\ 8'\ 27'' = 247^\circ\ 51'\ 33''$ und $\beta = 90^\circ$.

Setzt man diese Werthe in die gedachte Formel, so kommt:

$$V^2 = 2V\cdot\frac{3072{,}81 - 2{,}99}{3{,}65} + \frac{2588238{,}4 - 23631{,}61}{3{,}65}$$

oder

$$V^2 - 2V\cdot 841{,}04 + 7026{,}32 = 0,$$

also

$$V = 841{,}04 \pm \sqrt{4716{,}28} = 841{,}04 + 68{,}7 = 909{,}74 \text{ Pfund}$$

= der im Theilrisse des Drehlings erforderlichen Kraft zur Bewegung der 5 Stampfen.

Bestimmung der Kraft zur Bewegung des Schlägelzenges.

Beiläufig wird bemerkt, dafs nach Beobachtungen in gut eingerichteten Oelmühlen, die gröfste Abweichung des Schlägels von der Vertikalen zwischen 18° bis 19° fällt. Es ist hier dafür 18° 15′ angenommen.

Das Moment der Kraft wächst mit dem Abweichungswinkel des Schlägels von der Vertikalen, so dafs also für diesen Fall das Moment der Kraft bei 18° 15′ ein Maximum ist. Man wird also, indem man dieses Maximum sucht, sicher gehen und einen Ueberschufs an Kraft erhalten.

Wollte man das Moment von 2 und 2 Graden suchen, und die Summe dieser Momente durch die Anzahl derselben dividiren, so würde man sich unnöthiger Weise in eine weitläufige Rechnung verwickeln, indem doch am Ende das gefundene Resultat dem obigem Maximum gleich gesetzt werden müfste.

Es sind hier wiederum 3 Widerstände in Betracht zu ziehen, und zwar:

1. Der statische Widerstand.
2. Der Reibungswiderstand und endlich
3. Der mechanische Widerstand.

Fig. 855.

Fig. 856.

Bestimmung des statischen Widerstandes.

Die hier folgenden statischen Momente sind auf dem Mittelpunkt der Schlägelwelle als Drehpunkt bezogen, folglich liegen auch die Abstände für die einzelnen Momente in einer durch diesen Mittelpunkt gedachten horizontalen Ebene. Die Summe der Momente auf der linken Seite von der Vertikalen mufs von der Summe der Momente auf der rechten Seite abgezogen werden, weil jene der Kraft zu Hülfe kommen.

Die Momente auf der rechten Seite sind:

1. Vom Schlägel. Dieser ist von Eisen. Das Stielloch kommt in Abzug, es ist 7″ im □. Der Abstand vom Mittelpunkt der Welle bis zum Schwerpunkt des Schlägels ist $15\frac{2}{3}$ Fufs oder eigentlich $15\frac{7}{12}$ Fufs, indem dieser Abstand um 1″ zu lang genommen ist. Bezeichnet nun x die Kraft in Pfunden, die an der Zugstange erforderlich ist, um dem Momente des Schlägels bei 18° 15′ das Gleichgewicht zu halten, so ist: $ab^2 \cdot M = ac\,x$ oder:

$$\left(1\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} - \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12}\right) \tfrac{7}{12} \times 66 \times 7{,}2 \cdot 15\tfrac{7}{12} \times \sin 18^\circ\, 15' = 5{,}5\,(\cos 18^\circ\, 15')$$

also $$x = \frac{1\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{3} - \tfrac{7}{12} \times \tfrac{7}{12} \times 66 \times 7{,}2 \times 15\tfrac{7}{12} \times \sin 18^\circ\, 15'}{5{,}5 \cos 18^\circ\, 15'} = 132{,}371 \text{ Pfund.}$$

2. Vom Schlägelarme. Dessen Schwerpunkt liegt mit dem Stück im Schlägel auf $8\frac{5}{12}$ Fufs vom Mittelpunkt der Welle entfernt. Seine Länge ist $15\frac{1}{3}$ Fufs, Breite und Höhe = 7 Zoll, also $ad \cdot N = ac\,x$

oder $$\frac{8\tfrac{5}{12} \sin 18^\circ\, 15' \cdot 15\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ\, 15'} = 131{,}148 \text{ Pfund.}$$

als erforderliche Kraft an der Zugstange.

3. Von der Schlägelscheere. Hierbei werden, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, die angescheerten Theile für voll gerechnet. Sie ist $6\frac{1}{3}$ Fufs lang, 7 Zoll im □ stark. Ihr Schwerpunkt ist 4 Fufs von der Mitte der Welle entfernt, mithin ist

$$\frac{4 \sin 18^\circ\, 15' \cdot 6\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ\, 15'} = 10{,}786 \text{ Pfund}$$

als erforderliche Kraft an der Zugstange.

4. Von der Schlägelschiene. Ihr Schwerpunkt liegt $\frac{11 + 6\frac{1}{3}}{2} = 8\frac{2}{3}$ Fufs von dem Mittelpunkt der Welle entfernt. Sie ist $9\frac{1}{3}$ Fufs lang, $\frac{2}{3}$ Fufs breit, $\frac{1}{3}$ Fufs stark; es ergibt sich also

$$\frac{8\tfrac{2}{3} \sin 18^\circ\, 15' \cdot 9\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ\, 15'} = 22{,}143 \text{ Pfund.}$$

als erforderliche Kraft an der Zugstange.

Addirt man diese einzelnen Kräfte zusammen, so erhält man die Summe derselben = 297,048 Pfund, welche an der Zugstange angebracht werden müfsten, wenn der Schlägel um 18° 15′ von der Vertikalen abgewichen ist. Es kommen aber noch zuvor die Momente auf der linken Seite in Abrechnung. Diese sind:

1. Von dem Zugarme. Sein Schwerpunkt liegt um $\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4}$ Fufs von der Mitte der Achse entfernt. Er ist $5\frac{1}{2}$ Fufs lang, $\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{12}$ Fufs breit. Demnach ist, wenn x die Kraft bezeichnet, die in dem Abstande von 5,5 $\cos 18° 15'$ vom Drehpunkte angebracht, dem Momente $\left(\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4}\right) \cos 18° 15'$ mal dem Gewichte des Hebelarmes das Gleichgewicht hält, oder:

$$\frac{\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{4} \cos 18° 15' \cdot 5\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18° 15'} = x = 24{,}22 \text{ Pfund.}$$

2. Von der Zugstange. Von dieser kommt nicht das Moment in Betracht, sondern die gesuchte Kraft besteht schon in dem Gewichte der Stange selbst, weil sie vertikal herabhängt, und während der Bewegung des Schlägels keine Winkelbewegung, sondern nur eine Seitenbewegung macht.

Sie ist 11 Fufs lang, $\frac{1}{4}$ Fufs im □ stark und von Tannenholz, mithin ihr Gewicht $= 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 66 \cdot 0{,}725 = 32{,}896$ Pfund.

3. Von der Zuglatte. Mit dieser verhält es sich eben so. Sie ist 8 Zoll lang und $\frac{1}{3}$ Fufs im □ stark, also ihr Gewicht $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 66 \times 0{,}755 = 3{,}69$ Pfund (Eichenholz). Es ist also die Summe der auf der linken Seite wirkenden Kraft = 60,809 Pfund. Man hat also 297,048 − 60,809 = 236,239 Pfund als Kraft, die in dem Augenblicke, wo der Schlägel seinen höchsten Stand erreicht hat, an der Zuglatte erforderlich ist, um dem statischen Momente das Gleichgewicht zu halten.

Bestimmung des Reibungswiderstandes.

Das Gewicht der Schlägelwelle mit Zubehör beträgt:

Für Welle	$[12 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 2(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})\frac{22}{7}]\, 0{,}755 \cdot 66$	= 1423,643	Pfund
„ Schlägelarm	$= 15\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 259,9	„
„ Schlägelscheere	$= 6\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 44,985	„
„ Zugscheere	$= 5\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 38,064	„
„ Scheere	$= 9\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 42,822	„
„ Zugstange	$= 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 66 \cdot 0{,}725$	= 32,896	„
„ Zuglatte	$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 3,691	„
„ Schlägel	$= (\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12})\frac{10}{12} \cdot 66 \cdot 7{,}2$	= 139,71	„
„ Zapfen a 4 Zoll lang 3 Zoll Durchm. incl. Blätter 1 und 1 Zoll stark		= 94,56	„
„ 4 Ringe $1\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{24}$ Fufs stark		= 23,335	„
„ 4 viereckige Ringe neben den Armlöchern	$= 4 \cdot 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24} \cdot 66 \cdot 7{,}2$	= 79,2	„
	Summa	2182,811	Pfund.

Hierzu kommt noch die Kraft, welche dem statischen Widerstande das Gleichgewicht hält, weil sie durch ihre senkrechte Wirkung die Reibung vermehrt. Demnach ist das Gewicht, welches Reibung verursacht = 2182,811 + 236,239 = 2419,049 Pfund, und setzt man die in der Zugstange erforderliche Kraft für das Gleichgewicht mit der Reibung $= f$, so ist $f a \cos \psi = \mu \varrho Q$, also

$$f = \frac{\mu \varrho Q}{a \cos \psi}$$

wo $Q = 2419{,}049$ Pfund, $\varrho = \frac{1}{8}$ Fufs = Halbmesser des Zapfens, $a = 5{,}5$; $\mu = 0{,}1$; $\psi = 18° 15'$ ist. Es ist also

$f = 5{,}789$ Pfund.

Bestimmung des mechanischen Widerstandes.

Die Momente der Trägheit sind:

Fig. 857.

1. Des Schlägels. Wenn man annimmt, dafs die ganze Masse des Schlägels von 139,71 Pfund im Schwerpunkt desselben vereint ist, so hat man

$$\left(\tfrac{3}{4} + 14\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{24}\right)^2 139{,}71 = 34840{,}43 \text{ Pfund}$$

welche Masse in dem Abstande von 1 Fufs von dem Mittelpunkt der Welle ab, sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen würde, als die Masse von 139,71 Pfund im Abstande von $\left(\tfrac{3}{4} + 14\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{24}\right)$ Fufs.

2. Des Schlägelarms Dessen Querschnitt sei f und die ganze Masse sei in der Mittellinie vereinigt, so dafs der Schlägelarm als eine schwere Stange anzusehen ist. Ist nun der Abstand eines beliebigen Punktes des Schlägelarms von der Schlägelwelle $= x$, so ist der Inhalt von der Höhe $\partial x = f \partial x$, also des Gewichts

Fig. 858.

$= f \partial x \, g\gamma$, mithin das Moment der Trägheit $= x^2 f \partial x \, g\gamma$, mithin das Moment des Schlägelarms von der Länge x

$$= fg\gamma \int x^2 \cdot \partial x = fg\gamma \frac{x^3}{3} + C.$$

Für $x = a$ ist das Moment $= 0$, indem das Stück des Schlägelarms, welches in der Welle sitzt, zu letzterer gerechnet wird.

Also $fg\gamma \frac{x^3}{3} + C = 0$

also Const. $= - fg\gamma \frac{a^3}{3}$

mithin das vollständige Moment für die Länge des Arms

$$= x = fg\gamma \left(\frac{x^3 - a^3}{3}\right)$$

und für $x = b$ oder die ganze Länge des Hebelsarmes ist daher das Moment der Trägheit $= fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)$. Nun ist $f = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$ □Fufs; $\gamma = 66$ Pfund, $g = 0{,}755 =$ (spec. Gewicht) $b = 9$ Zoll $+ 14$ Fufs 9 Zoll $+ 7$ Zoll $= 16\frac{1}{12}$ Fufs, $a = \frac{3}{4}$ Fufs,

also $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 23512{,}37$ Pfund.

3. Der Schlägelscheere. Dann kann man wieder die eben gefundene Formel anwenden. Nun ist aber $f = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$; $b = 6\frac{1}{2}$ Fufs $+ \frac{3}{4}$ Fufs $= 7\frac{1}{4}$ Fufs; $a = \frac{3}{4}$ Fufs.

Also $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 878{,}13$ Pfund.

4. Der Zugarme. Da hier $f = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$ □Fufs, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$; $b = 5\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 6\frac{1}{4}$ Fufs, $a = \frac{3}{4}$ Fufs,

so ist $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 562{,}24$ Pfund

5. Der Schlägelschiene. Es sei $dh = x$, $hi = dx$, $dg = a$, $do = b$, $\angle cdA = \varrho$.

Nimmt man in der Schiene AB einen beliebigen Punkt n an, so ist die diesem Punkt angehörige Ordinate $nh = x \, tg \, \varrho$ und wenn $dh = x$ und $hi = nr = dx$ wächst, so ist $\partial x \sec \varrho = nk$,

also $x^3 \, tg \, \varrho^2 \cdot f \cdot \partial x \sec \varrho \, g\gamma =$ dem Momente der Trägheit der Schlägelschiene von der Länge $\partial x \sec \varrho$.

Mithin $fg\gamma \sec \varrho \cdot tg \, \varrho^3 \int x^3 \partial x + C$

$$= fg\gamma \sec \varrho \cdot tg \, \varrho^2 \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$=$ dem Momente von der Länge der Schiene $= mn$.

Für $x = dg = a$ ist aber

$$fg\gamma \sec \varrho \cdot tg \, \varrho^3 \frac{a^3}{3} + C = 0$$

also $C = - fg\gamma \cdot \sec \varrho \cdot tg \, \varrho^3 \frac{a^3}{8}$

Fig. 859.

mithin das vollständige Moment für die Länge der Schiene

$$= fg\gamma \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2 \left(\frac{x^3 - a^3}{3}\right)$$

Für $x = dc = b$ erhält man nun endlich das Moment der ganzen Schiene

$$= fg\gamma \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2 \cdot \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)$$

Es ist aber

$$f = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{32},$$
$$g = 0{,}755,$$
$$\gamma = 66,$$

$$\sin\varrho = \frac{Ap}{Am} = \frac{Ac - ms}{Am} = \frac{11 - 6\tfrac{1}{4}}{7\tfrac{3}{4}} = \frac{4\tfrac{3}{4}}{7\tfrac{3}{4}} = \sin 37^\circ\, 47'\, 36'',$$

also $\varrho = 37^\circ\, 47'\, 36''$. Um a und b zu bestimmen, so verhält sich

$$tp : tm = ms : md \text{ oder } 4\tfrac{3}{4} : 7\tfrac{3}{4} = 6\tfrac{1}{4} : md,$$

woraus $md = \frac{7\tfrac{3}{4} \cdot 6\tfrac{1}{4}}{4\tfrac{3}{4}} = 10{,}2'$ und $dB = md - mB = 10{,}2' - 8'' = 9{,}534'$

mithin $dg = a = dB \cdot \cos\varrho = 9{,}534 \cos \cdot 37^\circ\, 47'\, 36'' = 7{,}53'$.

Ferner ist $Ad \cdot \cos\varrho = dc$ oder $(At + tm + md) \cos\varrho$

oder $(8'' + 7\tfrac{3}{4}' + 10{,}2') \cdot \cos 37^\circ\, 47'\, 36'' = b = 14{,}77'$.

Es ist also $f \cdot g \cdot \gamma \cdot \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 3312{,}63$ Pfund.

6. Die Schlägelwelle.

a, der Theil zwischen den beiden Hälsen ist 18 Fufs lang und 1½ Fufs im □ stark.

In Bezug auf nebenstehende Figur ist $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ die Entfernung des Elements vom Mittelpunkt der Welle.

Setzt man nun die Wellenlänge $= l$, so ist das Gewicht des Elements

$$= \partial\nu \cdot \partial\mu\, l \cdot g \cdot \gamma$$

also das Moment der Trägheit dieses Elements

Fig. 860.

$$= \sqrt{\mu^2 + \nu^2}^{\,2}\, \partial\nu \cdot \partial\mu \cdot l\gamma = (\mu^2 + \nu^2)\, \partial\nu \cdot \partial\mu\, l\gamma = lg\gamma \cdot \partial\mu\, (\mu^2 \cdot \partial\nu + \nu^2 \cdot \partial\nu)$$

Batrachtet man nun zuerst $\partial\mu$ als Const so ist

$$lg\gamma\, \partial\mu \int(\mu^2\, \partial\nu + \nu^2\, \partial\nu) = lg\gamma\, \partial\mu \left(\mu^2 \nu + \frac{\nu^3}{3}\right) + C$$

C ist hier $= 0$, denn für $\nu = 0$ verschwindet der ganze Ausdruck.

Für $\nu = a$ ist obiger Ausdruck

$$= lg\gamma\, \partial\mu \left(\mu^2 a + \frac{a^3}{3}\right)$$

Betrachtet man nun ν als constant, so ergibt sich durch Integration das Moment

$$= lg\,\gamma \frac{\mu^3}{3} a + \frac{a^3 \mu}{3} + C$$

Für $\mu = 0$ verschwindet der ganze Ausdruck, mithin ist $C = 0$.

Für $\mu = a$ erhält man das Moment der Trägheit vom 4ten Theil der Welle

$$= lg\gamma\, \tfrac{2}{3}\, a^4,$$

mithin ist das Moment der ganzen Welle

$$= \frac{8}{3}\, a^4\, l \gamma g.$$

Nun ist $a = \frac{3}{4}$ Fuſs, $l = 12$ Fuſs, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$,

folglich $\frac{8}{3}\, a^4\, l g \gamma = 504{,}50$ Pfund.

In aller Schärfe wäre es auch noch erforderlich, das Moment der Trägheit für die Zapfen, die Halsringe, die Zapfenblätter, die Armringe in der Welle u. s. w. zu bestimmen. Da diese aber gegen die vorher gehabte höchst unbedeutend sind, so kann man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, sie auſser Betracht lassen. Was die beiden Hälse der Welle anbetrifft, welche eine konische Form haben, so kann man diese als Cylinder von mittlerem Durchmesser betrachten. Dann ist das Moment der Trägheit $\frac{1}{2}\,\pi r^4\, l g \gamma$.

Für diesen Fall ist $r = \frac{1}{2}$, $l = 1$ Fuſs, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$, mithin das Moment der Trägheit der beiden Hälse $= 9{,}8$ Pfund.

Die Summe sämmtlicher Momente ist demnach 23620,1 Pfund, welche einem Abstande von 1 Fuſs von der Welle zugehören. Reducirt man diese auf den Bolzen der Zugstange, und bezeichnet die in diesem Abstande erforderliche träge Masse, damit die Beschleunigung der Maschine in allen Theilen dieselbe bleibt mit x, so ist

$$1^2 \cdot 23620{,}1 = (5\tfrac{1}{2})^2 \cdot x$$

also $x = \dfrac{23620{,}1}{(5{,}5)^2} = 2103{,}14$ Pfund.

Hierzu kommt noch die träge Masse der Zugstange und Zuglatte

$= 36{,}58$ Pfund.

Also ist die ganze träge Masse

$= 2139{,}727$ Pfund $= N$.

Bestimmung der bewegenden Kraft P,

welche die träge Masse von 2139,727 Pfund in T Sekunden durch einen Raum von S Fuſs zu führen im Stande ist.

Es wird angenommen, daſs der Drehling für das Schlägelzeug nicht wie der für die Stampfen 32, sondern 40 Stöcke habe. Das Stirnrad erhält, wie schon früher angegeben worden 68 Zähne, aus welchem Grunde die Theilung von $4\frac{1}{2}$ Zoll auch dieselbe bleibt.

Wie schon früher angegeben, dreht sich das Wasserrad, mithin auch das auf der Wasserradwelle befindliche Stirnrad 7mal in 1 Minute = 60 Secunden herum, also einmal in $\frac{60}{7}$ Sekunden. Nun verhält sich bei einerlei Theilung die Zeit eines Umlaufes, wie die Anzahl der Zähne. Bezeichnet also x die Zeit, in welcher der Drehling der Schlägelwelle sich einmal herumdreht, so ist:

$$68 : \tfrac{60}{7}\ \text{Sek.} = 40 : x\ \text{Sekunden}$$

woraus $\qquad x = 5{,}04$ Sekunden.

Der Raum S, welcher die auf dem Bolzen der Zugstange reducirte träge Masse N bei jedem Hube der Zugstange durchlaufen muſs, ist genau genommen gleich dem Bogen cd; dafür kann man dessen Sinus nehmen, und dann ist

$$S = ce = fd \sin 18^\circ 15' = 5{,}5 \sin 18^\circ 15' = 1{,}77'$$

Um nun die Zeit T zu bestimmen, welche zu dem Durchlaufen des Raumes S erforderlich ist, sei der Halbmesser vom Theilrisse der Daumenwelle $= r = 1{,}25$ Fuſs; der Winkel, welcher der Hubhöhe $eb = S$ angehört $= \varrho$, alsdann ist, da die Daumen nach der Kreis-Evolvente construirt sind $r \operatorname{arc} \varrho = eb$ oder $1{,}25 \operatorname{arc} \varrho = 1{,}77$ Fuſs

also $\operatorname{arc} \varrho = \dfrac{1{,}77}{1{,}25} = 81^\circ\ 8'$.

Fig. 861.

Nimmt man nun die Bewegung des Wasser- also auch des Stirnrades durchaus gleichförmig an, so müssen die 360° des Drehlings sich zu der Geschwindigkeit von 5,04 Sekunden, mit welcher er einmal herumläuft verhalten wie der Winkel ϱ zu der Zeit T, welche zu dem Durchlaufen des Raumes $S = eb = \operatorname{arc} \varrho$ erforderlich ist,

oder $360 : 5{,}04 = arc\,\varrho : T$
und daraus ist $T = 1{,}136$ Sekunden.

Dieser Werth für T ist aber zu klein, indem die Geschwindigkeit des Daumens nicht gleichförmig ist, sondern abnimmt, wenn der Winkel (ϱ) zunimmt. Es muſs also, wenn die Geschwindigkeit des Daumens kleiner wird, die Zeit, in welcher es den Weg eb durchläuft, gröſser werden.

Setzt man also diesen Werth von T in Gleichung $P = \frac{S}{g\,T^2}\,N$, so erhält man, da in diesem Falle $N = 2139{,}727$ Pfund, $S = 1{,}77$ Fuſs, $T = 1{,}36$ Sekunden, $g = 15\frac{5}{8}$, P oder die Kraft, welche dem mechanischen Widerstande in Pfunden gleich ist $= 187{,}8$ Pfund zu groſs, indem T zu klein ist.

Näherungsweise ist also im Theilriſs der Daumenwelle eine Kraft erforderlich $=(236{,}239 + 187{,}8) + 5{,}789 = 429{,}828$ Pfund $=$ dem statischen, mechanischen und Reibungswiderstande.

Heiſst diese Kraft V', so ist in Beziehung auf den Theilriſs des Drehlings, wenn man dessen Halbmesser mit a bezeichnet $aV' = r \cdot 429{,}828$

$$\text{oder. } \frac{40 \cdot \frac{44}{12}}{2 \cdot \frac{22}{7}}\, V' = 1{,}25 \cdot 429{,}828$$

$$\text{also ist } V' = \frac{1{,}25 \cdot 429{,}828}{2{,}4'} = 223{,}87 \text{ Pfund}$$

näherungsweise die auf dem Theilriſs des Drehlings reducirte Kraft, wobei die Kraft, die zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Daumen und Zuglatte, und Zahn und Stock erforderlich, ganz auſser Acht gelassen ist, indem V' doch nur näherungsweise bestimmt werden kann.

Bezeichnet nun W' die Geschwindigkeit des Stirurades, wenn das Schlägel- und Stampfwerk beide im Gange sind, $V + V'$ die dazu gehörige Kraft, W aber die Geschwindigkeit, wenn blos das Stampfwerk betrieben wird, und V die dazu gehörige Kraft, so ist im ersten Falle das Moment $= W' \cdot (V + V')$ und im zweiten Falle $= W \cdot V$.

Fig. 862.

Es müſste also, wenn eine gleiche Geschwindigkeit stets stattfände

$W \cdot V = W'(V + V')$ sein,

woraus $W : W' = V + V' : V$

oder $W : W' = 909{,}74 + 223{,}87 : 909{,}74$
$= 1133{,}61 : 909{,}74$

woraus $W' = \frac{909{,}74}{1133{,}61} \cdot W = 0{,}803\ W$

Bezeichnet nun ferner v' die Geschwindigkeit des Theilrisses der Daumenwelle, wenn der Daumen arbeitet, hingegen v die Geschwindigkeit, wenn der Daumen nicht arbeitet; so ist klar, daſs W' eben so oft in W enthalten sein muſs, als v' in v und daher $v : v' = W : W'$ oder $v : v' = W : 0{,}803\ W$ oder $v : v' = 1 : 0{,}803$ woraus näherungsweise ebenfalls $v' = 0{,}803\ v$.

Ist ferner t die Zeit, in welcher der Daumen während einer Umdrehung arbeitet, und t' die Zeit, in welcher er während einer Umdrehung nicht arbeitet, so ist v' der Zeit t und der Zeit t' zugehörig, und man hat

$360 : 2\pi r = \varrho : tv' = \varrho : arc\,\varrho$,

weil $arc\,\varrho = tv'$ ist,

$$\text{also ist} \quad t = \frac{\frac{\varrho}{360} \cdot 2r\pi}{v'} = \frac{\frac{81^\circ\,8'}{360} \cdot 2 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{22}{7}}{0{,}803\ v} = \frac{1{,}777}{0{,}803\ v}$$

Eben so ist $360 : 360 - \varrho = 2\pi r : t'v$

oder $360^\circ : 360^\circ - 81^\circ\,8' = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{22}{7} : t'v$

woraus $t' = \frac{6{,}084}{v}$

Nun verrichtet aber der Drehling in 5,04 Sekunden einen Umgang, daher ist

auch $t + t' = 5{,}04$

mithin $5{,}04 = \frac{1{,}777}{0{,}8030} + \frac{6{,}084}{v}$

also $v = \frac{2{,}204 + 6{,}048}{5{,}04} = 1{,}644'$

und $v' = 0{,}8030 = 0{,}803 \cdot 1{,}644 = 1{,}320'$

Hieraus geht nun hervor, daſs $v'T = S$ = der Hubhöhe oder dem Wege ist, in welchem der Daumen arbeitet, mithin ist auch $v(5{,}04 - T)$ der Weg, in welchem der Daumen nicht arbeitet; beide Wellen zusammengenommen müssen aber der Länge des Theilrisses der Welle gleich sein, mithin hat man

$$v'T + v(5{,}04 - T) = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \tfrac{22}{7}$$

oder

$$1{,}320 \cdot T + 1{,}644\,(5{,}04 - T) = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \tfrac{22}{7},$$

woraus T, als zweiter Näherungswerth = 1,325 Sekunden.

Setzt man diesen Werth von T mit Beibehaltung der übrigen Werthe in die Formel $P = \frac{S}{g\,T^2}\,N$, so ergibt sich ein zweiter Näherungswerth für die bewegende Kraft $P = 138{,}06$ Pfund, der aber zu klein, weil T zu groſs ist.

Hiernach ist also die Kraft, welche näherungsweise im Theilriſs der Welle erforderlich ist

$$= 236{,}239 + 138{,}06 = 380{,}088 \text{ Pfund.}$$

Diese wie oben auf den Theilriſs des Drehlings reducirt, gibt

$$V' = \frac{380{,}088 \cdot 1{,}25}{2{,}4} = 197{,}96 \text{ Pfund.}$$

Man hat also wiederum

$$W : W' = V' + V : V$$

oder $W : W' = 197{,}96 + 909{,}74 : 909{,}74$

oder $W : W' = 1107{,}70 : 909{,}74$

woraus $W' = \frac{909{,}74}{1107{,}70}\,W = 0{,}821\,W$

auch haben wiederum t, t', v und v' dieselben Bezeichnungen von vorher und

daher $v : v' = W : W'$

oder $v : v' = W : 0{,}821\,W$

also ist näherungsweise

$$v' = 0{,}821\,v$$

ferner $360 : 2\pi r = \varrho : tv'$

woraus
$$t = \frac{2\pi r \cdot \varrho}{360 \cdot v'} = \frac{2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1{,}25\,(81^\circ\,8')}{360 \cdot 0{,}821\,v} = \frac{2{,}165}{v}$$

und $360 : 360 - 81^\circ\,8' = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1 \cdot 25 : t'v$

woraus $t' = \frac{(278^\circ\,52') \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1{,}25}{360 \cdot v} = \frac{6{,}084}{v}$

Da nun $t + t' = 5{,}04$ Sekunden sein muſs, so ist auch

$$5{,}04 = \frac{6{,}084}{v} + \frac{2{,}165}{v}$$

also $v = \frac{6{,}084 + 2{,}165}{5{,}04} = 1{,}636$ Fuſs

als zweiter und zwar kleinerer Näherungswerth weil der erste $v = 1{,}644'$ gefunden wurde.

Der erste Näherungswerth für v war

$$= 0{,}803 \cdot v = 0{,}803 \cdot 1{,}644$$

der zweite Näherungswerth ist aber

$$= 0{,}821 \cdot v = 0{,}821 \cdot 1{,}636$$

Da nun $0{,}821 \cdot 1{,}636 > 0{,}803 \cdot 1{,}644$, so ist auch der zweite Näherungswerth für $v' >$ als der erste, also die dazu gehörige Zeit oder der dritte Näherungswerth von T kleiner. Diesen findet man, wenn man auf dieselbe Weise wie vorher verfährt = 1,324 Sekunden, welche dem zweiten Werthe von $T = 1{,}325$, aber beinahe gleich ist.

Setzt man also $T = 1{,}324$ in die Gleichung $P = \frac{S}{g\,T^2}\,N$, so erhält man $P = 138{,}168$ Pfund als dritter Näherungswerth der bewegenden Kraft.

Behält man diese etwas zu groſse Kraft bei, so erhält man

$236{,}239 + 138{,}168 + 5{,}789 = 380{,}196$ Pfd. $= V'$

als Kraft, welche in der Zuglatte dem statischen, mechanischen und Reibungswiderstande gleich ist.

Zur Ueberwältigung dieser Kraft, oder was einerlei ist, dieses Widerstandes, und der Reibung zwischen Daumen und Zuglatte ist nach Eytelw. Stat. §. 282 eine

Fig. 863.

Kraft in dem Theilrifs der Daumenwelle erforderlich.

$$V = (1 + \mu \, tg \, \beta) \, V'$$

Für diesen Fall ist $tg \, \beta = \frac{1,77}{1,25} = 54^\circ \, 1' \, 50''$,

$V' = 380,96$ Pfund, $\mu = \frac{1}{14} = 0,07$.

Daher $V = 416,87$ Pfund.

Reducirt man nun diese im Theilrifs der Daumenwelle erforderliche Kraft auf den Theilrifs des Drehlings, so ist nach Eytelw. Statik §. 238

$$V^2 - 2V \frac{arc \, Q + \mu^2 \varrho^2 [Q \cos(\beta - \alpha) + M \sin \alpha]}{a^2 - \mu^2 \varrho^2} + \frac{r^2 Q^2 - \mu^2 \varrho^2 (Q^2 + M^2 + 2 \, QM \sin \beta)}{a^2 - \mu^2 \varrho^2} = 0$$

Für diesen Fall ist nun $a = 2,4 =$ dem Halbmesser vom Theilrifs des Drehlings, $r = 1,25 =$ dem Halbmesser der Daumenwelle, V, oder für die Formel $Q = 416,87$ Pfd., $\mu = \frac{1}{16}$, $\varrho = \frac{1}{8} =$ dem Halbmesser der Zapfen, $M =$ dem Gewicht der Welle nebst Zubehör $= 902,47$ Pfund. Es ist nämlich:

1. Das Gewicht des Holzes.

1. Welle 8 Fufs lang, 1 Fufs stark . . . . $= 6,285$ Cubfufs.

2. Drehlingskränze $2\frac{1}{2}$ Fufs Halbmesser auswendig, $1\frac{7}{8}$ Fufs inwendig, und $\frac{1}{3}$ Fufs stark, 2 Fufs breit $= (2\frac{1}{2}^2 - 1\frac{7}{8}^2) \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2$ . . . $= 6,053$ „

3. 8 Arme, à $1\frac{1}{2}$ Fufs lang, $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{3}$ Fufs stark $= 8 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3}$ $= 1,666$ „

4. 40 Stöcke $1\frac{1}{2}$ Fufs lang, $\frac{3}{32}$ im Radius $= 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{22}{7}$ . . $= 1,717$ „

5. 1 Zugdaumen, im Durchschnitt $\frac{3}{4}$ Fufs lang, $\frac{5}{12}$ Fufs im □ stark $= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$ . . . . $= 0,130$ „

Summa 15,851 Cubfufs.

Das Gewicht davon ist $= 15,851 \cdot 0,755 \cdot 66 = 789,85$ Pfund.

2. Das Gewicht des Eisens.

1. 4 Ringe $= 4 \cdot 1 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24}$ . . . . $= 0,065$ Cubfufs.

2. 2 Zapfen $= 2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{22}{7} + \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{32}$ . . . . $= 0,172$ „

Summa $= 0,237$ „

also das Gewicht $= 0,237 \cdot 66 \cdot 7,2 = 112,62$ Pfund, mithin der obige Werth für $M = 902,47$ Pfund.

Um nun ferner α und β zu bestimmen, so ist $ki \sin \varrho = km$. Es ist aber km die Entfernung des Mittelpunktes des Drehlings von dem Mittelpunkte des Stirnrades $= 2,25$ Fufs festgesetzt. Ferner ist

$$ki = kl + li = 4,06 + 2,4 = 6,46$$

also $\sin \varrho = \frac{km}{ki} = \frac{2,25}{6,46}$ also $\varrho = 20^\circ \, 23'$.

Mithin $\alpha = mnl = 180^\circ - inl = 180^\circ - (90 - \varrho) = 90^\circ + \varrho = 90^\circ + 20^\circ \, 23' = 110^\circ \, 23'$,
$\beta = 270^\circ$.

Opposition (Astr.), s. u. „Conjunction und Aspecten“.

Ordinaten sind gerade Linien als Längen zu Bestimmung der verschiedenen Punkte einer krummen Linie oder Fläche, mit welchen diese selbst bestimmt werden. Die Ordinaten sind also zuerst selbst ihrer Lage nach zu bestimmen, und dies geschieht durch einen gegebenen festen Punkt, eine durch diesen Punkt gerichtete gerade Linie und Winkel zwischen dieser Linie und den Ordinaten. Das nähere Bestimmungsstück der Ordinaten heifst Abscisse, Abscisse und Ordinaten heifsen Coordinaten.

Werden nun von dem gegebenen Punkt als Anfangspunkt ab auf der durch ihn liegenden Linie in Abständen Punkte genommen und von diesen Punkten die Ordinaten unter dem constant bleibenden Winkel, also parallel unter einander nach den zu bestimmenden Curven gezogen, so ist die Linie mit den fortschreitenden Abständen die Abscisse und das Coordinatensystem heifst das der Parallel-Coordinaten.

Bleibt aber der Anfangspunkt auch als Fufspunkt der Coordinaten derselbe und werden die Ordinaten unter verschiedenen Winkeln mit der gegebenen durch

den Punkt gehenden Linie radical gezogen, so ist dies System des der Polarcoordinaten. Der feste Punkt heifst der Pol, die constante durch den Pol gehende Linie die Polaraxe und die verschieden genommenen Winkel sind die Polarabscissen. Das Nähere hierüber s. in den Art. „Abscisse, Coordinaten, Coordinatenaxen, Coordinatengleichung.

Ordnungen krummer Linien, s. den Art. „Curven“, Einleitung pag. 161 und No. 4, pag. 162.

Organische Beschreibung einer krummen Linie ist die Verzeichnung der Curve im stetigen Zuge mit Hülfe eines Instruments, wie mit dem Zirkel die Kreislinie beschrieben wird. Die Cycloide, die Epicycloide und die Hypocycloide werden bei ihrer Construction durch die Umwälzung des Erzeugungskreises im stetigen Zuge verzeichnet. Auf ähnliche Weise lassen sich auch andere Curven construiren. Die stetige Verzeichnung der Ellipse aus den Brennpunkten gibt Bd. I, pag. 418 mit Fig. 256; Bd. III, pag. 45 mit Fig. 611 zeigt eine zweite stetig mögliche Verzeichnung blofs mit Hülfe der beiden gegebenen halben Axen.

1. In dem Art. „Ellipse“, pag. 42 hat man in Fig. 609 den Halbkreis $AHT'B$ und es ist nach No. 13, pag. 45:

$$AC : CD = HJ : FJ$$

Dieser Proportion gemäfs ist ein einfaches Instrument zu stetiger Verzeichnung der Ellipse erfunden worden:

HG und HJ sind zwei gleich lange Lineale, beide zusammen gleich der halben Summe $(a+c)$ beider Axen. Das Lineal GH hat eine Spitze zum festen Einstich in die feste Linie AB, das Lineal HJ eine Abrundung zum Verschieben, beide Lineale sind in H mit einem Charnier drehbar befestigt.

Fig. 864.

Nimmt man nun die Länge $JK =$ der halben kleinen Axe c, also $GH + HK =$ der halben grofsen Axe $= a$, so geschieht mit der Fortschreitung des Endes J auf der Linie AB durch einen in K befindlichen Stift die Zeichnung der Ellipse.

Denn macht man $HL =$ der Verlängerung $HM = HK$, so ist $LM = 2HK$, folglich K ein Punkt in dem über LM beschriebenen Halbkreise; folglich $\angle MKL = R$.

Nun ist $HG = HJ$
$HL = HK$

folglich $LG = KJ$ und $LK \# GJ$

Verlängert man daher MK bis N, so ist auch $\angle KNJ = R$, also MNG ein Winkel im Halbkreise und M beschreibt um den Punkt G bei der Umdrehung von A nach B einen Halbkreis mit dem Halbmesser $GM =$ der halben grofsen Axe a, während KN für jeden Punkt von M die rechtwinklige Ordinate einer Ellipse von der halben kleinen Axe $JK = c$ und der halben grofsen Axe $GM = a$ ist.

Denn es ist $GM : GL = MN : KN$
oder in Fig. 609 $AC : CD = HJ : FJ$.

2. Bd. III, pag. 265, Fig. 718 zeigt den Durchschnitt einer Hyperbel. M ist der Mittelpunkt, ME die halbe Hauptaxe a, EN die halbe Nebenaxe c, ML die obere Asymptote, $MZ = NZ$, also EZ die Richtung und $\#$ der unteren Asymptote MS; Mv eine beliebige Länge, $DV \# EZ$.

Nun ist pag. 270, No. 18 nachgewiesen, dafs $MV \times DV = MZ \times EZ$ und dieser Satz hat das Mittel zu folgendem Verfahren für stetiges Verzeichnen der Hyperbel gegeben.

Nimmt man für die zu verzeichnende Hyperbel eine gerade Linie MJ zur Richtung der Hauptaxe, M als Mittelpunkt, $ME =$ der halben Hauptaxe a, also E zum Scheitel, das Loth EN zur halben Nebenaxe c, so hat man die durch MN gezogene gerade Linie ML als obere Asymptote. Halbirt man nun MN in Z, zieht EZ, so ist EZ mit der Richtung der unteren Asymptote MS parallel. Nimmt man nun ein Lineal von irgend einer Breite VW, deren vordere Schiebekante in LM, und markirt auf dieser eine Länge $VL = MZ$; ferner ein zweites Lineal, dessen vordere Schiebekante nach LE gerichtet ist, und befestigt dies mit dem ersten Lineal in dem markirten Punkt L durch ein Charnier drehbar, so ist der Zeichenapparat fertig. Denn verschiebt man das erste Lineal mit dem Punkt L

Fig. 865.

nach LM abwärts und läfst das zweite Lineal immer durch den Punkt E gehen, was sehr leicht ist, wenn man in M und E dünne Stifte einsteckt, so beschreibt der Durchschnittspunkt D beider Linealkanten die Hyperbelpunkte (wie D, D', D^2, E).

Denn es ist $LZ : LV = EZ : dV$

und da $LV = MZ$

auch $LZ : MZ = EZ : dV$

oder $MV : MZ = EZ : dV$

woraus $MV \times DV = MZ \times EZ$.

3. In dem Art. „Brennpunkt der Parabel", pag. 417, No. 6 und 7 mit Fig. 254 und 255 sind zwei Constructionen der Parabel angegeben, aber keine stetig zu machende Zeichnung. Dagegen gibt der Satz 4, pag. 417 das Mittel dazu. Nimmt man nämlich (Fig 253) ein Winkelmaafs $B'NK$, befestigt an der Linealkante NK in einem nach K hin gelegenen Punkt einen Faden von der Länge KN, wenn K selbst der Befestigungspunkt ist, den zweiten Endpunkt aber in dem Brennpunkt B, schiebt das Winkelmaafs längs der Directrice $B'N$ von der Axe $B'F$ ab in die Höhe und hält zwischen Faden und Linealkante NK einen Stift, so beschreibt dieser die Parabel. Denn in jeder Lage des Winkelmaafses ist der Stift in der Spitze J eines Winkels wie $\angle BJK$, so dafs der Brennstrahl BJ immer $= JN = DB' = x + \frac{1}{4}p$ verbleibt.

Orientirboussole ist ein Hülfsinstrument zu Orientirung eines Mefstisches nach dem magnetischen Meridian, welches besonders nothwendig ist, wenn die Mefstischaufnahme mit einer gröfseren Vermessung, bei welcher die Bonssole angewendet worden, Zusammenhang hat. Sie besteht in einer etwa 4 bis 5 Zoll langen möglichst empfindlichen Magnetnadel, die mit ihrem Agathütchen auf einer Stahlspitze sich bewegt und arretirt werden kann. Diese befindet sich in einem Kästchen von etwa 6 Zoll Länge, 4 Zoll Breite. Die Richtung, welche die Magnetnadel annehmen soll, ist auf dem Boden des Kastens mit scharfer und deutlicher Linie markirt und mit Nord und Süd bezeichnet und zwar so, dafs sie unmittelbar durch Zeichenpunkte auf die Mefstischplatte übertragen werden kann. Man setzt nun das Kästchen auf den Mefstisch und dreht es so lange bis die Magnetnadel über diese Linie einspielt und darin verbleibt, wo dann die unmittelbare Verzeichnung auf der Mefstischplatte geschieht.

Orientirung eines grofsen Dreiecksnetzes. Hierunter versteht man die Auftragung auf dem Papier einer sehr genau gefertigten gröfseren Vermessung von einander anschliefsenden grofsen Dreiecken mit Hülfe nur einer oder zweien direct vermessenen Standlinien und möglichst genauer und einander berichtigender Winkelaufnahmen. Es wird also vorausgesetzt, dafs die grofsen Seiten der Dreiecke und zur gegenseitigen Berichtigung deren Diagonalen sowie Verbindungslinien mit anderen Dreiecken trigonometrisch berechnet und kleinere sich erwiesene Differenzen ausgeglichen worden.

Wollte man nun diese berechneten Dreiecke, so wie sie aneinander liegen, successive auch auf der Zeichnung aneinander reihen, so würde jeder einzelne aus der Stärke der Punkte und der Breite der Bleistiftlinien von einer Dreieckslinie auf die andere sich übertragen und man läuft Gefahr, ein nicht ganz richtiges, oder wie man auch sagt, ein verschobenes Netz auf dem Papier zu erhalten.

Man vermeidet diesen Uebelstand, wenn man jeden einzelnen Punkt unabhängig von jedem anderen auftragen kann und erreicht dies durch Abscissen und Ordinaten, wenn man zu der ersten eine Linie wählt, welche zwei Hauptdreieckspunkte des Netzes mit einander verbindet, oder dafs man schon Anfangs die Basis in ihrer Lage zu einer Abscisse geeignet nimmt, die dann auf dem Papier nach beiden Seiten hin verlängert wird. Ordinaten daraus sind dann die von den

trigonometrisch festgestellten Dreieckspunkten auf die Abscisse gefällten Lothe.

Jedenfalls kann man die Abscissenlinie durch einen der festgestellten Dreieckspunkte legen. Wenn die Vermessung eine Gradvermessung ist (s. d), so mufs die Abscisse der Arbeitsersparung und der Sicherheit wegen eine Mittagslinie sein und man wählt den einen der Anfangspunkte der Vermessung so, dafs durch diesen die Mittagslinie genommen werden kann.

Es sind also sämmtliche hier verzeichnete Dreiecksseiten in ihren Längen bekannt. Nun sei XX' die durch einen Dreieckspunkt A gedachte Abscisse, so wird diese möglichst lang auf dem Felde abgesteckt, in möglichst weiter Ferne mit einem Signal bezeichnet und der $\angle BAX$, womöglich noch ein zweiter Winkel, z. B. FAX' oder GAX' vermessen.

Fig. 866.

Mit Hülfe von AB erhält man die Abstände Ab und Bb.

Aus AB, AF, BF ist schon berechnet der $\angle BAF$, dieser $+ \angle BAX$ ist $\angle FAX$ und $\angle FAX' = 180° - \angle FAX$, woraus mit Hülfe von AF gefunden werden die Abstände Af und Ff.

Aus AF, AG, GF hat man berechnet $\angle FAG$; hiervon $\angle FAX'$ gibt $\angle GAX'$ und man erhält mit Hülfe von AG die Abstände Ag und Gg. Man sieht hieraus, dafs die Berechnung der Abscissen und der Ordinaten aller einzelnen Punkte nur mit Hülfe rechtwinkliger Dreiecke geschehen und es ist gewonnen, dafs jeder einzelne Dreieckspunkt unabhängig von jedem anderen aufs Papier gebracht wird.

Ort, absoluter, ist ein Ort ohne Beziehung auf einen anderen. Euler versteht darunter den Ort, welchen ein Körper in dem unendlichen Weltraum einnimmt, und wenn er denselben verläfst, so ist er in absoluter Bewegung. Hutton sagt: die absolute Bewegung besteht in der Veränderung des einen Orts und dem Uebergang in einen anderen, wenn man sowohl diesen als jenen absolut und ohne ihr Verhältnifs (Relation) zu einem dritten Ort betrachtet.

Ort, astronomischer, s. den Art. „Astronomischer Ort" pag. 155.

Ort, geocentrischer, ist ein Ort, ein Punkt am Himmel, wo er aus dem Mittelpunkt der Erde betrachtet dem Auge erscheinen würde, im Gegensatz von heliocentrischen Ort, wo er dem im Mittelpunkt der Sonne befindlichen Beobachter erscheinen würde (s. den Art. „Geocentrisch" mit Fig. 656, Bd. III, pag. 143). Bei Fixsternen fällt wegen deren unmefsbaren Entfernung von unsrem Sonnensystem der geocentrische Ort mit dem heliocentrischen zusammen; bei Planeten ist der Unterschied sehr bemerkbar. Der auf der Erdoberfläche beobachtete Ort ist auch noch nicht der richtige, er mufs noch mit Hülfe der Parallaxe corrigirt werden, wie dies in dem Art. „Höhenparallaxe", pag. 251 mit Fig. 709 erklärt ist.

Ort, geometrischer, ist in Art „Geometrischer Ort" mit Beispielen erklärt. Es soll noch hinzugefügt werden, dafs die Aufgabe: den geometrischen Ort für Dreiecke von einerlei Grundlinie und gleichen Winkeln an der Spitze, welcher eine Kreislinie ist auf folgende Art ausdrückt: Es sind zwei Punkte gegeben, von welchen aus zwei unter einem bestimmten Winkel sich schneidende gerade Linien gezogen werden sollen. Der geometrische Ort ist eine Kreislinie oder vielmehr eine Kugeloberfläche. Um deren Mittelpunkt zu finden verbindet man beide Punkte durch eine gerade Linie, halbirt diese, errichtet in dem Halbirungspunkt auf derselben ein Loth, trägt an einem beliebigen Punkt des Loths an dieses den gegebenen Winkel und zieht mit dem zweiten Schenkel durch den dahin gerichteten der gegebenen Punkte eine Parallele, so ist deren Durchschnittspunkt der Mittelpunkt. Denn es ist der Peri-

pheriewinkel als halber Centriwinkel abgetragen.

Es gibt sehr viele Aufgaben über den geometrischen Ort nnd solche, die nnr algebraisch sn lösen sind. Man hat hierbei immer weniger Gleichungen als Bestimmungsstücke und somit die Auflösung von diophantischen Aufgaben, in deren Resultat noch Unbekannte sind, aus deren Znsammenhang mit den Bekannten dann die Construction des geometrischen Orts ermittelt wird.

Es erfolgt hier noch eins interessante nnd nicht schwierig zu lösende Anfgabe nsbst dem Beweise für die Richtigkeit.

Den geometrischen Ort für Dreiecke zu finden, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben nnd deren beide andere Seiten in einem gegobenen Verhältnifs stehen.

Es sei ABC das Dreieck, AC die constante Grundlinie. Man findet den geometrischen Ort in einem Kreise, wenn man nämlich AB bis D verlängert, so dafs $BD = BC$, man zieht DC und aus B die Parallele BE mit DC, so liegt der Mittelpnnkt des Kreises in der verlängerten AC nnd B, E sind Pnnkte dessen Kreisnmfangs.

Fig. 867.

Denn ist F dieser Mittelpunkt und sind FB, FC Radien des Kreises, so ist, weil $CD \ddagger BE$

$$\angle BCD = \angle ABE$$

aber $\angle BEF = \angle BAF + \angle ABE$

nnd $\angle BEF = \angle EBF$

folglich $\angle EBF = \angle BAC + \angle BCD$
$= \angle BAF + \angle CBE$

Also $\angle CBE + \angle CBF = \angle BAF + \angle CBE$

oder $\angle CBF = \angle BAF$

Hieraus ist $\triangle CBF \sim \triangle BAF$

folglich $AB : AF = BC : BF$

oder $AB : BC = AF : EF$

Die beiden Linien AF, EF haben also das Vsrhältnifs $AB : BC$, d. h. das Verhältnifs zweier von den festen Pnnkten A nnd C nach dem Kreisnmfang gezogenen Linien. Da nun die Linien AF, EF constant sind, so ist auch das Verhältnifs aller von A nnd C nach dem Kreisnmfang gezogenen Linienpaare dasselbe constante Verhältnifs.

Ort, heliocentrischer, ist der Ort am Himmel wo ein Planet, von dem Mittelpnnkt der Sonne aus betrachtet, dem Auge zn sein erscheinen würde (vergl. „Ort, geocentrischer“).

Ort, optischer, ist der Ort einer Flächs, auf den das Auge einen vor derselben befindlichen Gegenstand projicirt.

Ort, scheinbarer, ist der Ort, in den das Auge einen gesehenen Gegenstand dem Urtheil nach versetzt.

Ort eines Planeten. Dieser ist geocentrisch oder heliocentrisch. Dsr erstere ist scheinbarer Ort, wie er von dem scheinbaren Horizont ans, wahrer Ort, wenn er von dem wahren Horizont aus beobachtet gedacht; mittler Ort eines Planeten, s. den Art. „Ein redncirter Ort“ ist der auf die Ekliptik projicirte wahre Ort des Gestirns.

Man denke sich einen Planeten P in einer concentrischen Bahn nm die Sonne S mit der Erde E in gleicher Umlanfsrichtung sich bewegen, dessen Bahn aber gegen die Ekliptik geneigt ist, nnd man verbinde die 3 Weltkörper dnrch gerade Linien zu einem Dreieck, so zeigt die

Fig. 868.

gerade Gesichtslinie SP von der Sonne zu dem Planeten an der scheiubaren hohlen Himmelskngel den heliocentrischen Ort P, nnd dis Gesichtslinie EP von der Erde zu demselben an der scheinbaren hohlen Himmelskugel dsn geocen-

trischen Ort P_1 des Planeten, und der $\angle EPS$ ist der Unterschied zwischen beiden Orten an der hohlen Himmelskugel.

Der Artikel „Anomalie" zeigt, wie man den heliocentrischen Ort eines in seiner Bahn bekannten Planeten für jeden Augenblick seines Laufs finden kann. Man kennt nämlich die Zeit, in welcher er von seinem Perihel, oder auch von dem Knoten K mit unserer Ekliptik ab bis zu einem bestimmten Zeitpunkt zugebracht hat; beträgt diese Zeit m Tage und ist seine siderische Umlaufszeit n Tage, so ist seine mittlere Anomalie = $\frac{m}{n}$ mal seiner Umlaufsbahn. Nun lehrt der Art. „Anomalie" die wahre Anomalie oder den wirklichen heliocentrischen Ort des Planeten aus der mittleren Anomalie ableiten und hiernach den Radiusvector SP in seiner Länge bestimmen.

Der auf der Erde befindliche Beobachter will aber wissen, wo er in diesem Augenblick den Planet P von der Erde E aus findet, er will den geocentrischen Ort P_1 desselben kennen lernen. Um dies mit Hülfe des heliocentrischen Orts P, zu erreichen, reducirt er den Planeten P auf die Ekliptik in p, um diesen Punkt in Länge und Breite angeben zu können. Demnach fällt er aus P einen lothrechten Bogen Pp auf die Ekliptik und erhält in dem Fufspunkt p desselben den reducirten Ort p.

Ist nun PK der Bogen der Planetenbahn vom Planeten P bis zum Knoten K derselben mit der Ekliptik pK, Pp das

Fig. 869.

gefällte Loth, also der Breitenkreisbogen von P, so ist der Neigungswinkel PKp beider Bahnen jederzeit gegeben, desgleichen der Ort des Knotens K und man erhält in dem bei p rechtwinkligen sphärischen $\triangle PKp$:

$$tg\ Kp = tg\ KP \sin K$$

Es ist mithin der Knotenabstand Kp des reducirten Orts durch den Knotenabstand KP des Planeten und den Neigungswinkel K der Planetenbahn mit der Ekliptik bestimmt.

Ferner hat man in demselben Dreieck

$$\sin Pp = \sin KP \cdot \sin K$$

womit der Breitenbogen Pp bestimmt ist, und mit beiden Bestimmungen der reducirte Ort p des Planeten. Durch die bekannten Längen PS, Pp und den rechten $\angle PpS$ hat man auch den reducirten Radiusvector pS. Nun ist $\angle pSE$ = dem Unterschied der heliocentrischen Länge von p und E, folglich aus 2 Seiten pS, ES und dem eingeschlossenen $\angle pSE$ die Elongation $\angle SEp$ bekannt, womit der reducirte geocentrische Ort p und durch pP auch der wirkliche geocentrische Ort des Planeten P gefunden ist.

Orthobasisch (Kryst.) ist die rechtwinklige Lage der Basis gegen die Axe des Krystalls.

Orthogon, s. v. w. „rechtwinklig".

Orthographische Projectionen sind rechtwinklige P.

Ortsänderung ist Bewegung (s. d.). Jede Ortsänderung ist entweder wirklich oder scheinbar. Ohne eine wirkliche O. findet keine scheinbare statt. Die scheinbare O. beruht auf Augentäuschung, indem entweder das Object ruht und das Auge sich bewegt, oder indem beide in verschiedenen Richtungen sich bewegen. Bewegen sich Auge und Object parallel gleichgerichtet und mit gleicher Geschwindigkeit, so ist das Object in scheinbarer Ruhe. Reiter und Pferd, Schiff und Schiffer sind in relativer Ruhe, obgleich sie gemeinschaftlich in Bewegung sind. Fixsterne sind in relativer Ruhe aber gemeinschaftlich in einerlei scheinbaren Bewegung.

Bewegt sich ein Körper durch die Punkte a, b, c, d, e, f, g, das Auge zugleich durch die Punkte A, B, C, D, E, F, G, so erhält es den Ort des Körpers für seinen

Fig. 870.

Ort B durch die mit Bb aus A parallel und gleich lang gezogene Linie $A\beta$ in β; den Ort des Körpers für seinen Ort C in γ wenn $A\gamma =$ und $\ddagger$ Cc gezogen wird. Die ganze scheinbare Bewegung des Körpers wird durch den punktirten Kreis angegeben.

Ortsbestimmung ist die Bestimmung der Lage von Hauptörtern gröfserer Landflächen und des ganzen Landes, wenn eine Vermessung darüber sich erstrecken soll. Sie ist das erste Unternehmen bei beabsichtigter Landesvermessung und wird die geographische Ortsbestimmung genannt. Sie besteht in der Ermittelung der Länge und Breite jeder einzelnen Stadt in Beziehung auf einen ausgezeichneten weit bemerkbaren Punkt derselben, welches nur auf astronomischem Wege geschehen kann. Astronomisch-geographische Ortsbestimmung hierauf in der den Vermessungsresultaten gemäfsen Verbindung dieser Hauptorte unter einander und mit den nächsten der angrenzenden Länder. An diese Hauptorte werden dann die zwischen liegenden Städte und Dörfer durch Messung einiger Basen und Triangulirung der Winkel in grofsen Dreiecken angeschlossen. Ueber die Vermessung dieser Dreiecke, dem Auftragen derselben s. die Art. „Orientirung eines grofsen Dreiecksnetzes, Gradmessungen, Mefstisch“.

Orthotypes System (Kryst.), s. v. w. „Ein und einaxiges System, das vierte Krystallisations-System“.

Oscillation, s. v. w. „Schwingung“. Oscillationsaxe, s. v. w. „Schwingungsaxe“. Oscilliren, s. v. w. „schwingen“, in einer oscillirenden Bewegung sich befinden.

Osten einer der Cardinalpunkte des Horizonts eines Orts, der Morgen, die Morgengegend. Ostpunkt, s. v. w. „Morgenpunkt“.

Ostwestlinie die gerade Linie zwischen dem Ostpunkt und dem Westpunkt des Horizonts eines Orts, s. „Cardinalpunkte“.

Ovale ist eine aus Kreisbogen verzeichnete in sich geschlossene symmetrische Figur mit zwei ungleichen Hauptaxen; in der Geometrie wird sie nicht betrachtet. Dagegen ist sie als Einfassung deshalb geeigneter als eine Ellipse, weil man ihre Form nach Belieben abändern kann und weil sie leicht zu construiren ist.

Man zeichnet ein gleichschenkliges Dreieck ABC, aus A und B zwei gleiche beliebige Kreise, verlängert die Seiten CA, CB bis zu den Kreisumfängen und verbindet diese Punkte D und E durch einen aus c beschriebenen Bogen. Die andere Hälfte wird aus dem C gegenüberliegenden Punkt geschlossen.

Fig. 871.

Descartes hat Ovalen construirt zu dem Zweck, dafs die von einem leuchtenden Punkt auf die convexe Seite der Curve fallenden Strahlen durch das Glas alle nach einem innerhalb der Ovale liegenden Punkt gebrochen werden; die Optik kann aber keinen Gebrauch davon machen.

P.

π, die Verhältnifszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser. In dem Art. „Arcus“, No. 2, pag. 108 ist angegeben, wie diese Zahl auf dem Wege der geometrischen Construction nach und nach immer annähernder gefunden werden kann, wenn man regelmäfsige Vielecke von gleich vielen Seiten in und um die Kreislinie beschreibt, deren Seitenzahl wiederholentlich verdoppelt, aus den Umfängen der jedesmaligen Necke die der $2N$ecke berechnet und somit immer zwei nähere die Länge des Umfangs einschliefsende Grenzen erhält.

In demselben Art. No. 17 und 18, pag. 114 und 115 sind aus den als allgemein gültig erwiesenen Reihen für $arc \cdot sin\, x$ und $arc \cdot tg\, x$ zwei ziemlich convergirende Reihen für π entwickelt.

Eine Zusammenstellung der numerischen Werthe für π, für Brüche und Wurzeln von π und deren Logarithmen befindet sich in dem Art. „Kreis“, No. 11, pag. 95.

Paar. Ein Paar ist eine Anzahl von zweien gleichartigen Gröfsen.

Pallas (⚴). Einer der kleinen Planeten zwischen den Bahnen des Mars und des Jupiter, der sechste der oberen Planeten. Seine gröfste Entfernung von der Sonne ist 71, seine kleinste 43, seine mittlere 57 Millionen Meilen. Seine gröfste Entfernung von der Erde 91, seine kleinste 24 Millionen Meilen. Die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik 34° 35′ 49,1″; die gröfste unter allen Planeten; die Excentricität = 0,24199 der halben grofsen Axe = 2,77263 halbe Erdbahnaxen. Sein sidarisches Jahr, (Umlaufszeit) = 1686 Tage 6 Stunden; seine mittlere tägliche siderische Bewegung = 768,55421 Secunden, Länge des Perihels 121° 5′ 0,5″; Länge des aufsteigenden Knotens 172° 38′ 29,8″. Die Pallas erleidet vom Jupiter nicht unbedeutende Störungen, weshalb die Orte der Pallas aus den Elementen nicht zuverlässig anzugeben sind. Der Durchmesser der Pallas hat 440 bis 460 Meilen.

Pantograph, der bekannte sogenannte Storchschnabel, ein Instrument, mit welchem man Figuren in demselben oder auch in einem beliebig verjüngten Maafsstabe abzeichnet, blofs dadurch, dafs man die abzuzeichnenden Linien mit einem Stift überfährt. Es wird nämlich ein System von gelenkigen Stäben um einen festen Dorn drehbar befestigt; auf der einen Seite des Dorns ist ein Weiserstift, auf der anderen Seite ein Zeichnenstift in einen der Stäbe eingesteckt und das Ganze so zusammengesetzt, dafs beide Stifte in einem zu wählenden Verhältnifs der Abstände vom Dorn mit diesem immer in einer geraden Linie verbleiben, so dafs in diesem Längenverhältnifs die Figur auch abgezeichnet wird.

Parabel (vergleiche die Art. „Ellipse und Hyperbel“) ist eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Klasse, indem sie einer Gleichung vom zweiten Grade angehört; ferner ist sie eine Kegelschnittslinie. Aus beiden Gesichtspunkten, dem analytischen und dem synthetischen oder dem arithmetischen und dem geometrischen ist sie bereits in diesem Wörterbuch behandelt.

In dem Art. „Curven“, III. Abtheilung, pag. 172 ist die der ganzen Klasse von Curven zu Grunde liegende allgemeine Gleichung (1) aufgestellt:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad (1)$$

Nachdem zuerst die Bedeutung und der Einflufs der einzelnen Coefficienten gezeigt worden, ist unter der Bedingung beliebig grofser Abscissen (x) der Gleichung die Form gegeben (Gl. 9):

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b + \frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2(bd - 2ae)}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}}\right] \qquad (2)$$

und die beliebige Gröfse der Abscisse x bis zur Unendlichkeit ausgedehnt, wo dann die Glieder, welche x im Nenner haben, als Null fortfallen und die Gleichung die allgemeine Form annimmt (Gl. 10)

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \qquad (3)$$

Hieraus sind für sämmtliche Curven derselben Klasse drei mögliche Fälle gezeigt:

1. $b^2 > 4ac$
   $b^2 < 4ac$
   $b^2 = 4ac$

woraus nun drei mögliche Formen von Curven nachgewiesen worden, welche durch folgende drei Gleichungen (19, 20, 21, pag. 175) ausgesprochen werden.

1. $y^2 = Ax + Bx^2$
2. $y^2 = Ax - Bx^2$
3. $y^2 = Ax$

Für die erste und die dritte Gleichung sind bei unendlichen Abscissen auch unendliche Ordinaten vorhanden, für die zweite Gleichung sind für unendliche Abscissen Ordinaten unmöglich. Die erste Gleichung gehört der Hyperbel, die zweite der Ellipse und die dritte der Parabel an.

Die allgemeine Gleichung der Parabel, wenn deren Axe die Abscissenlinie und der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, hat man also

$$y^2 = Ax \qquad (4)$$

2. In No. 15, pag. 176 ist, um auf den Character der Kegelschnitte specieller zu kommen, Bezug genommen auf den Art. „Brennpunkte der Kegelschnitte", Bd. I, pag. 420 mit Fig. 257. Hier werden die Constructionen der Kegelschnitte aus dem Kegel bildlich dargestellt und die Hauptformeln für dieselben abgeleitet, wobei die Axen als die Abscissenlinien mit dem Scheitel F als Anfangspunkt gelten. Die Abtheilung A handelt speciell von der Parabel.

Mit Bezug auf die Bezeichnung, Fig. 257 ist die rechtwinklige Coordinatengleichung entwickelt (pag. 421)

$$y^2 = 2k \sin\frac{\alpha}{2} \cdot x \qquad (5)$$

Hier ist k der Durchmesser EF des Kegels in dem Scheitel F der Parabel und α der $\angle EAF$ des Axenquerschnitts an der Kegelspitze. Oder $2k \sin\frac{\alpha}{2}$ durch p (Parameter) ausgedrückt.

$$y^2 = px \qquad (6)$$

An diese Gleichung knüpft sich der Grund für den Namen Parabel (παρα gleichkommend), weil das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Rectangel zwischen dem Parameter (p) und der Abscisse (x).

3. Die Gleichungen 4 bis 6 für die Parabel haben die Beschränkung, dafs die Abscissenlinie die Axe mit dem Scheitel als Anfangspunkt ist und dafs die Ordinaten rechtwinklig sind. Eine allgemeine Gleichung für die Parabel ist aber eine solche, die eine gegen die Axe ganz beliebig liegende Abscissenlinie, einen beliebigen Anfangspunkt hat und dessen Ordinaten einen beliebigen Winkel mit der Abscissenlinie bilden. Nur liegt das ganze Coordinatensystem mit der Parabel in einerlei Ebene.

Eben so wie für die Ellipse und Hyperbel (s. „Ellipse", No. 3 und 4, pag. 39 und „Hyperbel", No. 5, pag. 263) und mit denselben in dem erstgenannten Art. angegebenen Hülfsmitteln sollen nun hier die der Parabel angehörenden allgemeinen Gleichungen geordnet und auf Fig. 608, Bd. III, pag. 40 bezogen zusammen gestellt, auch noch einige andere Fälle hinzugefügt werden.

A bedeutet den Parameter der allgemeinen Gleichung (4)

$$y^2 = Ax$$

AC ist die Axe, A der Scheitel, E der Anfangspunkt der Abscissen, $EF = u$ die Abscisse, $FD = z$ die Ordinate. Die allgemeine Gleichung für den Parabelpunkt (Bd. II, pag. 177, Formel 29) ist

$$\text{I.}\quad \sin^2(\beta+\delta)\,z^2 - 2\sin(\beta+\delta)\sin\beta\cdot zu + \sin^2\beta\cdot u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta)]\,z$$
$$+ (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)\,u + g^2\sin^4\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$$

Dreht man (Fig. 608) die Abscissenlinie CF um C in die Axe AC, so kommt F in F', E in E', der Anfangspunkt E' der Abscissen ist um die Länge $p - g$ vom Scheitel A entfernt. Ist dann $\angle D'F'C = \delta$, $E'F' = u$, $D'F' = z$, so hat man für den Parabelpunkt D' die Gleichung (Bd. II, Formel 33, pag. 177).

$$\text{II. } \sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z + Au - A(p - g) = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $p - g = 0$; $u = -u$, so erhält man die Gleichung für die in der Axe liegende Abscissenlinie, für den Scheitel A als den Anfangspunkt der Abscissen und den Coordinatenwinkel δ.

III. $\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z - Au = 0$.

Nimmt man (Fig. 608) in der beliebigen Entfernung $E'L = h$ eine der Axe parallele GJ, verlängert $D'F'$ bis G, setzt $GD' = z'$, so ist für Gleichung II.

$$D'F' = z = z' - F'G = z' - h\operatorname{cosec}\delta.$$

Setzt man daher in Gleichung II. $z - h\operatorname{cosec}\delta$ für z, so erhält man die Gleichung, wenn die Abscissenlinie in dem Abstand h mit der Axe parallel läuft, der Art, dafs die Axe zwischen Curve und Abscissenlinie liegt. Bezeichnet man die Länge $AE' = p - g$ mit z, zieht von E' eine gerade Linie $E'H$ unter dem Coordinatenwinkel $E'HJ = \delta$, so ist H der Anfangspunkt der Abscissen; für den Parabelpunkt D' ist dann $HG = u$ und die Gleichung ist

$$\text{IV. } \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z + Au + h^2 + Ah\cot\delta - Az = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $z = 0$, $u = -u$, so erhält man die Gleichung der Parabel für dieselbe Abscissenlinie GJ, für denselben Coordinatenwinkel δ und mit dem unter dem Scheitelpunkt A belegenen Anfangspunkt M der Abscisseu.

$$\text{V. } \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z - Au + h^2 + Ah\cot\delta = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung $h = 0$, so erhält man Gleichung III.

Setzt man in Gleichung IV. für h den Werth $-h$, so erhält man die Gleichung unter denselben Bedingungen mit IV, nur dafs die Abscissenlinie in dem Abstand h von der Axe entgegengesetzt, nämlich nach oben der Curvenhälfte zu liegt.

$$\text{VI. } \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta - 2h\sin\delta)z + Au + h^2 - Ah\cot\delta - Az = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $h\sin\delta$ für h, so erhält man die Gleichung Bd. II, pag. 177, Formel 37.

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen I. bis VI. den Coordinatenwinkel, in I. $\angle(\beta + \delta) = 90^\circ$, in II. bis VI. $\angle\delta = 90^\circ$, so erhält man Gleichungen unter denselben Voraussetzungen, nur dafs die Ordinaten mit der Axe normal sind.

Aus Gleichung I. entsteht

$$\text{VII. } z^2 - 2\sin\beta \cdot zu + \sin^2\beta \cdot u^2 - 2g\sin\beta \cdot z + (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$$

Aus Gleichung II. entsteht
VIII. $z^2 + Au - A(p - g) = 0$.
Aus Gleichung III. entsteht
IX. $z^2 - Au = 0$.
Aus Gleichung IV. entsteht
X. $z^2 - 2hz + Au + h^2 - Az = 0$.
Aus Gleichung V. entsteht
XI. $z^2 - 2hz - Au + h^2 = 0$
Aus Gleichung VI. entsteht
XII. $z^2 + 2hz + Au + h^2 - Az = 0$

4) Band II, pag. 178, No. 23 von I. bis VI. sind für alle Kegelschnitte die Werthe der in der allgemeinen Gleichung (1) vorkommenden Coefficienten erwiesen und angegeben. Es sollen diese Werthe für die Parabel allein hier zusammengestellt werden und zwar in Beziehung auf Gleichung 1, wenn man darin für Fig. 608 und zur Uebereinstimmung mit den Formeln I. bis XII. den Werth u für x und z für y setzt, Gleichung 1 wird sodann

zu der Gleichung

$$az^2 + bzu + cu^2 + dz + eu + f = 0$$

I. Der Coefficient a ist = 1 wenn (Fig. 608) $\angle DKC = (\delta + \beta)$, d. h der Winkel, den die Ordinate mit der Axe bildet, ein Rechter ist. Dividirt man daher eine mit az^2 gegebene allgemeine Gleichung für die Parabel mit a, so verwandelt man dieselbe in eine Gleichung, für welche die Ordinaten mit der Parabelaxe normal sind.

Da diese einfache Operation überall auszuführen ist und die übrigen Coefficienten vereinfacht, so sollen die Gleichungen I. bis VI. für die Untersuchung der Coefficienten aufser Betracht bleiben. Die letzten sechs Gleichungen gehören also der allgemeinen Gleichung an

$$z^2 + bzu + cu^2 + dz + eu + f = 0$$

II. Der Coefficient b von zu ist = dem doppelten negativen Sinus des Winkels (β) zwischen der Abscissenlinie und der Axe (Gl. VII.). Wo die Abscissenlinie in der Axe oder mit derselben $\ddagger$ liegt, ist $\beta = 0$ und das Glied mit zu fällt fort (Gl. VIII. bis XII.).

III. Der Coefficient c von u^2 ist ebenfalls nur von demselben Winkel β abhängig und = dem Quadrat seines Sinus. Für den Fall, wie ad II. gedacht, für die Gleichungen VIII. bis XII. wird $\beta = 0$, also $\sin^2\beta = 0$ und das Glied mit u^2 fällt aus.

IV. Der Coefficient d von z ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts der Abscissen von der Axe; negativ, wenn die Axe zwischen der Parabelhälfte und der Abscissenlinie liegt (Gl. VII, X, XI.); positiv, wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Parabelhälfte liegt (Gl. XII.). Ist die Axe die Abscissenlinie, so fällt das Glied mit z fort.

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab. 1. Von dem Winkel β zwischen der Abscissenlinie und der Axe. 2. Von der Entfernung des Anfangspunkts E der Abscissen von der Axe ($g \cdot \sin\beta$) und von dem Parameter A.

Ist die Abscissenlinie die Axe oder läuft sie mit derselben parallel, so ist $\beta = 0$ und $e = A$ (Gl. VIII, X, XII.); ist hierbei der Scheitel zugleich Anfangspunkt der Abscissen (IX, XI.) so ist $e = -A$.

VI. Der Coefficient f, das bekannte Glied. Liegt die Abscissenlinie in der Axe, der Anfangspunkt der Abscissen in der Entfernung $p - g = s$ vom Scheitel (Gl. VIII.) so ist $f = -As$.

f wird = 0, wenn der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel liegt (Gl. IX.). Siehe den Grund hiervon in dem Art. „Curven", pag. 173, No. 4.

Liegt die Abscissenlinie $\ddagger$ der Axe und fällt die Projection des Anfangspunkts auf die Axe in den Scheitel (Gl. XI.) so ist f = dem Quadrat des Abstandes h beider Parallelen; $f = h^2$.

Läuft die Abscissenlinie in der Entfernung $h \ddagger$ der Axe und ist die Projection des Anfangspunkts auf die Axe um s von dem Scheitel entfernt (Gl. X, XII.), so ist $f = h^2 - As$.

Setzt man $h^2 - As = 0$, so erhält man dasjenige s, für welches der Anfangspunkt der Abscissen in einem Parabelpunkt liegt. (S. den Grund hiervon in dem Art. „Curven", pag 173, No 4.)

Setzt man in der allgemeinsten Gleichung (VII.) die Entfernung $g \sin\beta$ des Anfangspunkts von der Axe = h_1; die Entfernung ($p - g \cos\beta$) der Projection des Anfangspunkts vom Scheitel = s, so hat man ganz allgemein

$$f = h_1^2 - As$$

In Band II, pag. 180, No. 25 mit Fig. 534 wird die geometrische Construction des Parameter A bei gegebenem Kegel gezeigt.

5. Um nun fernere speciellere Untersuchungen über die Parabel anzustellen, ist an die No. 1 und 2 aufgestellten 6 Formeln anzuknüpfen und fortzufahren. Zugleich ist auf einige elementare Entwickelungen und geometrische Constructionen in dem Art „Brennpunkt der Parabel" aufmerksam zu machen.

In Fig 872 sei EDO eine halbe Parabel, E deren Scheitel, EK deren Axe. Für den Parabelpunkt D ist $EG = x$ die Abscisse, $GD = y$ die Ordinate, und nach Formel 5 und 6

$$y^2 = 2k \sin\frac{\alpha}{2} \cdot x - px$$

Berührt CT die Parabel in D und ist DL normal auf DT, so ist für den Punkt D: DT die Tangente, DJ die Normale, GT die Subtangente, GJ die Subnormale. Band II, pag. 185 sind die allgemeinen Formeln für diese 4 Linien angegeben.

Nämlich die trigonometrische Tangente des Winkels DTG zwischen der Tangente und der Axe: $tg\,\alpha = f'x = \frac{\partial y}{\partial x}$

die Tangente $DT = \frac{fx}{f'x}\sqrt{1 + (f'x)^2}$

die Normale $DJ = fx\sqrt{1 + (f'x)^2}$

Fig. 872.

die Subtangente $GT = \frac{fx}{f'x} = \frac{y}{\partial y}$

die Subnormale $GJ = fx \cdot f'x$

Nun ist für die Parabel $y^2 = px$

mithin $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y}{2x}$ (7)

Tangente $DT = \sqrt{4x^2 + y^2} = \sqrt{4x^2 + px}$

$= \frac{y}{p}\sqrt{4y^2 + p^2}$ (8)

Normale $DJ = \frac{y}{2x}\sqrt{y^2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4px}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + y^2}$ (9)

Subtangante $GT = 2x = \frac{2y^2}{p}$ (10)

Subnormale $GJ = \frac{1}{2}p$ (11)

Ist DL der Krümmungshalbmesser r für D, so hat man nach Bd. II, pag. 188, Gleichung 9 bis 11.

Abscisse $EK = 3x + \frac{1}{2}p$ (12)

Ordinate $LK = \frac{4x^2}{y} = \frac{4x}{p} = \frac{4y^3}{p^2}$ (13)

Radius $DL = \sqrt{\frac{(4x + p)^3}{4p}}$ (14)

6 In Betracht, dafs die Ellipse und die Hyperbel **Durchmesser** haben, ist es angemessen zu untersuchen, ob dies nicht auch für die **Parabel** der Fall sei.

Setzt man in Formel I. das Bekannte $g^2 \sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$, so ist (Fig. 608, pag. 40) der Anfangspunkt E der Abscissen ein Parabelpunkt. Es fragt sich nun, unter welchem Winkel β die verlängerte Linie FC ein Durchmesser wird; d. h. unter welchem Winkel β für ein jedes einzelne u zwei gleiche entgegengesetzte z entstehen.

Die Gleichung I. hat nun die allgemeine Form

$$a^2 z^2 - bzu + cu^2 + dz + eu = 0$$

und es ist ein einziges $\pm z$ als Wurzel der Gleichung nur möglich, wenn diejenigen Glieder, welche uz und z zum Factor haben, fortfallen.

Diese beiden Glieder sind nun

$$-2\sin(\beta + \delta)\sin\beta \cdot zu - [2g\sin(\beta + \delta)\sin\beta + A\cos(\beta + \delta)]z$$

Das erste Glied wird $= 0$ für $\beta = 0$ und für $(\beta + \delta) = 0$; für die zweite Annahme wird das zweite Glied $= -Az$, verschwindet also nicht. Es mufs also jedenfalls $\beta = 0$, d. h. die Abscisse, wenn sie Durchmesser werden soll, mit der Axe ∥ laufen. Für diesen Werth erhält man die Gleichung I.

$$\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z + Au = 0$$

Die Abscisse ist hier die Axe und die Gleichung spricht aus, dafs sie nur für $\delta = 90°$, so dafs $-A\cos\delta \cdot z = 0$ wird, als Durchmesser existirt, dafs also schiaf-

winklige Ordinaten durch die Axe nicht halbirt werden.

Um nun zu untersuchen ob für eine mit der Axe parallele Abscisse ein Winkel δ existirt, für welchen die Ordinaten durch dieselbe halbirt werden, hat man auf die Gleichungen überzugehen, welche in Abständen von der Axe und $\mp$ mit derselben die Abscisse annehmen, also auf Gleichung IV. und VI. Mit Hinfortlassung der bekannten Glieder erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \text{Gl. IV.}\quad \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z + Au = 0 \\ \text{Gl. VI.}\quad \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta - 2h\sin\delta)z + Au = 0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

Man hat also zur Bedingung:

$$A\cos\delta \pm 2h\sin\delta = 0 \quad (16)$$

woraus $tg\,\delta = \mp\dfrac{A}{2h}$ (17)

d. h. befindet sich die Abscisse **unterhalb** der Axe (Gl. IV.), so ist δ **stumpf**, und befindet sie sich **oberhalb** der Axe **spitz**.

Dieser Ausdruck für $tg\,\delta$ gilt für jeden Punkt der Parabel, also auch für den in der Parabellinie liegenden Anfangspunkt der Abscissen. Fällt man von diesem ein Loth auf die Axe, und bezeichnet man den Abstand dessen Fufspunkts vom Scheitel mit x, so ist $h = y$ und $tg\,\delta = \dfrac{A}{2y} = \dfrac{p}{2y}$. Mithin ist δ = dem $\angle\alpha$ den die Tangente des Parabelpunkts mit der Axe bildet. Wenn also Fig. 872 $DM \mp EK$, so ist DM unter dem Abstand $UH = h = DG = y$ von der Axe ein Durchmesser der Parabel und die mit der Tangente DT parallelen Ordinaten werden, wie ON in P, von DM halbirt.

7. Bei Bildung der Gleichungen 15 ist zum Anfangspunkt der Abscissen der Parabelpunkt E, Fig. 608, (Bd. III, pag. 40) festgestellt. Für die Bezeichnung, Fig. 872 hat man also den Punkt D für E, die Abscissen x, haben die entgegengesetzte Lage von u, mithin $-x$, für u; y, für z; α für δ und es ist $A = p$.

Man hat nun aus Gl. 15 und 16:

$$A\cos\delta \pm 2h\sin\delta = 0$$

mithin ist auch die Summe der übrigen Glieder

$$\sin^2\delta \cdot z^2 + Au = 0$$

oder $\sin^2\alpha \cdot y_,^2 - px_, = 0$

hieraus erhält man also, einen Durchmesser zur Abscissenlinie genommen, die **schiefwinklige Coordinatengleichung**

$$y_,^2 = \frac{p}{\sin^2\alpha} \cdot x_, \quad (18)$$

oder wenn man die Entfernung GD des Durchmessers von der Axe wieder mit h bezeichnet, da aus Gl. 17 $tg\,\delta = \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}$ gesetzt $\sin^2\alpha = \dfrac{p^2}{4h^2 + p^2}$

$$y_,^2 = \frac{4h^2 + p^2}{p} \cdot x_, \quad (19)$$

8. Nimmt man eine Tangente zur Abscissenlinie, den Berührungspunkt zum Anfangspunkt, die Ordinaten $\mp$ der Axe, so erhält man die Coordinatengleichung

$$z = \frac{p}{4h^2 + p^2}u^2$$

Denn ist (Fig. 872) $DQ = u$, $QN = z$, $DG = h$, $\angle DTG = \alpha$, so hat man in Formel 19: z für $x_,$; u für $y_,$ gesetzt:

$$u^2 = \frac{4h^2 + p^2}{p} \cdot z \quad (20)$$

woraus $$z = \frac{p}{4h^2 + p^2} \cdot u^2 \quad (21)$$

zu gleichen entgegengesetzten Abscissen u gehören also gleiche Ordinaten z.

9. Nimmt man die Ordinate DG als Abscisse (x), D als deren Anfangspunkt und die Ordinaten (y) rechtwinklig, so hat man für einen Punkt N

$$DV = x = u\sin\alpha$$

$$VN = y = u\cos\alpha - z$$

Also nach Gl. 18:

$$y = u\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{p}u^2 \quad (22)$$

Aus der ersten Gleichung ist $u = \dfrac{x}{\sin\alpha}$ und diesen Werth in die zweite Gleichung gesetzt

$$y = x\cot\alpha - \frac{x^2}{p} \quad (23)$$

woraus die Coordinatengleichung

$$x^2 - p \cdot \cot\alpha \cdot x + py = 0 \quad (24)$$

Setzt man aus Gleichung 17: $tg\,\alpha = \dfrac{p}{2h}$, so hat man

$$x^2 - 2hx + py = 0 \quad (25)$$

Die Auflösung der Gleichung gibt

$$x = +h \pm \sqrt{h^2 - py} \quad (26)$$

für jedes y also liefert die Summe der beiden zugehörigen x den Werth $2DG = 2h$.

Für $h = 0$, wenn also DM in der Axe liegt, erhält man

$$x^2 + py = 0$$

also gleich der ursprünglichen Gleichung $x^2 - px = 0$, wenn man y statt von G nach E hin von E nach G hin rechnet.

10. Nimmt man $EB = \frac{1}{4} p$, so hat der Punkt B die Eigenschaft, dafs eine von ihm nach irgend einem Parabelpunkt D gezogene Linie BD mit der durch D parallel der Axe gezogenen Linie DM einen Winkel BDM bildet, der durch die Normale DJ halbirt wird.

Denn es ist $BD^2 = BG^2 + DG^2 = (x - \frac{1}{4} p)^2 + px = (x + \frac{1}{4} p)^2$

also

$$BD = x + \frac{1}{4} p \tag{27}$$

und

$$BJ = EG + GJ - EB = x + \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} p = x + \frac{1}{4} p$$

folglich

$$BD = BJ \text{ und } \angle BDJ = \angle BJD = \angle JDM$$

Ist also der Punkt B ein leuchtender Punkt, so werden alle von ihm nach der Parabel geworfene Strahlen in Linie $\mp$ der Axe reflectirt. Der Punkt B heifst deshalb der Brennpunkt und die von ihm nach der Parabel gezogenen Linien Brennstrahlen (s. den Art. „Brennpunkt der Parabel“).

11. Rectification der Parabel. Dieselbe ist als Beispiel ausgeführt Bd. II, pag. 191.

Es ist der Bogen $ED =$

$$\lambda = \frac{1}{4p}\left[2y\sqrt{p^2 + 4y^2} + p^2 \ln \frac{2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}}{2}\right] \tag{28}$$

durch p und x ausgedrückt, indem man $y^2 = px$ setzt

$$\lambda = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{px + 4x^2} + p \ln \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{p + 4x}}{\sqrt{p}}\right] \tag{29}$$

durch x und y ausgedrückt

$$\lambda = \frac{1}{4x}\left[2x\sqrt{y^2 + 4x^2} + y^2 \ln \frac{2x + \sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}\right] \tag{30}$$

12. Quadratur der Parabel. Dieselbe ist als Beispiel ausgeführt, Bd. II, pag. 192. Wird der Anfangspunkt im Scheitel E genommen, so ist die Parabelfläche $GDOH$ zwischen den Abscissen $EG = x$ und $EJ = x'$, den dazugehörigen Ordinaten

$$y, y' = F = \frac{2}{3}\sqrt{p}\,[x'\sqrt{x'} - x\sqrt{x}] \tag{31}$$

13. A. Das Parabelstück zwischen dem Scheitel E, der Abscisse x und der Ordinate y

$$F = \frac{2}{3} xy \tag{32}$$

B. Die Fläche EDT zwischen der Parabel und der Tangente ist

$$F = \frac{1}{3} xy \tag{33}$$

Denn das $\triangle DGT$ ist $= \frac{1}{2} TG \times DG = xy$.

C. Die Fläche EDB zwischen der Parabel und dem Brennstrahl ist

$$F = \frac{1}{15}(4x + 3p)\sqrt{px} = \frac{1}{15}\frac{y}{x}(4x^2 + 3y^2) = \frac{1}{15} \cdot \frac{4y^3 + 3p^3}{p} \tag{34}$$

D. Die Fläche $ODNPO$ eines Abschnitts zwischen einer auf einem Durchmesser DM genommenen schiefwinkligen Ordinate ON und der von ihr abgeschnittenen Parabel ist $=$

$$F = \frac{2}{3} x, y, \sin \alpha$$

Denn nimmt man Bd. II, pag. 192, Fig. 540 die Ordinate EB unter einem $\angle \alpha$, so erhält man das Zuwachsparallelogramm $EFHG = \triangle x (y + \triangle y) \sin \alpha$

mithin auch $F = \sin \alpha \int y\, \partial x = \sin \alpha \int y \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \partial y = \sin \alpha \int \frac{2y^2}{p}\, \partial y = \frac{2}{3} xy \sin \alpha$

Mithin die Ebene $ODNPO$

$$= \frac{2}{3} x, y, \sin \alpha \tag{35}$$

14. Die Calotte aus dem Parabelbogen, wenn derselbe um die Axe sich herumdreht, ist für den Fall, dafs der Bogen zwischen den zu den Abscissen x und x' gehörenden Ordinaten sich befindet in

Bd. II, pag. 194 als Beispiel berechnet

$$F = \tfrac{1}{6}\pi\sqrt{p}\left[(4x+p)^{\frac{3}{2}} - (4x'+p)^{\frac{3}{2}}\right] \quad (36)$$

Ist $x' = 0$, also für die Calotte des Bogens ED nm EG

$$F = \tfrac{1}{6}\pi\sqrt{p}\left[(4x+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right] = \pi\,\frac{(4px+p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{6p}$$

$$= \pi y\,\frac{\sqrt{4x^2+y^2} - y^3}{6x^2} = \pi\,\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{6p} \quad (37)$$

15. Dreht sich der Bogen OD nm seinen Durchmesser DM, so hat man in der Quadraturformel Bd. II, pag. 194:

$$F = 2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$$

für $DU = x$ den Werth $x' + y'\cos\alpha$
für $OU = y$ den Werth $y'\sin\alpha$ zu setzen.

Es ist demnach

$$F = 2\pi\cdot\int y\sin\alpha\sqrt{1+\left[\frac{\partial y\sin\alpha}{\partial(x+y\cos\alpha)}\right]^2}\,\partial(x+y\cos\alpha)$$

die Wnrzelgröfse nebst Differenzial ist umgeändert und reducirt

$$= \sqrt{[\partial(x+y\cos\alpha)]^2 + (\partial y\sin\alpha)^2} = \sqrt{(\partial y)^2 + (\partial x)^2 + 2\,\partial x\cdot\partial y\cdot\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\frac{\partial y}{\partial x}\cos\alpha}\;\partial x = \sqrt{\frac{p^2}{4y^2} + 1 + 2\frac{p}{2y}\cos\alpha}\cdot\frac{2y}{p}\,\partial y$$

Mithin $F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\int y\sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}\cdot\partial y$

Man hat nun das Integral nach Formel 233, pag. 342, wenn man $c = 4$; $b = 4p\cos\alpha$; $a = p^2$ setzt. $(4y^2 + 4p\cos\alpha\cdot y + p^2) = Y$ gesetzt

$$\int y\sqrt{Y} = \tfrac{1}{12}\cdot Y^{\frac{3}{2}} - \frac{p\cos\alpha}{2}\int\sqrt{Y}$$

Aus Formel 232, pag. 342

$$\int\sqrt{Y} = \frac{p\cos\alpha + 2y}{4}\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2}p^2\sin^2\alpha\int\frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$$

Endlich ans Formel 229, pag. 342

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2}\ln(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})$$

Mithin

$$F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\tfrac{1}{12}Y\sqrt{Y} - \frac{p\cos\alpha}{2}\cdot\left[\frac{p\cos\alpha + 2y}{4}\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2}p^2\sin^2\alpha\cdot\tfrac{1}{2}\ln(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right]\right]$$

$$= \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\left[\frac{y^2}{3} + \frac{p\cos\alpha}{12}y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{Y} - \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\ln(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right]$$

Für $y = 0$ wird $F = 0$. Es wird dann $\sqrt{Y} = p$ nnd man hat für die Constante

$$0 = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) - \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\ln(p\cos\alpha + p)\right] + C$$

den negativen Werth als den der Constante in die Formel für F gesetzt gibt reducirt vollständig die Umdrehungsfläche dnrch den Bogen OD nm den Durchmesser DM:

$$F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\left[\frac{y^2}{3} + \frac{p\cos\alpha}{12}y + \frac{p^2}{24}(2-3)\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}\right.$$

$$\left. - \frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) - \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cos\alpha\ln\frac{p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha y + p^2}}{p(1+\cos\alpha)}\right] \quad (38)$$

Setzt man $\alpha = 90^\circ$, so sind die Ordinaten rechtwinklig, die Abscissenlinie ist die Parabelaxe und man hat:

$$F = \frac{2\pi}{p}\left[\left(\frac{y^2}{3} + \frac{p^2}{12}\right)\sqrt{4y^2 + p^2} - \frac{p^3}{12}\right] = \tfrac{1}{6}\,\frac{\pi}{p}\left[(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right] \quad (39)$$

16. Dreht sich der Bogen ND um den Durchmesser DM, so hat man die Abscisse $PW = y' \cos\alpha - x'$ die Ordinate $NW = y' \sin\alpha$

also $F = 2\pi \int y \sin\alpha \sqrt{[\partial(y \cos\alpha - x)]^2 + (\partial y \sin\alpha)^2}$

felglich ist hier die Wurzelgröfse

$$\sqrt{(\partial y)^2 + (\partial x)^2 - 2\partial x \cdot \partial y \cdot \cos\alpha} = \sqrt{\frac{p^2}{4y^2} + 1 - 2\frac{p}{2y}\cos\alpha}\,\frac{2y}{p} \cdot \partial y$$

und $F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p} \int y \sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2} \cdot \partial y.$

Nach den in No. 15 citirten Integralformeln hat man nnn, wenn man in diesen Fermeln $a = p^2$; $b = -4p\cos\alpha$; $c = 4$, und $4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2 = Y$ setzt: ferner

$$\int y \sqrt{Y} = \tfrac{1}{12} Y \sqrt{Y} + \frac{p \cos\alpha}{2} \int \sqrt{Y}$$

$$\int \sqrt{Y} = -\frac{p\cos\alpha + 2y}{4}\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2} p^2 \sin^2\alpha \int \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$$

endlich $\int \frac{\partial y}{\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2} \ln(-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})$

Mithin

$$F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\left(\frac{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2}{12} + \frac{p\cos\alpha}{2} \cdot \frac{-p\cos\alpha + 2y}{4}\right)\sqrt{Y} + \frac{p\cos\alpha}{2} \cdot \tfrac{1}{2} p^2 \sin^2\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\ln(-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right]$$

$$= \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left(\left[\frac{y^2}{3} - \frac{p\cos\alpha}{12} y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2} + \tfrac{1}{8} p^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \ln\left[-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2}\right]\right)$$

Für $y = 0$ wird auch $F = 0$; es wird dann $\sqrt{y} = p$ und man hat für die Constante

$$0 = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) + \tfrac{1}{8} p^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \ln(-p\cos\alpha + p)\right] + C$$

den negativen Werth dieses Ausdrucks in die Formel für F eingesetzt, reducirt gibt vellständig die Umdrehungsfläche durch den Begen ND um den Durchmesser DM

$$F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left(\left[\frac{y^3}{3} - \frac{p\cos\alpha}{12} y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2} - \frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) + \tfrac{1}{8} p^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \ln \frac{-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha \cdot y + p^2}}{-p\cos\alpha + p}\right) \quad (40)$$

Setzt man $\alpha = 90^\circ$, so sind die Ordinaten rechtwinklig, die Abscissenliuie ist die Parabelaxe nud man hat:

$$F = \frac{2\pi}{p}\left[\left(\frac{y^2}{3} + \frac{p^2}{12}\right)\sqrt{4y^2 + p^2} - \frac{p^3}{12}\right] \quad (41)$$

17. Der Kërper, welcher durch die Umdrehung der Ebene DEG nm die Axe entsteht, ist in Bd. II, pag. 195 entwickelt.

$$K = \tfrac{1}{2}\pi x y^2 = \tfrac{1}{2}\pi p x^2 \quad (42)$$

Liegt die erzeugende Ebene zwischen den zn den Abscissen x, x' gehörenden Ordinaten y, y' so ist

$$K = \tfrac{1}{2}\pi(xy^2 - x'y'^2) = \tfrac{1}{2}\pi p = (x^2 - x'^2) \quad (43)$$

18. Dreht sich die Fläche ODP nm den Dnrchmesser DM, so würde für rechtwinklige Coordinaten der Körper = sein $K = \pi \int y^2 \partial x$. Für schiefwinklige bleibt der Halbmesser der sich drehenden Znwachsfläche dasselbe Loth OU von O auf DM, mithin hat man den Werth des verlangten Körpers

$$K = \pi \int (y, \sin\alpha)^2 \partial x, = \pi \sin^2\alpha \int y,^2 \cdot \frac{\partial x,}{\partial y,} \partial y,$$

Nach Formel 18 ist

$$y_1^2 = \frac{p}{\sin^2\alpha} x_1$$

also
$$2y_1 \partial y_1 = \frac{p}{\sin^2\alpha} \partial x_1$$

woraus
$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \tag{44}$$

Diesen Werth in das Integral für K gesetzt gibt

$$K = \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \partial y_1 = 2\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \int y_1^3 \partial y_1$$

mithin
$$K = \tfrac{1}{2}\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \cdot y_1^4 \tag{45}$$

wo die Constante fortfällt, weil für $y_1 = 0$ anch $K = 0$ wird.

19. Fällt man (Fig. 872) von O eine Ordinate OU auf den Durchmesser DM, und es dreht sich die Fläche ODU nm den Durchmesser, so hat man den Körper

$$K = \pi \int (y_1 \sin\alpha)^2 \frac{\partial x}{\partial y} \partial y$$

wo DU unter x nnd OU unter y verstanden wird, also

$$\begin{aligned}
K &= \pi \int (y_1 \sin\alpha)^2 \cdot \frac{\partial (x_1 + y_1 \cos\alpha)}{\partial (y_1 \sin\alpha)} \partial (y_1 \sin\alpha) \\
&= \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \partial y_1 + \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \partial y_1 \cdot \cos\alpha \\
&= \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \partial y_1 + \pi \sin^2\alpha \cos\alpha \int y_1^2 \cdot \partial y_1 \\
&= \tfrac{1}{2}\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \cdot y_1^4 + \frac{\pi}{3} \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y_1^3 \\
&= \tfrac{1}{6}\pi \frac{y_1^3}{p} \sin^2\alpha (3y_1 \sin^2\alpha + 2p \cos\alpha)
\end{aligned} \tag{46}$$

wo wie ad 18 die Constante fortfällt.

20. Der Unterschied der beiden Körper Formel 45 nnd 46 ist = dem zweiten Gliede in Formel 46

$$= \tfrac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cos\alpha \cdot y^3.$$

Dieser Unterschied ist offenbar der Körper, welcher entsteht, wenn das Dreieck POU nm den Dnrchmesser sich dreht; man findet denselben sofort nach der Guldinschen Regel (pag. 229):

Es ist nämlich der Flächeninhalt von $\triangle OPU = \tfrac{1}{2} \cdot y_1^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Die Entfernnng seines Schwerpunkts vom Durchmesser $= \tfrac{1}{3} \cdot y_1 \sin\alpha$.

Die Peripherie vom Halbmesser $1 = 2\pi$.

Daher der Körper
$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{3} y_1 \sin\alpha \cdot \tfrac{1}{2} y_1^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \tfrac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y^3 \tag{47}$$

21. Bezeichnet man die Entfernnng HU des Dnrchmessers von der Axe mit h, so findet man die Formel für den Körper, den die Fläche DOU bei ihrer Drehnng nm DU beschreibt, wenn man $OU = y_1$, $DU = x_1$ setzt.

Nun hat man für den Parabelpunkt O in Beziehnng auf die Axe $EH = x$ und $HO = y$

1. $HO^2 = p \cdot EH$ oder $y^2 = px$.

Ferner ist $EH = EG + GH$

2. oder $x = \dfrac{h^2}{p} + x_1$

Ebenso $HO = HU + UO$

3. oder $y = h + y_1$

folglich ist x und y dnrch x_1 und y_1 ausgedrückt die obige Coordinatengleichnng.

4. $(h + y_1)^2 = p\left(\dfrac{h^2}{p} + x_1\right) = h^2 + px_1$

5. und $p = \dfrac{(h + y_1)^2 - h^2}{x_1} = \dfrac{y_1}{x_1}(2h + y)$

Dieselbe Gleichung (4) differenzirt gibt

$$2(h + y_1)\partial y_1 = p\,\partial x_1$$

6. woraus $\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{2(h + y_1)}{p}$

Nnn hat man den Körper

$$\begin{aligned}
K &= \pi \int y_1^2 \partial x = \pi \int y_1^2 \frac{2(h + y_1)}{p} \partial y_1 \\
&= \frac{2\pi}{p}\left(\int h y_1^2 \partial y_1 + \int y_1^3 \partial y_1\right) \\
&= \frac{2\pi}{p}\left(\tfrac{1}{3} h y_1^3 + \tfrac{1}{4} y_1^4\right) = \tfrac{1}{6}\frac{\pi}{p} y_1^3 (4h + 3y_1)
\end{aligned} \tag{48}$$

und wenn man aus (5) p durch h, x, und y, ausdrückt

$$K = \tfrac{1}{6}\pi x_{,} y_{,}^2 \frac{4h + 3y_{,}}{2h + y_{,}} \qquad (49)$$

Setzt man h negativ, liegt also D' statt D um die Entfernung $HU' = h$ unterhalb der Axe, so ist $U'O = y$, und der Körper K ist der, welcher durch die Drehung der Ebene $D'EDOU'$ um den Durchmesser $D'U'$ erfolgt

$$K = \tfrac{1}{6}\pi x_{,} y_{,}^2 \frac{3y_{,} - 4h}{y - 2h} \qquad (50)$$

für $h = 0$ entsteht der Körper durch die Drehung der $ODEH$ um die Axe EK

$$K = \tfrac{1}{2}\pi x_{,} y_{,}^2$$

22. Der Körper, welcher entsteht, wenn die Ebene ODU um die Ordinate OU sich herumdreht.

Setzt man die Höhe des Parabelpunkts O von der Axe, also $HO = h$, die Endordinate $OU = y$; die Abscisse $DU = x$

so ist $UH = DG = h - y$ (1)

$$EG = EH - GH = \frac{h^2}{p} - x \qquad (2)$$

und es ist

$$(h - y)^2 = p\left(\frac{h^2}{p} - x\right) = h^2 - px \qquad (3)$$

Nun ist für den Fall, daſs die Ebene $UDEH$ um die Ordinate OH sich dreht:

$$K = \pi \int x^2 \frac{\partial (h - y)}{\partial x} \cdot \partial x \qquad (4)$$

Nun ist aus Gleichung 3

$$2(h - y)(-\partial y) = -p\,\partial x$$

woraus $\dfrac{\partial (h - y)}{\partial x} = \dfrac{p}{2(h - y)}$

und

$$K = \pi \int x^2 \cdot \frac{p}{2(h - y)} \cdot \partial x = \frac{p\pi}{2}\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{h^2 - px}}$$

Setzt man, um das zu integrirende Differenzial rational zu machen

$$h^2 - px = z^2$$

so ist $x = \dfrac{h^2 - z^2}{p}$

$$-p\,\partial x = 2z\,\partial z \text{ und } \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{-2z}{p}$$

folglich
$$K = -\frac{\pi p}{2}\int \frac{(h^2 - z^2)^2}{p^2 z} \cdot \frac{2z\,\partial z}{p} = -\frac{\pi}{p^2}\int (h^2 - z^2)^2\,\partial z$$

$$= -\frac{\pi}{p^2}\int (h^4 - 2h^2 z^2 + z^4)\,\partial z$$

$$= -\frac{\pi}{p^2}(h^4 z - \tfrac{2}{3}h^2 z^3 + \tfrac{1}{5}z^5) + C$$

$$= -\frac{\pi}{15p^2}(8h^4 + 4h^2 px + 3p^2 x^2)\sqrt{h^2 - px} + C.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und $K = 0$ mithin ist

$$0 = -\frac{\pi}{15p^2} \cdot 8h^4 \cdot h = -\frac{8\pi}{15p^2}h^5 + C$$

und es ist vollständig. Der Körper aus der Drehung der Ebene ODU um OH =

$$K = \frac{\pi}{15p^2}\left[8h^5 - (8h^4 + 4h^2 px + 3p^2 x^2)\sqrt{h^2 - px}\right] \qquad (51)$$

Für $x = EH = \dfrac{h^2}{p} - x$ wird $\sqrt{h^2 - px} = 0$ und man hat den Körper der durch die Umdrehung der ganzen Ebene $ODEH$ um die Ordinate OH hervorgeht

$$K = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{h^5}{p^2} \qquad (52)$$

23. Den Körper, welchen die Ebene DNW durch ihre Umdrehung um die Linie DW erzeugt.

Setzt man $DG = h$, $GE = \dfrac{h^2}{p}$, $WN = y$, $DW = x$, so ist

$$(WX - WN)^2 = p\,(GE - WD)$$

oder $(h - y)^2 = p\left(\dfrac{h^2}{p} - x\right) = h^2 - px$

hieraus $2(h - y)(-\partial y) = -p\,\partial x$

mithin $\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{2(h - y)}{p}$

Nun ist, wenn man y als den Anfangspunkt der Abscissen annimmt und die Fläche $YWEN$ um YW sich drehend denkt

$$K = \pi \int y^2\,\partial x = \pi \int y^2 \cdot \frac{2(h - y)}{p}\,\partial y = \frac{2\pi}{p}\int (hy^2 - y^3)\,\partial y = \frac{\pi y^3}{6p}(4h - 3y) \qquad (53)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $y = 0$ auch $K = 0$ wird, und es ist dieser Werth = dem Inhalt des Umdrehungskörpers wenn die Ebene DNW um DW sich herumdreht.

Setzt man $y = h$, so hat man den Körper, der von der Umdrehung des Bogens DBE um DY erzeugt wird

$$K = \frac{\pi}{6p} \cdot h^4 = \tfrac{1}{6}\pi\, DG^2 \times EG \qquad (54)$$

Die Formel wird sehr weitläufig entwickelt, indem man x statt y einführt. Man erhält sie auch, wenn man aus der obigen Formel $(h - y)^2 = h^2 - px$ $y = h - \sqrt{h^2 - px}$ entwickelt und diesen Werth in Formel 53 einsetzt

$$K = \frac{\pi}{6p}\left[4h^3 - 3hpx - (4h^2 - px)\sqrt{h^2 - px}\right](h + 3\sqrt{h^2 - px})$$

$$= \frac{\pi}{6p}\{-8h^4 + 12h^2px - 3p^2x^2 + 8h(h^2 - px)^{\frac{3}{2}}\} \qquad (55)$$

24. Dreht sich die Ebene EFZ um die Linie EY, so erhält man den Umdrehungskörper durch folgende Gleichung:

Man setze $EZ = x$, $FZ = y$, so ist

$$K = \pi \int y^2 \partial x$$

Nun ist $EZ^2 = p \cdot FZ$ oder $x^2 = py$

woraus $y^2 = \frac{x^4}{p^2}$

also

$$K = \frac{\pi}{p^2}\int x^4 \cdot \partial x = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{x^5}{p^2} = \tfrac{1}{5}\pi x y^2 \qquad (56)$$

Parabeln höherer Ordnung, auch Paraboloiden genannt (vergl. „Apollonische Parabel") sind Linien von der allgemeinen Gleichung

$$y^{m+n} = a^m\, x^n.$$

1. Ist $(m + n)$ gerade, n ungerade, so gibt es für jedes positive x zwei gleiche und entgegengesetzte y. Denn man hat

$$y^{2(p+q+1)} = a^{2p+1} \times x^{2q+1}$$

es ist also

$$y = \pm \sqrt{\left(a^{\frac{2p+1}{p+q+1}} \times x^{\frac{2q+1}{p+q+1}}\right)}$$

2. Sind $(m + n)$ und n ungerade, so gibt es nur einen möglichen Werth für y und zwar mit dem Vorzeichen von x. Denn man hat

$$y^{2p+1} = a^{2(p-q)} \times (\mp x)^{2q+1}$$

woraus $y = a^{\frac{2(p-q)}{2p+1}} \times \mp \sqrt[2p+1]{x^{2p+1}}$

die einzig mögliche Wurzel.

3. Sind $(m + n)$ ungerade und n gerade, so existirt nur ein positiver Werth von y, x mag positiv oder negativ sein. Denn haben in der Gleichung

$$y^{m+2p} = a^m \times (\mp x)^{2p}$$

$(m + 2p)$ und $2p$ keinen gemeinschaftlichen Factor, so ist

$$y = a^{\frac{m}{m+2p}} \times \sqrt[m+2p]{+x^{2p}}$$

4. Sind $(m + n)$ und n gerade, so können alle drei vorhin betrachteten Fälle vorkommen. Denn es sei

$$y^{2np} = a^{2n(p-q)} \times (\mp x)^{2nq}$$

so entsteht durch Ausziehung der $2n$ten Wurzel

$$y^p = a^{(p-q)} \times (\mp x)^q$$

Haben nun p und q keinen gemeinschaftlichen Factor, so kann sein:

Entweder p gerade und q ungrade (erster Fall); oder p und q ungerade (zweiter Fall) oder p ungerade und q gerade (dritter Fall).

Die Parabeln von der Form $y^m = a^{m-1}x$ heifsen eine quadratische, wenn $m = 2$ ist; eine cubische, wenn $m = 3$ ist, eine biquadratische oder sursolide, wenn $m = 4$ ist.

5. Die höhere Parabel $x^3 = py^2$ hat die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie der Parabel Evolute ist. In dem Art. „Evolute", pag. 62 ist die Formel II. die Länge deren Abscisse a, die Formel III. die der Ordinate b beide rechtwinklig und entsprechen der Abscisse x und der Ordinate y der Parabel, den Scheitel als Anfangspunkt und die Axe als Abscissenlinie genommen.

Nun ist $y^2 = px$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{p^2}{4y^2} = \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p\partial y}{2y^2}$$

Diese Werthe in den Ausdruck für a gesetzt, gibt

$$a = x - \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2} \cdot \left(-\frac{2y^2}{p\partial y}\right) \cdot \frac{p}{2y} = x + \frac{p^2 + 4y^2}{4y\,\partial y} = x + \frac{p^2 + 4y^2}{2p} = \tfrac{1}{2}p + \frac{3y^2}{p}$$

Dieselben Wartha in den Ausdruck für b gesetst giht

$$b = y + \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2} \cdot \left(-\frac{2y^2}{p\partial y}\right) = y - \frac{p^2 + 4y^8}{2p\,\partial y} = y - \frac{p^2 + 4y^2}{p^2} \cdot y = -4\frac{y^3}{p^2}$$

Um nnn die obere allgemeine Form der Glaichung zwischen a nnd b (als x nnd y) nachznweisen hat man

aus $\quad a = \frac{1}{2}p + \frac{3y^2}{p}$

$$(a - \tfrac{1}{2}p)^3 = \frac{27\,y^6}{p^3}$$

nnd $\quad b^2 = 16\,\frac{y^6}{p^4}$

Hieraus ist

$$(a - \tfrac{1}{2}p)^3 = \left(\frac{27}{16}p\right) b^2$$

Parabolisch ist was in Beziehnng zur Parabel steht.

Parabolische Asymptote ist an einer krnmmen Linie höherer Ordnung eine Asymptote in der Form einer Parabel.

Parabolische Curve ist eine Curve, welche der Gleichung angehört

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots .\, mx^m$$

von einer unbestimmten Anzahl Gliedern, wogegen eine Cnrve von der Gleichung

$$y = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \ldots .$$

eina hyperholische Curve heifst.

Parabolischer Hufabschnitt ist der durch eine Parabelebene vom Kegel abgeschnittene Huf.

Es sei CAB der Axendurchschnitt eines geraden Kegels, C dessen Spitze, AB die Grundlinie. Ist $DE \neq BC$, so gibt der Schnitt durch DE eine Parahel, und es soll der von dieser Parabelebene DE, der Kegelfläche DA nnd der Grundfläche AE eingeschlossene hufförmige Körper ermittelt werden.

Fig. 873.

Bezeichnet man BC mit b AB mit $2r$, legt zwischen A und DE eina zweite Fläche durch die mit DE parallele FG, fällt das Loth AJ, so hat man

$$FG = \frac{b}{2r}x$$

$$AJ = x \sin \alpha$$

Beschreiht man über AB den Halbkreis, so ist diese die halbe Grnndfläche des Kegels, nnd errichtet man dia Ordinate GH, bezeichnet diese mit s, so ist

$$s^2 = AG \times BG = x(2r - x)$$

die durch FG gelegte Parabelfläche ist

$$F = \tfrac{2}{3} FG \times 2s = \tfrac{2}{3} s \cdot \frac{b}{2r} x = \tfrac{2}{3} \frac{b}{r} x \sqrt{2rx - x^2}$$

Bezeichnet man den Abschnitt des Hnfs von A bis FG mit Z, so ist ∂Z = der Parabelebene F mal dem Differenzial der Höhe $AJ = \partial x \cdot \sin \alpha$

mithin $\partial Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{r} x \sqrt{2rx - x^2} \cdot \sin \alpha \cdot \partial x$

nnd $Z = \frac{2b}{3r} \cdot \sin \alpha \int x \sqrt{2rx - x^2}\, \partial x$

Nun ist $\int x \sqrt{2rx - x^2}\,\partial x = -\frac{1}{3}(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} + r\int \sqrt{2rx - x^2}\,\partial x$

$$\int \sqrt{2rx - x^2}\,\partial x = -\tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2}r^2\, Arc \cdot \cos \frac{r - x}{r}$$

Mithin

$$Z = \frac{2b}{3r} \sin \alpha \left[-\tfrac{1}{3}(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r(r - x)}{2}\sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2}r^3\, Arc \cos \frac{r - x}{r}\right]$$

$$= \frac{2b}{3r} \sin \alpha \left[-\tfrac{1}{6}(r + x)(3r - 2x)\sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2}r^3\, Arc \cos \frac{r - x}{r}\right]$$

$$Z = -\frac{1}{6}\,\frac{b}{r}\,\sin\alpha\cdot(r+x)(3r-2x)\sqrt{2rx-x^2} + \frac{1}{2}\,br^2\sin\alpha\cdot Arc\cos\frac{r-x}{r}$$

Geht der Schnitt *DE* durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist $x = r$ und
$Z = \frac{1}{2}\,br^2\sin\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Parabolische Konchoide. Auf eine gerade Linie *AB* legt man eine Parabel mit ihrer Axe und schiebt diese auf derselben fort. Zieht man von irgend einem festen Punkt *C* durch irgend einen und immer denselben Punkt *D* der Parabelaxe gerade Linien, so sind deren Durchschnittspunkte mit der Parabel Punkte der parabolischen Konchoide *CEF*....

Fig. 874.

Auf ähnliche Weise entstehen elliptische und hyperbolische Konchoiden. Die parabolische Konchoide hat noch einen zweiten Zweig, der durch die zweiten Durchschnittspunkte, wie *a*, *b*, *c* in denselben Parabeln bestimmt werden. Der Anfangspunkt der unteren Konchoide ist der Erzeugungspunkt *C* und die gerade Linie *CD'* nach derjenigen Parabel, welche den Punkt *C* schneidet, ist als Tangente die Grenze der Curve, die Parabelaxe *AB* ist eine Asymptote derselben.

Die obere Konchoide fängt in unendlicher Ferne links auf einem Axenpunkt an, die Axe ist also diesem Zweige auf entgegengesetzter Seite gegen den unteren Asymptote, und rechts entfernt sie sich mit den Ordinaten unendlich weit von der Axe.

Parabolisches Konoid ist der Körper, welcher entsteht, wenn ein Parabelbogen mit seiner rechtwinkligen Ordinate um die Abeisse dreht. Also der Körper im Art. „Parabel", No. 17 mit Fig. 872. Sein Inhalt ist (Formel 42)

$$K = \frac{1}{2}\,\pi\, xy^2.$$

Ein abgekürztes Konoid (Formel 43)
$= K = \frac{1}{2}\,\pi\,(xy^2 - x_1 y_1^2) = \frac{1}{2}\,\pi p\,(x^2 - x_1^2)$.

Parabolischer Spiegel, s. den Art. „Brennspiegel".

Parabolische Spindel ist der Körper, welcher entsteht, wenn eine parabolische Ebene um ihre Doppelordinate sich dreht, also der Körper in dem Art. „Parabel" No. 22, dessen Hälfte, nämlich der aus der Drehung der halben Parabelfläche *EOH* um *OH* (Fig. 872) hervorgeht.

Es ist mithin der ganze Körper $K = \frac{16}{15}\,\pi\,\frac{h^5}{p^2}$.

Setzt man $p\cdot EH = OH^2$, d. i. $pr = h^2$,
so ist $K = \frac{16}{15}\,\pi\, r^2 h$
$= \frac{8}{15}\,\pi\, r^2\,(2h)$.

Mithin beträgt dieser Körper $\frac{8}{15}$ des Cylinders, der denselben Halbmesser *EH* $= r$ und die Höhe *OH* zur halben also 2*OH* zur ganzen Höhe hat.

Paraboloide, s. v. w. „Parabeln höherer Ordnung (s. d.).

Parallaktisch ist was sich auf die Parallaxe bezieht.

Parallaktischer Winkel, s. v. w. „Parallaxe".

Parallaxe. Was unter P. verstanden wird, ist in dem Art. „Höhenparallaxe" mit Fig. 709 genau erklärt. Die P. ist am gröfsten, wenn der am Himmel befindliche Punkt im Horizont des Beobachtungsorts sich befindet (Horizontal-P.). Es ist nämlich, wenn *r* der Halbmesser der Erde, *R* den Abstand zwischen Erde und Himmelspunkt bezeichnet, die Horizontal-P.

$$P = Arc\cdot\sin\frac{r}{R} \text{ oder } \sin P = \frac{r}{R}$$

und bezeichnet *s* die Zenithdistanz des Himmelspunkts von dem Beobachtungsort, jede Höhen-P.

$$P' = arc\sin\left(\frac{r}{R}\sin s'\right) \text{ oder } \sin P' = \frac{r}{R}\sin s$$

R im Nenner zeigt an, dafs die P. mit der Entfernung des Gestirns abnimmt; da Fixsterne eine unermefsliche Weite haben, so haben dieselben auch keine P.

Bei der Horizontal-P. ist $s = 90°$; steht der Himmelspunkt im Zenith so ist $s = 0$, mithin ist für jeden solchen Punkt die P. = 0.

Die Entfernung des Mondes von der Erde ist im Mittel 51500 Meilen, der Halbmesser der Erde 860 Meilen, mithin ist die Horizontal-P. desselben $= arc\,sin\,\frac{860}{51500}$ $= arc\,sin$ 0,01699 = 58 Min. 25 Sec. In seiner gröfsten Nähe zur Erde ist die Horizontal-P. 53° 52″, in seiner gröfsten Ferne 61′ 32″ am Aequator. Die Horizontal-P. der Sonne ist bei ihrer mittleren Entfernung von der Erde 8′ 5″ bis 8′ 6″.

r im Zähler zeigt an, dafs mit dem Halbmesser der Erde die P. zunimmt. Nun ist am Aequator der Halbmesser am gröfsten und nimmt nach den Polen hin wegen der dortigen Erdabplattung immer mehr ab. Daher ist die P. am Aequator (Aequatoreal-P.) am gröfsten, am Pol (Polar-P.) am kleinsten, zwischen Pol und Aequator mit der geographischen Breite des Orts abnehmend (Lokal-P.). Die im Aequator gemessene, oder für denselben berechnete P. ist immer die Aequatoreal-Horizontal-P.

Der Unterschied zwischen der Aequatoreal- und einer Lokal-P. und selbst der Polar-P. ist unbedeutend. Bei der Sonne ist sie fast = 0.

Denn der Erdhalbmesser im Aequator ist 859,5 Meilen, in der Axe 856,5 Meilen, die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde ist circa 20,660000 Meilen.

Nun ist log 20660000 = 7,3151303
log 859,5 = 2,9342459
log 856,5 = 2,9327274

$$\text{mithin } P = Arc\left(sin = \frac{859{,}5}{20660000}\right) = Arc\,(log \cdot sin = 5{,}6191156 - 10) = 8{,}597 \text{ Secunden}$$

$$P' = Arc\left(sin = \frac{856{,}5}{20660000}\right) = Arc\,(log \cdot sin = 5{,}6175971 - 10) = 8{,}525 \text{ Secunden}$$

Giebt $P - P'$ = dem Unterschied zwischen der Aequatoreal- und der Polar-P. = 0,072 Secunden, eine durch kein Winkel-Instrument zu beobachtende Gröfse.

Dagegen beträgt der Unterschied zwischen beiden Parallaxen beim Monde 61′ 32″ − 61′ 20″ = 12 Secunden. Ueber die P. der Sonne vergleiche den Art. „Breite, geographische", pag. 408, No. 5 mit Fig 243.

Noch ist zu bemerken, dafs die Höhenparallaxen (s. d.) wie die Cosinus der scheinbaren Höhen der Himmelspunkte oder wie die Sinusse deren Zenithdistanzen sich verhalten.

2. Die bisher betrachtete P. zwischen Mittelpunkt und Beobachtungsort der Erde heifst die tägliche Parallaxe; dagegen betrachtet man auch die P. für die Fälle, wo Sonne und Erde, oder wo die in der Ekliptik diametral entgegengesetzt liegenden Punkte die Beobachtungsörter sind. Erstere P. heifst die jährliche Parallaxe, wenngleich sie eigentlich nur die vierteljährliche ist. Jährliche P. eines Gestirns ist also der Winkel, den ein in dem Gestirn befindlicher Beobachter zwischen Sonne und Erde durch Visiren mifst. Die Parallaxe ist von der Erde aus dadurch zu finden, dafs man das Gestirn am Anfang und Ende eines halbjährigen Zeitraums jedes Mal während seiner Culmination visirt. In dem Dreieck ist nun die Grundlinie der Durchmesser der Ekliptik; die beiden visirten Höhenwinkel von 180° abgezogen geben den Winkel an der Spitze und dessen Hälfte ist die jährliche Parallaxe.

3. Aus der jährlichen Parallaxe ist aber auch die Entfernung des Gestirns von beiden Beobachtungsorten, der Erde und der Sonne zu ermitteln und zwar von jedem einzeln in den visirten Dreieckseiten.

Nur sehr wenige Fixsterne haben eine mefsbare P.; sie beträgt höchstens eine Secunde. Nimmt man das Dreieck gleichschenklig, setzt die Entfernung zwischen Erde und Sonne = R, so hat man die Entfernung des beobachteten Fixsterns von unsrem Sonnensystem $L = R\,cosec(\frac{1}{2})''$, und wenn man das Dreieck rechtwinklig nimmt $L = R \cdot cot\,(\frac{1}{2})'' = \frac{R}{tg\,(\frac{1}{2})''}$.

Es ist $tg\,\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{3 \cdot 5}\alpha^5 + \ldots.$

der Bogen $\alpha = \frac{1}{2}'' = 0{,}000\,002424 \ldots.$

Man ersieht also, dafs es an dem ersten Gliede schon genug ist, und setzt man $tg\,(\frac{1}{2})'' = 0{,}000\,0025$, so erhält man $L = 400\,000 \cdot R$.

Mithin ist die Entfernung des nächsten Fixsterns von der Sonne mindestens das 400000fache des Halbmessers der Ekliptik.

4. Hat das Gestirn einen im Winkel mefsbaren Durchmesser, so kann man

dieses Winkelmaafs sowohl als auch die von dem Gestirn aus gemessene Parallaxe als Kreisbogen betrachten und beide Bogen sind die den Beobachtern scheinbaren Längen der wirklich gemessenen Längen. Da nun beide Winkel einerlei Radien haben, so verhalten sich die gemessenen Bogen, die scheinbaren Gröfsen, wie die wirklichen Gröfsen. Ist also die P. der halben Erdbahn $= p$, die scheinbare Gröfse des Gestirnsdurchmessers $= d$, so ist da die wirkliche halbe Ekliptik = 20 Millionen Meilen beträgt, der Durchmesser D des Gestirns wirklich $= \frac{d}{p} \times 20$ Millionen Ml.

5. Man hat Doppelsterne (a. d.). Durch langjährige Beobachtung mehrerer Sternsatelliten ist es mit Hülfe des Gravitationsgesetzes gelungen, die scheinbaren Durchmesser deren Bahnen zu berechnen und mit Hülfe der dritten Kepler'schen Regel die Umlaufszeiten derselben zu ermitteln. Hieraus kennt man also die Parallaxe der Erde in Beziehung auf die Satellitenbahn E, nämlich den scheinbaren Durchmesser derselben für einen auf der Erde befindlichen Beobachter.

Nach No. 2 ist nun auch die P. der Erdbahn (S) in Beziehung auf den Sternsatelliten zu berechnen, und diese scheinbaren Gröfsen verhalten sich bei den gleichgrofsen Visirlinien wie die wirklichen Gröfsen. Ist also wieder der Halbmesser der Ekliptik $= R$, so hat man den scheinbaren Durchmesser (S) der scheinbaren Satellitenbahn: dem scheinbaren Halbmesser (P) der Erdbahn = dem wirklichen Durchmesser der Satellitenbahn: dem wirklichen Halbmesser R der Erdbahn also

$$S : P = X : R$$

woraus der wirkliche Durchmesser der Satellitenbahn $X = \frac{S}{P} \cdot R$

Parallelen. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und so weit sie auch an beiden Seiten verlängert werden doch an keiner Seite zusammentreffen. Diese Erklärung ist die älteste, nämlich die 35te des Euklid und man hat dieselbe als nicht streng wissenschaftlich und gewifs mit Recht angegriffen. Aufser den vielen Gründen gegen diese Erklärung will ich noch einen anführen, den man vielleicht als zu weit hergeholt ansehen könnte, dem aber doch eine erwiesene Wahrheit zu Grunde liegt:

Man hat an Curven Asymptoten, beide Linien kommen sich mit ihrer Verlängerung immer näher ohne sich jemals zu schneiden. Die Asymptote ist geradlinig, die Curve nähert sich mit ihrer Verlängerung immer mehr der geraden Linie und kann in unendlicher Entfernung als gerade betrachtet werden, sie schneiden sich niemals, kommen einander immer näher und sind nicht einander parallel.

Unter den statt der Euklidischen Erklärung aufgestellten Erklärungen, die alle mehr oder weniger Einwendungen zulassen, ist keine augenfälliger als die: Parallelen sind gerade in einerlei Ebene liegende Linien, welche, man mag sie auf beiden Seiten noch so viel verlängern, immer einerlei Abstand von einander behalten. Aber auch gegen diese ist der Einwand zu erheben, dafs Abstand erst erklärt werden müfste, dessen Erklärung aber auf Parallelen sich gründet. Man könnte nun erklären: .... liegende Linien, zwischen welchen alle unter einem und demselben Winkel gezogene gerade Linien einerlei Länge haben

In dem Art. „Axiom“ habe ich von parallelen Linien eine genetische Erklärung gegeben, nachdem ich mich über den Character der Grundsätze im Allgemeinen und im Besondern und über die für die Geometrie vorhandenen möglichst ausführlich geäufsert Nach dem meiner Ansicht nach einzig nothwendigen Grundsatz: „Gerade Linien decken sich in allen Punkten“ sollen mehrere gerade Linien auf einander liegen, eine derselben soll man von den darunter liegenden fortbewegen ohne ihre Richtung zu ändern, wo dann beide Linien Parallele heifsen und die also beliebig auf beiden Seiten verlängert sich nirgend schneiden können.

Abgesehen von allen eifrigen Bemühungen ingeniöser Mathematiker, die Lehre von den Parallelen streng wissenschaftlich zu begründen ist es nicht Recht, dafs ein so an sich geometrisch einfacher Gegenstand mit Hülfe schneidender Linien und Winkelbestimmung definirt wird.

Die uns aufbehaltene älteste Theorie der Parallelen von Euklid ist die ungeschickteste die es nur geben kann

Der 11te Grundsatz mufs einen Knaben, der geometrische Kenntnisse sich erwerben soll, sofort abschrecken. Ich frage jeden Lehrer, ob dieser Grundsatz für einen Knaben in Rücksicht auf den Standpunkt seiner noch geringer Begriffsfähigkeit nicht viel zu zusammengesetzt ist. Nun kommt dazu, dafs Euklid auf

die gegebene Erklärnng (10) des rechten Winkels sich bernft, welcher dnrch den Begriff Nebenwinkel erklärt wird, über welchen in den vorherstehenden Erklärungen gar nicht die Rede ist, so dafs Euklid den Nebenwinkel, als wenn derselbe nichts geometrisches, sondern ein allgemein bekanntes Ding wäre ansieht. Der 11te Grundsatz heifst:

Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dafs die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.

Dieser Grundsatz ist offenbar der umgekehrte 16te Lehrsatz: An jedem Triangel ABC ist, wenn man eine seiner Seiten BC verlängert, der äufsere Winkel ACD gröfser als jeder der beiden inneren ihm gegenüber liegenden Winkel CBA, BAC.

Euklid halbirt AC in E, zieht BF durch E, macht $EF = BE$, zieht CF nnd beweist aus den gleichen Dreiecken FEC und BEA, dafs $\angle FCE = \angle BAC$, also $\angle ACD > BAC$. Die Halbirung von BC

Fig. 875.

für $\angle ACD > ABC$ ist nicht nöthig, wenn man AC verlängert; denn $\angle ACD$ ist $= \angle BCG$, also nach dem ersten Theil des Beweises $\angle ACD > \angle ABC$.

Man kann nnn den Lehrsatz auch folgender Art ausdrücken: Wenn 2 sich schneidende Linien AC, BC von einer 3ten BD geschnitten werden, so ist der äufsere Winkel ACD an der schneidenden Linie gröfser als der auf derselben Seite liegende ihm entgegengesetzte innere Winkel ABC. Dieser Satz umgekehrt würde lauten: Wenn 2 gerade Linien AB, CD von einer 3ten EF so geschnitten werden, dafs der äufsere Winkel CGF gröfser ist als der auf derselben Seite der schneidenden Linie ihm gegenüberliegende innere Winkel AHF, so schneiden sich die beiden geraden Linien nach dieser Seite hin.

Fig. 876.

Einen streng wissenschaftlichen Beweis dieses umgekehrten Satzes ist noch keinem Mathematiker gelungen, der Grnnd hiervon soll dnrch folgende beispielsweise Behandlnng anschaulich gemacht werden:

Gesetzt, die Linie BA schnitte die Linie CD nach HA hin nicht, sondern nach HB hin, so wäre nach Euklid Satz 16

$$\angle DGF > \angle BHF$$

Es ist aber

$$\angle DGF + \angle CGF = \angle BHF + \angle AHF = 2R$$

Da nun $\angle CGF > \angle AHF$

so ist $\angle DGF < \angle BHF$

folglich schneidet AC nach B hin die CD nicht.

Es wäre also nur noch möglich, dafs beide Linie AB, CD, beliebig nach beiden Seiten hin verlängert, sich nirgend schneiden. Man ziehe die mit CD Parallele JK, so sind JK und CD 2 Linien, die noch so weit auf beiden Seiten verlängert sich nirgend schneiden. Dreht man nun AB so, dafs die gleichen Scheitelwinkel AHJ und BHK immer kleiner werden, so bleibt das Verhältnifs zwischen den beiden Paar Winkeln AHF mit CGF und BHF mit DGF immer dasselbe, so lange noch BH aufserhalb und AH innerhalb JK sich befindet. Denkt man sich, dafs AB über JK hinaus die entgegengesetzte Lage annimmt, so kehrt sich das Verhältnifs um: HA schneidet die CD ganz gewifs nicht und bei HB ist die Schneidung zweifelhaft wie vorher bei HA.

Diese Zweifel aber bleiben Zweifel und es liegt dies offenbar an der schlechten Wahl des 11ten Grundsatzes.

Wenn der 11te Euklidische Grundsatz lautete: Zwei in einer Ebene liegende gerade nicht parallele Linien entfernen sich nach der einen nnd nähern sich nach der anderen Seite hin und treffen, nach dieser Richtnng hinreichend verlängert

in einem Punkt zusammen, so ist dieser Grundsatz nichts weniger als auffallend, im Gegentheil ganz hingehörig, einfach zu begreifen und beseitigt alle Schwierigkeiten.

Denn aus Satz 16 geht unmittelbar hervor: Wenn zwei gerade nicht parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind die auf der schneidenden (der convergirenden) Seite die inneren Winkel immer kleiner als zwei rechte Winkel und auf der entgegengesetzten (der divergirenden) Seite die inneren Winkel immer gröfser als zwei rechte Winkel. Sind nun die Linien parallel, so dafs sie sich nach keiner Seite hin schneiden, so mufs das Gesetz der inneren Winkel auf beiden Seiten dasselbe sein. Da nun auf beiden Seiten zugleich die inneren Winkel nicht kleiner und auch nicht gröfser als zwei rechte Winkel sein können, so müssen sie auf jeder von beiden Seiten gleich zweien rechten Winkeln sein.

Hiermit ist denn auch der umgekehrte 16te Satz erwiesen, nämlich: Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden und die inneren Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie sind kleiner als zwei rechte Winkel, so schneiden sich beide Linien nach dieser Seite hin. Denn wären sie einander parallel, so müfsten die inneren Winkel zusammen gleich zweien rechten sein, und schnitten sie sich auf der entgegengesetzten Seite, so müfsten die beiden inneren Winkel gröfser als zwei rechte sein.

Wenn zwei gerade Linien (Fig. 877) AB, CD von einer dritten EF geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, vier äufsere Winkel AHE, CGF, BHE, DGF; vier innere Winkel AHG, CDH, BHG, DGH.

Von diesen heifsen noch je zwei Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie, von welchen der eine äufserer, der andere innerer ihm gegenüberliegender Winkel ist, Gegenwinkel. Es sind diese BHE und DGE, DGF und BHF, AHE und CGE, CGF und AHF.

Ferner je zwei innerhalb der beiden Linien auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel: Innere Wechselwinkel; nämlich AHG und DGH, CGH und BHG.

Endlich je zwei aufserhalb der beiden Linien auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel: Aeufsere Wechselwinkel; nämlich AHE und DGF, BHE und CGF. Sind die beiden Linien einander parallel, so sind jedes Paar Gegenwinkel und Wechselwinkel einander gleich, welches daraus folgt, dafs die inneren auf einer Seite der schneidenden Linie gleich zweien rechten Winkeln sind.

Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt. Denn fällt man Fig. 877 von beliebigen Punkten E, F der einen der Parallelen AB auf die zweite CD die Lothe EG, FH, zieht EH, so sind als Gegenwinkel $\angle GEH = \angle EHF$, $\angle GHE = \angle FEH$. Hierzu in beiden Dreiecken die gemeinschaftliche Seite EH gibt nach Euklid 1. Buch, Satz 26 $\triangle EGH \sim \triangle HFE$, mithin $EG = FH$.

Fig. 877.

Aus der Lehre von den Parallelen folgen noch folgende wichtige Sätze über Dreiecke, nämlich:

1. In jedem Dreieck ist der Aufsenwinkel gleich den beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkeln.

2. In jedem Dreieck ist die Summe sämmtlicher drei Winkel gleich zweien Rechten. Denn zieht man Fig. 875 die mit der Seite BA parallele CF, so hat man

$\angle ACF = \angle CAB$ als innere Wechselwinkel,
$\angle FCD = \angle ABC$ als Gegenwinkel,
woraus $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$.

Da nun $\angle ACD + \angle ACB = 2R$
so ist auch

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2R.$$

Parallelen abstecken. Man soll auf dem Felde durch den Punkt C eine mit der durch Signale markirten Linie AB parallele Linie abstecken (Fig. 877).

Es gibt zwei Fälle: Entweder man kann von AB aus visiren oder nicht.* Im ersten Fall bestimmt man den Punkt D, in welchem CD normal auf AB ist, und dies geschieht mit dem Diopterkreuz, einem mit Diopteren versehenen rechtwinklig zusammengearbeiteten Kreuz von Linealen, mit dem man in AB das eine Lineal nach AB richtet und es nach und nach auf den richtigen Punkt D bringt, wo das andere Lineal nach DC zeigt,

und dann in *D* ein Signal stellt. Man bedient sich auch hierbei des Meſstisches, mit dem man eine ähnliche Einrichtung verbunden hat. Hierauf begibt man sich mit dem Instrument nach *C*, richtet das eine Lineal von *C* nach *D*, visirt mit dem andern Lineal nach rechts einen Punkt *G*, setzt dort ein Signal und *CE* ist die verlangte mit *AB* parallel abgesteckte Linie.

Kann man von *D* nach *C* nicht visiren, so nimmt man einen Punkt *A* in der Richtung *AB*, von dem man *C* sehen kann, stellt dort den Meſstisch auf, visirt nach *C*, verzeichnet auf demselben die Richtungen *AB*; *AC*, bringt den Meſstisch über *C*, stellt ihn dort auf, so daſs die gezeichnete Linie *AC* nach *CA* gerichtet wird, dann wird die gezeichnete Linie *AB* visirt, ein Signal *H* errichtet und *HC* ist die verlangte Parallele.

Ist nicht von *AB* und von keinem Punkt in *AB* nach *C* zu visiren, so wendet man die Bonssole an. Man stellt diese in irgend einem Punkt der Linie auf und beobachtet den Winkel zwischen *AB* und der Magnetnadel. Diese wieder über *C* gebracht und unter demselben Neigungswinkel visirt, gibt die richtige Parallele *GH*.

Gesetzt aber, auch das wäre nicht möglich, es wären bloſs die Punkte *A* und *B* markirt, man könnte aber weder von *A* nach *B* noch von *B* in die Richtung nach *A* visiren und man solle eine durch *C* laufende mit der unbekannten Richtung *AB* parallele Linie abstecken, von *C* sei aber auch weder nach *A* noch nach *B*

Fig. 878.

zu visiren, so ermittele zwei beliebig liegende Punkte *E*, *F*, von welchen aus *A* und *B* zugleich gesehen werden kann. Messe die Längen *EF*, *EC*, *FC*, trage diese verjüngt auf den Meſstisch, visire mit demselben von *E* aus die Richtungen *EA*, *EC*, *EB*, *EF* und von *F* aus die Richtungen *FA*, *FC*, *FB*, *FE*, verzeichne sie sofort auf dem Tisch bis zu den Durchschnittspunkten *A* und *B*, so hat man die ganze Figur im verjüngten Maaſsstab, zeichnet die Parallele *HG* und steckt sie den verjüngten Maaſsen entsprechend ab.

Parallele Himmelskugel ist die, welche von einem Pole der Erde aus gesehen wird, weil es dort scheint, als ob sämmtliche Sterne parallel dem Horizont sich umdrehten, und wo kein Auf- und Untergang statt findet.

Parallelebene, s. Bd. III, pag. 5.

Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, welches also von sechs Parallelogrammen eingeschlossen wird, von denen die einander gegenüber befindlichen parallel und congruent sind. Die vier Parallelogramme zwischen den beiden Grundflächen heiſsen Seitenflächen. Aus der Form des Körpers geht hervor, daſs man jede der Begrenzungsflächen zur Grundfläche nehmen kann. Die Begrenzungslinien der Grundflächen heiſsen Grundkanten, die der Seitenflächen Seitenkanten. Stehen die Seitenkanten normal auf den Grundkanten, so heiſst das P. normal, sonst ist es ein schräges, ein schiefes P.

Jedes P. wird durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

2. P. von einerlei Grundebene, deren gegenüberliegende Seitenflächen, sowie die den Grundflächen parallele obere Flächen paarweise in denselben Ebenen liegen, sind einander gleich.

Bei den beiden P. Fig 879 auf derselben Grundfläche *abcd* liegen die oberen Flächen *efgh* und *iklm* in einer der Grundfläche parallelen Ebene; ferner liegen die vorderen beiden Seitenflächen in einerlei Ebene und die Hinterflächen desgleichen.

Nun ist Prisma *geacli* ≅ Prisma *hfbdmk*
hiervon Prisma *hfgrli* = Prisma *hfqrli*

bleibt Parallelep. *abcdefgh* = Par. *abcdlikm*

3. P. von einerlei oder congruenten Grundebenen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Sind die Grundflächen nicht einerlei, so stelle man die beiden P. auf eine und

dieselbe Grundebene, so kann man zwei Seitenebenen des einen P. so weit verbreitern, daſs sie die verbreiterten Ebenen

Fig. 879.

zweier Seitenflächen des anderen P. überschneiden. Betrachtet man nun das zwischen den 4 Durchschnittsebenen entstandene neue P., so ist dieses nach Satz 2 dem einen wie dem andern der gegebenen P. gleich, folglich sind die gegebenen unter sich gleich.

4. P. von gleichen Höhen, deren Grundebenen Parallelogramme von einerlei oder gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind, sind gleich.

Man denke sich ein P., dessen Grundfläche mit *abps* congruent ist und mit dem P. *abcdefgh* einerlei Höhe hat, so lege man dasselbe auf *abps* und construire ein P. über *abps*, dessen Seitenkanten mit *ae* parallel laufen, so sind diese beiden über *abps* befindlichen P. nach Satz 3 einander gleich. Das neu construirte P. hat mit dem P. *abcdefgh* die Seitenkanten *ae*, *bf* gemeinschaftlich; betrachtet man daher in beiden P. die Ebene *abef* als gemeinschaftliche Grundebene, so ist *ae* beider Höhe, folglich ist nach Satz 3 das P. *abcdefgh* gleich dem über *abps* neu construirten und also auch gleich dem über *abps* gegebenen P.

5. P. von gleichen Höhen auf Grundebenen von gleicher Gröſse und gleichen Winkeln sind gleich.

Da die beiden gleichen Grundebenen *cefg*, *abcd* gleiche Winkel haben, so kann man sie, wie Fig. 880 an Ergänzungsparallelogrammen an einander setzen. Zieht man die Diagonale *hk*, so ist Prisma über *cke* = Prisma über *cka*, Prisma über *chg* = Prisma über *chd* und Prisma über *hkf* = Prisma über *hkb*. Die beiden Prismen rechts der Diagonale von dem Prisma *hkb* und die beiden Prismen links der

Fig. 880.

Diagonale von dem Prisma *hkf* fortgenommen, bleibt P. über *cefg* = P. über *abcd*.

6. P. von gleichen Grundebenen und gleichen Höhen sind gleich.

Hat das eine P. eine Grundfläche von der Seite = *ce*, das andere von der Seite = *cd*, so verwandle beide in Grundflächen von einerlei Winkel, dann sind nach Satz 4 die P. von denselben Seiten *ce* und *cd* einander gleich, beide letzten P. aber gleich nach Satz 5, mithin der Satz erwiesen.

Aus den vorgetragenen Sätzen gehen noch folgende hervor:

7. P. von gleichen Grundebenen verhalten sich wie ihre Höhen und P. von gleichen Höhen wie ihre Grundebenen.

Sind die Grundebenen Rechtecke von einer gleichen Seite, so verhalten sich P. von gleichen Höhen wie die ungleichen Grundkanten.

Sind die Grundebenen Rechtecke von ungleichen Seiten, so verhalten sich die P. von gleichen Höhen wie die Producte der Grundkanten.

Gerade P. mit rechteckigen Grundebenen verhalten sich wie die Producte der drei ungleichen Kanten.

8. P. sind ähnlich, wenn ihre homologen Winkel einander gleich sind und wenn zugleich ihre homologen Kanten in Proportion stehen.

Die Inhalte ähnlicher P. verhalten sich wie die Cubi ihrer homologen Seitenkanten.

9. Den Inhalt eines P. durch seine Kanten und Winkel anszudrücken.

Fig. 881.

Es seien A, B, C die Längen der drei Kanten eines P.; der Winkel zwischen A und B sei c, der zwischen A und C $= b$ und der zwischen B und $C = a$. Der Neigungswinkel der Kante C gegen die Grundfläche (A, B) sei $= d$. Es ist mithin der Inhalt der Grundfläche $= A \cdot B \sin c$ und der Inhalt des P. $= A \cdot B \cdot C \cdot \sin c \cdot \sin d$.

Man beschreibe nun aus der Ecke N zwischen den Kanten A und B eine Kugelfläche, so bilden die Durchschnittspunkte der Kanten mit der Kugelfläche Spitzen für ein sphärisches Dreieck, welches entsteht, wenn man diese Punkte durch gröfste Kreisbogen verbindet. Die Seiten des sphärischen Dreiecks sind die Kantenwinkel, und zwar $PR = a$, $QR = b$ und $PQ = c$; der normale Bogen von dem Durchschnittspunkt R zwischen a und b auf die Seite c ist der Neigungswinkel

Fig. 882.

(der Kantenwinkel der Kante NR gegen die Seite c) d.

Nun ist dieser Neigungswinkel d auf die Seite c nach dem Art. „Körpertrigonometrie, No. 18, Formel III. gegeben:

$$\sin d = \frac{2}{\sin c} \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}$$

Es ist wie eben erwiesen der Inhalt des P. $= ABC \sin c \cdot \sin d$.

Mithin $\text{P.} = 2ABC \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}$

10. Bei gegebenen Kanten und Winkeln eines P. die Figur und den Flächeninhalt eines Diagenalschnitts zu bestimmen.

Es sei $ACFH$ der zu berechnende Durchschnitt, gdh ein aus A beschriebenes sphärisches Dreieck, hk ein Bogen von der Spitze h nach dem Durchschnittspunkt k des Bogens dg mit der Diagonale. Ist nun die Kante $AB = a$, die Kante $AD = b$, die Kante $AH = c$; $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAH = \beta$, $\angle DAH = \gamma$, so hat man in dem geradlinigen Dreieck ACD

die Diagonale $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$ (1)

Da nun $AC : DC = \sin ADC : \sin DAC$

Fig. 883.

so ist $\sin DAC = \sin dk = \frac{DC}{AC} \sin ADC = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}$ (2)

Nun ist in dem sphärischen Dreieck dgh nach No. 10

$$\cos gdh = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \quad (3)$$

und in dem sphärischen Dreieck dhk nach No. 11

$$\cos hk = \cos dh \cdot \cos dk + \sin dh \cdot \sin dk \cdot \cos hdk$$

d. h. $\cos hk = \cos \gamma \cdot \cos dk + \sin \gamma \cdot \sin dk \cdot \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}$

$$= \cos \gamma \cdot \cos dk + \sin dk \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha} \quad (4)$$

Aus Gleichung 2 hat man

$$\cos^2 dk = 1 - \sin^2 dk = 1 - \frac{a^2 \sin^2\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$
$$= \frac{a^2\cos^2\alpha + b^2 + 2ab\cos\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} = \frac{(b + a\cos\alpha)^2}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

woraus
$$\cos dk = \frac{b + a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}} \tag{5}$$

Diese Werthe von $\sin dk$ und $\cos dk$ in Formel 4 substituirt gibt

$$\cos hk = \cos\gamma \cdot \frac{b + a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}} + \frac{a(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$$

oder
$$\cos hk = \cos CAH = \frac{a\cos\beta + b\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}} \tag{6}$$

Hieraus erhält man nun

$$\sin hk = \sin CAH = \frac{\sqrt{[a^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma)]}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}} \tag{7}$$

womit also der Winkel zwischen einer Seitenkante und der Diagonale der Grundfläche gefunden ist.

Der Flächeninhalt des Diagonalschnitts $ACFH = J$ ist also $= AC \times AH \times \sin CAH$.

Nun ist $AH = c$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, mithin ist

$$J = c\cdot\sqrt{[a^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma)]} \tag{8}$$

11. **Aus den gegebenen Winkeln, welche die drei Kanten eines P. miteinander bilden, die Neigungswinkel dessen Seitenflächen zu finden.**

Verfährt man wie No. 10, so hat man in dem sphärischen Dreieck, weil die die Winkel gdh, dgh und dhg repräsentirenden Bogen auf einander normal stehen, die eben genannten Winkel als Neigungswinkel der Flächen. Es sind also in dem sphärischen Dreieck die Seiten α, β, γ gegeben und man hat nach dem Art. „Körpertrigonometrie", No. 10, Formel I, pag. 41,

den Neigungswinkel dhg zwischen den Seitenflächen AE und BH

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

den Neigungswinkel dgh zwischen den Seitenflächen BD und BH

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta + \alpha - \gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}}$$

den Neigungswinkel gdh zwischen den Seitenflächen BD und AE

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma + \beta - \alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

12. **Bei gegebenen Kanten und Winkeln eines P. die Diagonale des P. und den Neigungswinkel des Diagonalschnitts gegen die Grundfläche zu bestimmen.**

Ziehe die Diagonalen AF, CH, so ist in den geradlinigen Dreiecken ACH und ACF: $\cos ACF = -\cos CAH$, daher

$CH^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH\cdot AC\cdot\cos CAH$

$AF^2 = AH^2 + AC^2 + 2AH\cdot AC\cdot\cos CAH$;

die Werthe von AC aus Gleichung 1 und $\cos CAH$ aus Gleichung 4 No. 10 genommen ($AH = c$), gibt

$$\left.\begin{matrix}CH^2\\AF^2\end{matrix}\right\} = c^2 + (a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha) \mp 2c\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\cdot\frac{a\cos\beta + b\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha \mp 2ac\cos\beta \mp 2bc\cos\gamma$$

Den Neigungswinkel dkh zwischen den Ebenen $ACHF$ und $ABCD$ erhält man aus dem sphärischen Dreieck dhk und es ist bei gegebenem $\angle dk = \angle DAH = \gamma$,

$\angle hk = \angle HAF$ und $\angle dk = \angle DAC$

$$\cos dkh = \frac{\cos dh - \cos hk \cdot \cos dk}{\sin hk \cdot \sin dh}$$

Nun ist $dh = \gamma$, $\cos hk$ siehe Gleichung 6, $\sin hk$ siehe Gleichung 7 und $\cos hk$ s. Gleichung 6, No. 10.

13. Der Art. „Maximum und Minimum" enthält in No. 8, 10, 12, 14 die Nachweise über die kleinsten Oberflächen der P. und in No. 9, 11, 13, 15, 16, 17 über die gröfsten körperlichen Inhalte derselben.

Parallelepipedum der Kräfte, s. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 27, pag. 66.

Parallelflächig, (Kryst.), im Gegensatz von geneigtflächig, sind Krystalle der homoedrischen Form, bei welchen die parallelen Flächen durch die Vergröfserung der abwechselnden Flächengruppen zum Theil geblieben, während sie bei den geneigtflächigen verloren gegangen sind.

Parallelkreise sind Kreise auf einer Kugeloberfläche, die mit einander parallel laufen. Besonders nennt man solche Kreise P., die auf der hohlen Himmelskugel und den Weltkörpern, so auch auf der Erde, mit dem Aequator, der immer der gröfste der Parallelkreise ist, parallel laufen. Die P. an der Himmelskugel sind die astronomischen, die auf der Erde die geographischen P. Alle unter demselben P. liegenden Orte haben einerlei geographische Breite. Die P. werden um so kleiner, je näher sie den Polen kommen und verhalten sich in ihren Längen wie die Cosinusse der geographischen Breiten. Jeder P. wird in 360 Grade getheilt, die Grade der P. nehmen also ebenfalls in dem Verhältnifs der Cosinusse ihrer geographischen Breiten ab.

Parallellineal ist ein Zeicheninstrument, mit welchem man parallele Linien auf dem Papier zieht. Es besteht aus zwei genau gearbeiteten neben einander gelegten Linealen und ist mit zwei parallelen um ihre Befestigungsdorne drehbaren Metallbändern zusammengefügt, an welchen die Lineale leicht in der nöthigen Entfernung auseinander geschoben werden.

Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Die P. sind dieser Erklärung zufolge Vierecke mit Seiten als Parallelen zwischen Parallelen; demnach sind je 2 gegenüberliegende Seiten und je 2 gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Ferner sind je 2 an einer der Seiten liegende Winkel zusammengenommen gleich zweien Rechten, sämmtliche 4 Winkel zusammen also = 4 Rechten.

Aus diesen Gründen können P. ihrer Form nach auf zweierlei Weise verschieden sein.

1. Es können die 4 Seiten entweder alle gleich oder ungleich sein, und 2. Es können alle Winkel entweder alle gleich oder ungleich, d. h. rechte oder schiefe Winkel sein. Man hat demnach viererlei P.:

1. P. mit lauter gleichen Seiten und lauter gleichen (rechten) Winkeln.

2. P. mit lauter gleichen Seiten und ungleichen (schiefen) Winkeln.

3. P. mit ungleichen Seiten und lauter gleichen (rechten) Winkeln.

4. P. mit ungleichen Seiten und ungleichen (schiefen) Winkeln.

Das erstgenannte P. eine reguläre Figur, ist das Quadrat.

Das zweite P. der Rhombus, die Raute.

Das dritte P. das Oblongum, Rectangulum, Rechteck.

Das vierte das Rhomboid, die längliche Raute.

Euklid hat den allgemeinen Namen: Parallelogramm nicht. Nur die vier einzelnen genannten P. und er setzt sie schon zu Anfang unter die Erklärungen mit Angabe ihrer Eigenschaften.

Erklärung 30 lautet: Unter den vierseitigen Figuren heifst diejenige ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinklig ist, ohne also vorher nachzuweisen, dafs beide Eigenschaften möglich sind. Dieselben Fehler finden auch bei den drei folgenden Erklärungen von Oblongum, Rhombus und Rhomboid statt, und es ist dies um so auffallender, da er erst die Erklärung von Parallel die 35te sein läfst. Die spätere Einführung des Ausdrucks, Parallelogramm, zuerst Buch I, Satz 41, ist wohl von dem Uebersetzer geschehen.

Parallelogramme werden von jeder Diagonale in 2 congruente Dreiecke getheilt.

In rechteckigen P. sind beide Diagonalen einander gleich, in schiefwinkligen ungleich.

Nimmt man eine Seite eines P. zur Grundlinie, so heifst die zwischen ihr und der gegenüberliegenden Seite gezogene Normale die Höhe des P.

P. von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Der Inhalt eines P. ist gleich dem Product: Grundlinie mal Höhe.

Die Summe der Quadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

Fig. 881.

Also
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$
Denn es ist
$BD^2 = DE^2 + BE^2 = AD^2 - AE^2 + BE^2$
$AC^2 = CF^2 + AF^2 = BC^2 - BF^2 + AF^2$

Addirt gibt
$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 - 2AE^2 + (AB + AE)^2 + (AB - AE)^2 = AD^2 + BC^2 + AB^2 + CD^2$

In dem Art. „Constructionen aus der Elementargeometrie“ sind der Reihenfolge nach folgende Zeichnenaufgaben gelöst pag. 67 u. f.:

1. No. 71. Dasselbe Quadrat im Halbkreise in ein Rectangel im Halbkreise zu verwandeln.

2. No. 72. In einen Kreis ein Rectangel zu beschreiben, dessen anliegende Seiten wie $n : m$ sich verhalten.

3. No. 85. Eine gegebene gerade Linie um ein Stück zu verlängern, dafs das Rechteck zwischen der ganzen verlängerten Linie und dem Verlängerungsstück einem gegebenen Quadrat gleich werde.

4. No. 86. Eine gegebene gerade Linie in 2 Theile zu theilen, so dafs das Quadrat des einen Theils gleich wird dem Rectangel zwischen dem anderen Theil und einer zweiten gegebenen geraden Linie.

5. No. 87. Eine gegebene gerade Linie so zu schneiden, dafs das unter der ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei (Euklid II, 11).

6. No. 99. Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

7. No. 100. Ein Parallelogramm in ein anderes P. mit denselben Winkeln und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

8. No. 101. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

9. No. 102. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

10. No. 133. Ein Parallelogramm gleich der Hälfte eines gegebenen Vierecks zu zeichnen.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten, s. u. „Mittelgeschwindigkeit.“

Parallelogramm der Hyperbel ist das Rectangel, dessen eine Seite eine vom Mittelpunkt der Hyperbel ab auf einer Asymptote gemessene beliebige Länge und dessen zweite Seite die von diesem genommenen zweiten Punkt der Asymptote parallel der anderen Asymptote bis zum nächsten Hyperbelzweig gezogene gerade Linie ist.

In dem Art. „Hyperbel“, pag. 265, Fig. 718 ist M der Mittelpunkt beider zusammengehörigen Hyperbeln, von denen die eine $QDEF$ gezeichnet ist. ML, MX sind die beiden Asymptoten. Die eine Seite des P. ist MV, die zweite ist die mit MX parallele VD und das gezeichnete P. der Hyperbel ist $MV \times VD$.

In No. 18 desselben Art. pag. 270 ist nachgewiesen, dafs jedes dieser P. einen constanten Werth $= \frac{1}{4}e^2$ hat, wo e die Excentricität $= \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{ME^2 + NE^2}$. $\frac{1}{4}e^2$ heifst die Potenz der Hyperbel.

Parallelogramm der Kräfte, s. u. „Kräfte im Gleichgewicht“, No. 11, pag. 60.

Parallelograph ist ein Instrument, um auf dem Papier Parallelen zu zeichnen.

Paralleltrapez oder Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten, die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten sind nicht parallel. Der Flächeninhalt desselben ist, wenn die Höhe zwischen beiden mit h, die parallelen Seiten mit a, b bezeichnet werden $= \frac{a + b}{2} \cdot h$.

Parameter sind constante Gröfsen, die sich auf die Durchmesser, zunächst auf die Axen der Kegelschnitte beziehen. Die Parabel hat nur eine Axe, daher nur einen P. $y^2 = Ax$. x die Abscisse, vom Scheitel aus genommen, ist eine Länge, ein Theil der Axe, y die rechtwinklige Ordinate und der Parameter A also die dritte Proportionale zwischen beiden.

Ellipse und Hyperbeln haben zwei Axen, also auch zwei P.

Die Gleichung für die Ellipse ist $y^2 = Ax - Bx^2$; die Parameter A und B bestimmen die Gröfsen der Axen: die eine

Axe ist $\frac{A}{B}$, die zweite $\frac{A}{\sqrt{B}}$ (s. „Ellipse“, No. 6, pag. 42). Ist $B > 1$, so ist $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die grofse, $\frac{A}{B}$ die kleine Axe; ist $B < 1$, so ist $\frac{A}{B}$ die grofse, $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die kleine Axe. Bezeichnet man die eine Axe (wie „Ellipse“ pag. 43) mit $2a$, die andere mit $2c$, so ist

$$A = \frac{2c^2}{a} \text{ und } B = \frac{c^2}{a^2}$$

Die Gleichnng für die Hyperbel ist $y^2 = Ax + Bx^2$. Auch hier ist die eine Axe $= \frac{A}{B}$, die zweite $= \frac{A}{\sqrt{B}}$ (s. „Hyperbel“, No. 3, Formel 16, 17, pag. 262) nnd es ist

$$A = \frac{2c^2}{a},\ B = \frac{c^2}{a^2}$$

Partialdivision, Partialdividend, Partialquotient, s. n. „Bnchstabenrechnnng“, No. 3, pag. 439 nnd unter „Division“, pag. 317.

Partialmultiplication, P.-multiplicandus, P.-multiplicator, P.-product, s. u. „Buchstabenrechnnng“ und „Multiplicator“, pag. 438.

Partielle Differenzen von Funtionen. Wenn man in einer Function U die Veränderlichen $x, y, z \ldots$ derselben, jede nm eine kleine Gröfse Δx, Δy, Δz wachsen läfst, die neue Function bildet, nnd zieht die erstere von der zweiten ab, so erhält man die Differenz beider Fnnctionen, die von denselben Veränderlichen abhängt.

1tes Beispiel.

$$U = ax + by$$
$$U + \Delta U = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y)$$

worans $\Delta U = a\Delta x + b\Delta y$

2tes Beispiel.

$$U = ax^3 + by^3$$

also $U + \Delta U = a(x + \Delta x)^3 + b(y + \Delta y)^3$

Die Klammern aufgelöst und abgezogen gibt

$$\Delta U = (2ax + a\Delta x)\Delta x + (3by^2 + 3by\Delta y + b\Delta y^2)\Delta y$$

Die ans beiden Gliedern bestehende Differenz heifst die Totaldifferenz oder die vollständige D., jedes der beiden Glieder ist eine partielle Differenz. Die erste D. ist diejenige D., wenn x allein veränderlich nnd y constant, die zweite D. diejenige D., wenn y allein veränderlich nnd x constant betrachtet wird.

3tes Beispiel.

$$U = x^2 + axy + y^2$$
$$U + \Delta U = (x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2$$

und $\Delta U = (2x + \Delta x + ay)\Delta x + (ax + 2y + \Delta y)\Delta y + a\Delta x \cdot \Delta y$

Diese partielle D. hat noch ein drittes Glied, welches das Prodnct beider Znwachse znm Factor hat, und dieser Fall tritt jedesmal ein, wenn in der Function zwei und mehrere Veränderliche ein Product bilden. Dieses dritte Glied ist die partielle D. des ersten Gliedes, wenn man darin allein y variabel nnd x constant setzt, oder die partielle D. des zweiten Gliedes, wenn man darin x allein variabel nnd y constant setzt. Es ist mithin die Formel mit dreien Gliedern die allgemein gültige; denn man sieht, dafs in den beiden ersten Beispielen das Glied mit $\Delta x \cdot \Delta y = 0$ werden mnfs, weil in jeder das erste Glied kein y nnd das zweite kein x enthält.

4tes Beispiel.

$$U = y^2x + yx^2 + ax^3$$
$$U + \Delta U = (y + \Delta y)^2(x + \Delta x) + (y + \Delta y)(x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x)^3$$

hieraus $\Delta U = (y^2 + 2yx + y\Delta x + 3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2)\Delta x$
$+ (2yx + x\Delta y + x^2)\Delta y + (2y + \Delta y + 2x + \Delta x)\Delta x \cdot \Delta y$

5tes Beispiel. $U = \frac{x}{y}$

also $U + \Delta U = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$

Nimmt man die Differenz anf die blofs Variabele x, so erhält man

Das erste Glied $\frac{y\Delta x}{y^2} = \frac{\Delta x}{y}$

Die Differenz auf die blofs Variabele y genommen,

das zweite Glied $-\frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$

Und wenn man das erste Glied auf y oder das zweite auf x sich ändern läfst, das dritte Glied

$$\frac{\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{\Delta x}{y} = -\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{y(y+\Delta y)}$$

oder

$$-\frac{(x+\Delta x)\Delta y}{y(y+\Delta y)} + \frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)} = -\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{y(y+\Delta y)}$$

2. Es sei Z eine Function zweier veränderlichen Gröfsen x, y, und gegeben ist die Differenzengleichung:

$$\Delta Z = A\,\Delta x + B\,\Delta y$$

wo $A\Delta x$ und $B\Delta y$ die partiellen Differenzen von ΔZ, erstere auf x, letztere auf y allein und A und B Functionen von x und y sind. Ist ferner die partielle Differenz von A in Beziehung auf $y = p\,\Delta y$, die von B in Beziehung auf $x = q\,\Delta x$, so hat man die partiellen Differenzengleichungen

$$\Delta A = p\,\Delta y$$
$$\Delta B = q\,\Delta x$$

und wenn blofs A veränderlich und B constant genommen wird:

$$\Delta Z = (A + \Delta A)\,\Delta x + B\,\Delta y \quad (1)$$
$$= (A + p\,\Delta y)\,\Delta x + B\,\Delta y$$
$$= A\,\Delta x + B\,\Delta y + p\,\Delta x \cdot \Delta y \quad (2)$$

Setzt man (statt 1) A constant und B veränderlich, also

$$\Delta Z = A\,\Delta x + (B + \Delta B)\,\Delta y$$

und verfährt wie so eben, so erhält man

$$\Delta Z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + q \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (3)$$

Es geht also hervor, dafs die auf x und y von A und B genommenen Partial-Differenzen p und q einander gleich sind.

Partielle Differenzialgleichungen. Der Begriff von Partiellem Differenzial ist in dem Art. „Differenzial", No. 45, pag. 273 angegeben. So wie partielles Differenzial dem Totaldifferenzial, so bildet die partielle Differenzialgleichung den Gegensatz von Totaldifferenzialgleichung.

Man ersieht übrigens aus dem vorstehenden Art. dafs partielle Differenzen gegen die vollkommenen Differenzen in demselben Verhältnifs stehen, wie es bei den Differenzialen der Fall ist.

Ist eine Differenzialgleichung gegeben, in welcher mehr als zwei Veränderliche vorkommen, die alle eine Beziehung, eine gegenseitige Abhängigkeit zu einander haben, und man differenzirt in Beziehung auf irgend eine derselben, diese als die Urveränderliche betrachtet, alle übrigen als abhängig veränderliche genommen, so entsteht eine Total-Differenzialgleichung. Differenzirt man aber nur eine einzige der übrigen Veränderlichen als veränderlich, die anderen Veränderlichen dagegen als constant angesehen, so entsteht eine partielle Differenzialgleichung.

Es sei z. B. gegeben die Differenzialgleichung

$$A\,\partial x + B\,\partial y = C\,\partial z$$

so sind folgende sechs Gleichungen Total-D.-Gleichungen:

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{B} = \frac{C}{B} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$2.\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

$$3.\quad \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$4.\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C} + \frac{A}{C} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$5.\quad \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{C}{A}$$

$$6.\quad \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{C}{B}$$

Die folgenden sechs Gleichungen, in welchen jedesmal eine dritte der Veränderlichen constant gesetzt ist, sind partielle D.-Gleichungen.

$$1.\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A}{B};\quad 2.\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A}{C};\quad 3.\ \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{B}{A}$$

$$4.\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C};\quad 5.\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{C}{A};\quad 6.\ \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{C}{B}$$

2. Eine Function von einer einzigen Veränderlichen wird allgemein bezeichnet: $F(x)$; $f(x)$; $\varphi(x)$, wo x die einzige Urveränderliche ist und die also keine partiellen D.-Gleichungen zuläfst.

Eine Function von mehreren Veränderlichen: $F(x, y)$; $f(x, y, z)$; $\varphi(x, y, z, u)$ u. s. w.

Die Differenzialquotienten der Functionen werden bezeichnet:

von $F(x)$ mit $F'(x)$; von $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x)$; von $f(x, y)$ mit $f'(x, y)$.

Die Totaldifferenziale der Functionen werden bezeichnet von $F(x)$ mit $\partial x F'(x)$; von φx mit $\partial x \varphi'(x)$; von $f(x, y)$ mit $\partial x f'(x, y)$ und $\partial y f'(x, y)$, je nachdem x oder y als Urveränderliche gilt.

Die Partialdifferenzialquotienten einer Function z. B. von z werden bezeichnet:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

Die Partialdifferenziale der Function einer Function, z. B. von z werden bezeichnet

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y;\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x;\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u$$

Die Partial-Differenziale einer Function von mehreren Veränderlichen werden bezeichnet

$$\left(\frac{F'(x, y)}{\partial x}\right)\partial x;\ \left(\frac{F'(x, y)}{\partial y}\right)\partial y;\ \left(\frac{\varphi'(x, y, z)}{\partial z}\right)\partial z,$$

je nachdem x, y, z als Urveränderliche angesehen wird.

Die eingeklammerten Quotienten bedenten Functionen von y, x, u, z, die Nenner derselben sind also mit den gleich bezeichneten Factoren, welches Differenziale sind, nicht aufzuheben. Die eingeklammerten Gröfsen sind einzige untrennbare Gröfsen.

Das vollständige Differenzial einer Fnnction z. B. u wird allgemein geschrieben

$$\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial z + \ldots.$$

Die Partial-Differenziale derselben Function können (allgemein) immer nur in einem einzigen Gliede des Total-Differenzials bestehen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y;\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x;\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial z;\ \ldots.$$

3. Es sei Z eine gleichartige Function von x nnd y, d. h. die Summe der Exponenten von x nnd y haben in allen Gliedern dieselbe Dimension m. Ist nnn gegeben

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y \qquad (1)$$

so läfst sich beweisen, dafs

$$mZ = Ax + By$$

Setzt man nämlich $y = ux$, wo u eine von y abhängige veränderliche Gröfse ist, so hat man

$$\partial y = u\,\partial x + x\,\partial u \qquad (2)$$

und aus Gleichnng 1

$$\partial Z = A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u \qquad (3)$$

Es ist mithin Z allein abhängig von x dargestellt und man kann Z als ein Prodnct vx^m betrachten, in welchem v nur von y oder von u abhängig ist. Aus $Z = vx^m$ und aus 3 entstehen die Differenzialgleichnngen

$$\partial Z = mvx^{m-1}\,\partial x + x^m\,\partial v$$

Hierzu Gleichung 3

$$\partial Z = A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u$$

woraus

$$mv\,x^{m-1}\,\partial x + x^m\,\partial v = A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u$$

Da aber hier nur von Partial-Differenzialen die Rede ist, so fallen die Differenziale auf andere Veränderliche als Urvariabele enthaltende Glieder, also $x^m\,\partial v$ und $Bx\,\partial u$ aus, nnd man hat

$$mv\,x^{m-1}\,\partial x = A\,\partial x + Bu\,\partial x$$

Für den Werth von vx^m den Werth Z gesetzt und mit ∂x dividirt, gibt

$$\frac{mZ}{x} = A + Bu$$

worans erwiesen

$$mZ = Ax + Bux = Ax + By \qquad (4)$$

1. Beispiel.

Gegeben $Z = \dfrac{y^3 + x^3}{y - x}$

Man erhält das Differenzial

$$\partial Z = \frac{(y-x)(3y^2\,\partial y + 3x^2\,\partial x) - (y^3 + x^3)(\partial y - \partial x)}{(y-x)^2}$$

Dieses Differenzial in Beziehnng auf x genommen, also y als constant betrachtet, gibt

$$\partial Z = \frac{(y-x)\cdot 3x^2\,\partial x - (y^3 + x^3)(-\partial x)}{(y-x)^2} = \frac{-2x^3 + 3x^2 y + y^3}{(y-x)^2}\,\partial x$$

$$\partial Z = \frac{(y-x)\,3y^2\,\partial y - (y^3+x^3)\,\partial y}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 - 3y^2 x - x^3}{(y-x)^2}\,\partial y$$

Also mit ∂x und ∂y dividirt

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = A = \frac{-2x^3 + 3x^2 y + y^3}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = B = \frac{2y^3 - 3y^2 x - x^3}{(y-x)^2}$$

Nun A mit x, B mit y multiplicirt, beide Prodncte addirt geben

$$\frac{2(y^4 - x^4) - 2xy(y^2 - x^2)}{(y-x)^2} = 2(y^2 - x^2) = \frac{2(y^2 - x^2)(y-x)}{y-x} = 2\,\frac{y^3 + x^3}{y-x} = 2Z$$

Da nun in der gegebenen Gleichnng der Zähler drei, der Nenner eine Dimension hat, so ist $m = 2$ und dss Resultat stimmend.

2. Beispiel.

Gegeben $Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (also $m = -1$)

Man erhält das Differeuzial $\frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Also $\frac{\partial Z}{\partial x} = A = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ und $\frac{\partial Z}{\partial y} = B = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

folglich $Ax + By = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = mZ = -Z$

4. Es ist Z irgend eine Fnnction von x nnd y nnd es sind folgende Differenzialgleichungen gegoben:

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y$$
$$\partial A = r\,\partial x + p\,\partial y$$
$$\partial B = q\,\partial x + s\,\partial y$$

so ist in allen Fällen $p = q$

Dann legt man Satz 3 des vorigen Art. zu Grnnde, nämlich

Gleichung 1:

$$\triangle Z = A\triangle x + B\triangle y + p\triangle x \cdot \triangle y$$

Gleichnng 2:

$$\triangle Z = A\triangle x + B\triangle y + q\triangle x \cdot \triangle y$$

so entsteht, wenn man zn den Grenzwerthen übergeht:

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y + p\,\partial x \cdot \partial y$$
$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y + q\,\partial x \cdot \partial y$$

woraus die Richtigkeit des Satzes $p = q$ hervorgeht.

Beispiel.

Es sei $Z = x \sin y + y \cos x$

so ist

$$\partial Z = (x \cos y + \cos x)\,\partial y + (\sin y - y \sin x)\,\partial x$$

also $A = \sin y - y \sin x$

nnd $B = x \cos y + \cos x$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = \cos y - \sin x$$

Es ist $r = s = \cos y$

$$p = q = -\sin x$$

5. Den Erlänterungen No. 2 zu Folge hat man folgende symbolische Bezeichnung des Satzes 4. Es werden ausgedrückt:

Die partiellen Differenzialqnotienten A mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$; B mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$; p mit $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$ und q mit $\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)$.

$A\,\partial x$ mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\partial x$; $B\,\partial y$ mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\partial y$

Der behanptete Satz mit: $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)$

6. Der Satz No. 4 ist in sofern wichtig, weil man bei einer vorliegenden Differenzialgleichnng mit $p = q$ prüfen kann, ob dieselbe reell ist oder nicht, d. h. ob sie ans einer vollkommenen Stammgleichnng abgeleitet ist oder nicht. Vergleiche No. 33, pag. 305 des Art. „Integral“, wo erwähnt ist, dafs es Fnnctionen gibt, von welchen kein Integrsl möglich ist; ferner vergleiche No. 4 dos Art. „Differenzialglelohnng“, pag. 287, wo dasselbe ansführlicher nachgewiesen ist.

Beispiel. Gesetzt es sei von einer nnbekannten Function Z das anf x genommene Differenzial $A = 2a\,xy$ gegeben; es ist mithin auch B unbekannt, so hat man die Gleichnng

$$\partial Z = 2a\,xy\,\partial x + B \cdot \partial y$$

worans

$$\dot{Z} = \int 2axy\,\partial x + \int B\,\partial y = ayx^2 + \int B \cdot \partial y$$

Es könnte nun scheinen, als wäre B ganz willkührlich zu nehmen, allein das ist nicht der Fall, es hat B einen ganz bestimmten Werth, und dieser Umstand führt zu folgender wichtigen Aufgabe:

7. Es sei Z eine Function zweier Veränderlichen x, y; das partielle Differenzial nach x sei $A\,\partial x$ gegeben, es soll aus diesem das zweite partielle Differenzial $B\,\partial y$, das vollständige Differenzial von Z und die Function Z selbst gefunden werden.

Nach No. 5 ist $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ d. i. $p = q$

daher $$\frac{\partial A}{\partial y}\partial x = \frac{\partial B}{\partial x}\partial x$$

Nun ist aber $\frac{\partial B}{\partial x}\partial x$ das partielle Differenzial von B nach x bei constantem y, und somit B das Integral von

$$\frac{\partial A}{\partial y}\partial x = \int \frac{\partial A}{\partial y}\partial x$$

d. h. Es wird das Differenzial von A auf die alleinige Veränderliche y genommen, und die daraus hervorgegangene Gröfse nach x integrirt:

1. Bei dem Beispiel des vorigen Satzes ist $A = 2axy$,

Hieraus
$$B = \int \frac{\partial(2axy)}{\partial y}\partial x = \int 2ax\,\partial x = ax^2$$

Es ist demnach
$$\partial Z = 2a\,xy\,\partial x + ax^2\,\partial x$$
$$\partial A = 2ay + 2ax$$
$$\partial B = 2ax + 0$$

die Function
$$Z = \int 2a\,xy\,\partial x + \int ax^2\,\partial y = ax^2y + ax^2y$$

2. Beispiel. Gegeben $A = x$.

Hieraus $B = \int \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\partial x = y\cdot\partial x$

folglich
$$\partial Z = x\,\partial x + y\,\partial y$$
$$\partial A = \partial x + 0$$
$$\partial B = 0 + \partial y$$
$$Z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2$$

3tes Beispiel.

Es ist gegeben $A = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}$

Mithin $$B = \int \frac{\partial A}{\partial y}\partial x = \int \frac{\partial}{\partial y}\frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}\partial x = \int \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\,\partial y}{\sqrt{x^2-2xy}}$$

Hieraus $$\partial Z = \frac{(x-y)\,\partial x}{\sqrt{x^2-2xy}} - \frac{x\,\partial y}{\sqrt{x^2-2xy}}.$$

Man erhält $$\partial A = \partial\,\frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}} = -\frac{y^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial B = \partial\,\frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

und $$Z = \int \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}\partial x + \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2xy}}\partial y = \sqrt{x^2-2xy}$$

Pascals Dreieck, Arithmetisches Dreieck; eine Reihe von Zahlen wird so genannt, weil man sie als von Pascal erfunden angenommen hat, wiewohl sie schon früher dagewesen ist. Sie besteht in der Untereinanderstellung der Binomial-Coefficienten sämmtlicher Grade vom 0ten Grade ab, weshalb man auch die Reihen mit der 0ten anfangend bezeichnet.

Die 0te Reihe enthält eine, die erste 2 u. s. w., die $m$te $(m+1)$ Zahlen. Die Reihen sind also arithmetische Reihen der 0ten, 1ten, 2ten .... $m$ten Ordnung.

Wenn man in jeder verticalen Reihe jede obere von der zunächst unteren abzieht, so entsteht die links neben stehende verticale Reihe, und auch die verticalen Zahlen bilden Reihen nach steigenden Ordnungen: die erste eine Reihe der 0ten Ordnung, die 2te eine der ersten, die $m$te eine der $(m-1)$ten Ordnung.

Nach der untenstehenden Reihenbezeichnung hat die 0te Reihe die einzige Zahl 1; jede Reihe hat 1 zum ersten Gliede, die erste Reihe 2 Zahlen, die 2te 3 Zahlen .... die $m$te $(m+1)$ Zahlen. Bezeichnet man die Zahl der Reihe, (den Grad der Potenz) allgemein mit n und die Zahl des Gliedes darin allgemein mit m, so hat man für eine $n$te Reihe die Gröfsen der Glieder der Reihenfolge nach

Glieder 1 2 3 4

Gröfse $1;\ \frac{n}{1};\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \ldots\ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ m-1}$

Dies gibt folgende Zusammenstellung, wobei zugleich die Summe S angegeben ist, welche für jeden Grad $= 2^n$ ist.

Potenz-grade.	Reihe der Binomial-Coefficienten.	Summe.
0	1	$2^0 = 1$
1	1. 1	$2^1 = 2$
2	1. 2. 1	$2^2 = 4$
3	1. 3. 3. 1	$2^3 = 8$
4	1. 4. 6. 4. 1	$2^4 = 16$
5	1. 5. 10. 10. 5. 1	$2^5 = 32$
6	1. 6. 15. 20. 15. 6. 1	$2^6 = 64$
7	1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1	$2^7 = 128$
8	1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1 . .	$2^8 = 256$
9	1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1 .	$2^9 = 512$
10	1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1	$2^{10} = 1024$

Passageninstrument, s. v. w. „Mittagsfernrohr", auch „Durchgangsinstrument" genannt.

Pedometer, ein Instrument, welches auf einer Reise zu Wagen die Länge des zurückgelegten Weges angibt, ein Schrittzähler von den verschiedensten Constructionen.

Pendel. In dem Art. „Fall durch einen Kreisbogen", pag. 72, ist die Theorie des einfachen Pendels ausführlich vorgetragen, dessen Schwingungszeit t ermittelt und mit Formel 15 ausgedrückt.

Dieses einfache Pendel besteht nun in einem Massenpunkt, der an einer massenlosen unbiegsamen geraden Linie in der Entfernung r von der Drehaxe befestigt ist.

Die Formel ist weitläufig. Wenn man aber den Schwingungsbogen klein annimmt, so ist die Zeit der Schwingung näherungsweise

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

Die Schwingungszeit ist also um so gröfser, je gröfser der Abstand des Massenpunkts von der Drehaxe ist.

Hängt man also eine grofse Anzahl einfacher Pendel neben einander auf, deren Abstände des Massenpunkts von der Drehaxe von der kleinsten Länge bis zu einer Länge l allmählich gesteigert sind, so schwingt der kürzeste eine viel kürzere, der längste eine viel längere Zeit, als die oben gedachte Zeit t beträgt, und es wird das Pendel von der Länge $= r$ gerade die Zeit t zu einer Schwingung gebrauchen.

Stellt man sich nun alle diese Massenpunkte in einer einzigen geraden unbiegsamen massenlosen Linie neben einander fest vereinigt vor, so hat man ein physisches Pendel, und es hat dieses die Eigenschaft, dafs die der Drehaxe näheren Massenpunkte in der ihrer Lage entsprechenden Schwingung verzögert und die der Drehaxe entfernteren Massenpunkte in der ihrer Lage entsprechenden Schwingung beschleunigt werden. Oder dafs die der Drehaxe näheren Punkte die Schwingung des unter dem Abstand r befindlichen Punkt beschleunigen, die entfernteren Punkte sie verzögern.

Die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem physischen Pendel gleiche Schwingungen macht, erhält man folgender Weise.

Es sei C die Drehaxe, G der Schwerpunkt des Systems, S der Schwingungs-

Fig. 885.

punkt, d. h. CS sei die Länge r des mit diesem physischen Pendel gleich schwingenden einfachen Pendels, M das Volum (oder die Masse oder das Gewicht) des Systems. Es sei das Trägheitsmoment in Beziehung auf den Schwerpunkt G als Drehaxe = $\mathfrak{M}'$, das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe C als Drehaxe = $\mathfrak{M}$, der Abstand CG des Schwerpunkts G von der Axe $C = a$, der Abstand $SG = k$, so ist nach dem Art. „Momente der Trägheit", No. 8, pag. 165 mit Fig. 815.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + a^2 \cdot M$$

Nun hat die durch das Moment $\mathfrak{M}'$ auf den Schwerpunkt G reducirte Masse M in Beziehung auf die Drehaxe C den Hebelsarm $CG = a$; die durch das Moment $\mathfrak{M}$ in S befindlich gewesenen auf C reducirte Masse M den Hebelsarm r.

Ferner bei Reduction der in S vereinigten Masse M auf G

$$\mathfrak{M}' = k^2 M$$

bei Reduction derselben aus G nach C

$$\mathfrak{M} = a^2 M$$

Es ist also $r\,a^2 M = a\,(k^2 + a^2)\,M$

oder $$ra = k^2 + a^2$$

woraus die verlangte Länge $r = \frac{k^2}{a} + a$

Pendel, ballistisches, s. „Ballistisches Pendel".

Pentaeder wird mitunter ein Prisma genannt, welches gleichseitige Dreiecke zu Grundflächen hat.

Pentagon, s. v. w. „Fünfeck".

Pentagonalzahlen, fünfeckige Zahlen sind die Reihe von Zahlen, deren Bildung das Fünfeck zu Grunde liegt (vergl. „Dekagonalzahlen"). Die Zahlenreihe ist

$$1 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 35 \ldots . \tfrac{1}{2} n\,(3n - 1)$$

1te Differenzenreihe

$$4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots ..$$

2te Differenzenreihe

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots ..$$

Summe der ersten n Glieder

$$S = \tfrac{1}{2} n^2 (n + 1)$$

Pentedekagon, s. v. w. „Fünfzehneck".

Perikaustika, ist eine von Jacob Bernoulli aus der Kaustika hergeleitete Linie: In Fig. 251, pag. 415, Bd. I. sind die punktirten Linien die aus dem leuchtenden Punkt A gesendeten Strahlen wie A_1, A_2, A_3 u. s. w., die ausgezogenen Linien die von diesen Strahlen zurückgeworfenen Strahlen. Der Strahl A_1 reflectirt nach $1 \cdot 2$, der Strahl A_2 nach $2 \cdot 4$ u. s. w. Wenn man nun den Strahl A_1 über 1 hinaus verlängert und diese Verlängerung dem zugehörigen reflectirten Strahl gleich macht, so ist der Endpunkt der über 1 verlängerten Linie ein Punkt der Perikaustika. Eben so ist der Endpunkt des um die Linie 3, 6 verlängerten Strahls A_3 ein Punkt der P.

Perigeum ist bei der um die Erde liegenden Mondbahn der der Erde nächste Punkt, er liegt im Scheitel der grofsen Axe (s. „Apogeum").

Perihelium ist bei den Planetenbahnen der der Sonne zunächst liegende Punkt. Er liegt im Scheitel der grofsen Bahnaxe.

Perimeter ist der Umfang einer Figur.

Periodischer Decimalbruch, s. Bd. II, pag. 249; Verwandlung derselben in gemeine Brüche und die 4 Species mit denselben.

Periodischer Kettenbruch ist ein solcher, dessen Nenner periodisch abwechseln, wie bei den periodischen Decimalbrüchen die Decimalstellen.

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a \text{ (in inf.)}}}}} \qquad y = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b \text{ (in inf.)}}}}}}} \qquad z = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \text{ (in inf.)}}}}}}}$$

Diese periodischen Kettenbrüche haben die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie auf eine quadratische Gleichung gebracht werden können.

Z. B. $x = \frac{1}{a + 1}$.

Was dem zweiten Gliede 1 des Nenners zugefügt werden mufs, nämlich die un-

endliche Anzahl von $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}$ ist offenbar $= x$ und man hat

1. $x = \frac{1}{a+x}$, woraus $x^2 + ax - 1 = 0$,

woraus $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}$.

2. $x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}$;

hieraus $x^2 + bx - \frac{b}{a} = 0$

und $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b}{a}}$

3. $x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}} = \frac{bx + bc + 1}{ab + x + abc + a + c}$

woraus

$(ab + 1)x^2 + (abc + a + c - b)x - bc - 1 = 0$

also
$$x = -\frac{abc + a - b + c}{2(ab+1)} + \sqrt{\left(\frac{abc + a - b + c}{2(ab+1)}\right)^2 + (bc + 1)}$$

Periodischer Monat, s. „Astronomischer Monat“, No. 3, pag. 153.

Periöci, s. v. w. „Nebenwohner“.

Perioptrik, Perioptik ist der Theil der Optik, welcher mit dem auf Oberflächen von Körpern fallenden und von denselben reflectirten Lichtstrahlen sich beschäftigt.

Peripherie ist dem Worte nach dasselbe mit Perimetor, dem Umfang jeder Figur, es bedentet aber ausschliefslich einen Kreisumfang.

Peripheriewinkel ist jeder Winkel, den zwei Sehnen in einem Punkt der Peripherie mit einander bildon. Der P. ist halb so grofs als der mit ihm auf gleichem Kreisbogen stehende Centriwinkel.

Periscii, Umschattige sind die Bewohner der kalten Zone, weil dort zur Zeit des Tages, indem die Sonne einen Kreis um sie beschreibt, ihr Sonnenschatten nach allen Richtungen fällt.

Pariscopische Brillen sind solche, deren eines Glas für Kurzsichtige, das andere für Weitsichtige eingerichtet ist, um den Nachtheil von den Augen abzuwenden, welche aus der Kugelgestalt der Gläser zu befürchten ist.

Permutationen, Versetzung von Elementen. Die Elemente *abcde* sollen in geordneter Reihenfolge so verschiedenartig versetzt werden, dafs die letzte *edcba* hervorgeht.

1 Element *a* P. = *a*
2 Elemente *a*, *b* P. = *ab*, *ba*
3 Elemente *a*, *b*, *c* P = *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*
4 Elemente *a*, *b*, *c*, *d* P. = *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*

Dieser Darstellung zufolge ist nun die Bestimmung der Anzahl von möglichen Versetzungen sehr leicht. Geht man nämlich von einem Element aus, so hat dieses nur eine Versetzung. Bei Hinzutritt eines zweiten Elements hat jedes für sich diese eine, beide also 2 Versetzungen. Tritt nun ein drittes Element hinzu, so haben die Versetzungen von zwei Elementen jedes einzelne Element zum Begleiter und es entstehen mithin 3×2 Versetzungen, mit 4 Elementen, also $4 \times 3 \times 2 = 24$, folglich mit n Elementen $n \cdot (n-1)(n-2) \ldots . 3 \cdot 2 \cdot 1$ Versetzungen.

Sind unter n Elementen 2 gleiche, so geben die n Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ Versetzungen, wenn man sie sämmtlich als ungleich ansieht, die beiden gleichen aber veranlassen, dafs nur die Hälfte von denselben wahrnehmbar bleibt. Bei 3 gleichen Elementen bleiben so viele unbemerkbar, als drei ungleiche Elemente Versetzungen geben, also $1 \cdot 2 \cdot 3$; es ist also nur der 6te Theil der Versetzungen von ungleichen Elementen wahrzunehmen. Bezeichnet man der Kürze wegen die Anzahl, in welcher ein Element vorhanden ist, mit dieser Zahl als Exponent, so schreibt man beiden Elementen *a*, *bb*, *ccc*,

$dddd$, a, b^2, c^3, d^4 und hat nun bei 10 Elementen die mögliche Anzahl der wahrnehmbaren Versetzungen.

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\times1\cdot2\times1\cdot2\cdot3\times1\cdot2\cdot3\cdot4}=4\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10 \text{ Versetzungen}$$

Allgemein bei $a^p\cdot b^q\cdot c^r\cdot d^s$ in Summa n Elementen

$$\text{die Anzahl der Versetzungen}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-2)(n-1)n}{1\cdot2\cdot3\ldots p\times1\cdot2\cdot3\ldots q\times1\cdot2\cdot3\ldots r\times1\cdot2\cdot3\ldots s}$$

Permutiren, Versetzen, die Permutationen geordnet darstellen.

Perpendiculär, lothrecht, nach dem Mittelpunkt der Erde hin gerichtet; Linien, die rechte Winkel mit einander bilden, sollten winkelrecht oder normal genannt werden.

Perpendicularmethode. Dies ist in der Feldmefskunst die Arbeit bei Aufnahme von unregelmäfsig gekrümmten Linien, gewöhnlich Grenzlinien mit Hülfe von Abscissen und rechtwinkligen Ordinaten darauf, die um so näher an einander abgesteckt werden, je krummer und unregelmäfsiger die aufzunehmende Linie ist. Die Abscisse oder mehrere unter Neigungswinkeln an einander wählt man möglichst nahe der aufzumessenden Linie, so dafs sie dieselbe auch durchschneiden kann.

Die Absteckung der Ordinaten, wie diese einfache Arbeit mit Kette und Stäben oder Maafsstäben geschieht, ist in dem Art. „Baculometrie" mit Hülfe von Fig 159 und 160 beschrieben. Man bedient sich aber auch des Diopterkreuzes oder des Mefstisches, wie dies im Art. „Parallelen abstecken" erklärt worden ist.

Perpendikel ist die nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtete Linie. Auch werden Linien so genannt, welche rechte Winkel mit einander bilden, aber mit Unrecht; sie sollten winkelrecht oder normal heifsen.

Perpendikelwaage, s. v. w. „Setzwaage, Bleiwaage".

Perpetuum mobile ist eine Idee, welche schon viele sonst intelligente aber in diesem Punkt mit gänzlichem Mangel an Einsicht behaftete Leute unglücklich gemacht hat. Dem Begriff nach ist P. m. eine Maschine, welche die an ihrer mechanischen Thätigkeit consumirte Kraft aus sich selbst heraus fortwährend wieder ersetzt.

Es hat seine Richtigkeit, dafs in Folge des von der Natur gegebenen Beharrungsstandes ein in Ruhe befindlicher Körper nur durch eine äufsere Kraft in Bewegung und ein in Bewegung befindlicher Körper in Ruhe gebracht werden kann. Hat ein Stofs oder ein anhaltender Druck ein System von Körpern in Bewegung gebracht, so kann sie fortgenommen werden und das System bleibt des Beharrungsstandes wegen in Bewegung.

Dies würde unausbleiblich in jedem einzelnen Fall statt finden, wenn nicht die Ursache, welche diese Regel zu einer Regula falsi macht, in dem bewegten Körper selbst eingegraben wäre.

Wenn nämlich ein Körper in Berührung mit einem ruhenden Körper ist, so hat er das Bestreben diesen in die Bewegung mit hinein zu ziehen; da aber der zweite Körper in Ruhe bleiben will, so widersteht er dem sich bewegenden Körper, er übt einen Widerstand gegen ihn aus, der seine Bewegung offenbar hemmend vermindert. Jeder nur einen Augenblick ausgeübte Widerstand vermindert die Kraft, und soll sie nicht vermindert werden, so bedarf sie des Ersatzes. Da nun der Widerstand perpetuell geschieht, so ist er ein Perpetuum immutabile, welches mit dem Perpetuum mobile in gleichem Grade sich schwächt und endlich erschöpft zu Null wird.

Diese Behauptung bestätigt die Natur: der liebe Gott hat die Welt nicht aus Nichts geschaffen; das ist nicht möglich, es ist jedenfalls der Stoff dazu vorhanden gewesen. Die bis heut vollendete Welt aber ist immer kein Perpetuum mobile; man ersieht dies aus den Aenderungen, welche sichtbar vorkommen, und welche mit dem Namen Störungen belegt werden.

Jedenfalls sind diese sogenannten Störungen Ortsänderungen von Kräften und mit diesen Abänderungen der Kräftegröfsen selbst, also weise Maafsregeln sind diese sogenannten Störungen, dafs das Weltgebäude in seinem Laufe und Bestande nicht gestört werde.

Perturlationen sind die attractorischen Einwirkungen der Weltkörper auf einander, durch welche sie aus den elliptischen Bahnen, denen sie, um ihren Cen-

tralkörper laufend, ohne solche eintretenden Gegenwirkungen, dem allgemein geltenden Anziehungsgesetz gemäfs streng folgen würden, abgelenkt werden.

Es ist nicht ein einziger Planet, der einem anderen Planeten diese Ablenkung verursacht, sondern es geschieht dieselbe von jedem einzelnen der anderen Planeten des ganzen Sonnensystems, weil dasselbe Attractionsgesetz jedem einzelnen Weltkörper inne wohnt, so dafs die verursachten Seitenbewegungen die nothwendigen Folgen desselben Gesetzes und an Gröfse und Richtung denselben streng unterworfen sind.

Es sei **S** die Sonne, **E** die Erde, ***FSHW*** die elliptische Ekliptik, welche die Erde um die Sonne herum durchläuft, so kann die Erde auch um die geringste Länge nicht aus derselben sich entfernen, wenn nicht andere Weltkörper ihr attractorisch entgegenwirken.

Ist aber ein anderer Weltkörper, z. B. der Jupiter ***J***, da wo er gezeichnet ist, der Erde nahe gekommen, so übt er mit

Fig. 886.

seiner grofsen Masse sein attractorisches Recht auf die Erde aus, und während die Erde nach ***H*** ihren Lauf ruhig fortsetzen will, zieht er die Erde zu sich aus der Ekliptik heraus.

Ist zugleich ein zweiter Weltkörper, z. B. der Saturn (*Sn*) auf die gezeichnete Stelle gekommen, so macht dieser es eben so, und die drei Pfeile geben ein Bild von der Verlegenheit, in welcher die Erde sich befindet.

Aber mit dem Jupiter und dem Saturn ist es nicht abgethan, es kommen noch viele andere kleinere Planeten hinzu; ferner die beiden grofsen Grenzhüter, der Uranus und der Neptun, welche die dem Verhältnifs ihres Fonds entsprechenden Rechte fordern, geltend machen und durchsetzen.

Die Monarchen Deutschlands sollten die Regierungsweise des Sonnensystems, als eine unmittelbar von Gott eingesetzte Disciplinar-Verwaltung zum Muster nehmen: Die Grofsmacht Sonne ist nicht nur nicht ungehalten, dafs sie durch die Mittel- und Kleinmächte in ihren Rechten verkürzt wird, sie ist im Gegentheil so freundlich, jeder dieser Mächte ein dem Verhältnifs ihrer materiellen Mittel genau entsprechendes mit sich selbst gleich grofses Recht freiwillig zu überlassen und vor allen Dingen beweisen die Central- und Specialregierungen die gänzliche Nutzlosigkeit eines Bundestages.

Die Perturbationen, auf einen Weltkörper zusammen wirkend, sind während eines und mehrerer Jahre unbedeutend, aber von zweierlei Art: Einige sind immer im Zunehmen begriffen, nach einer Reihe von Jahren erheblich genug und werden deshalb aus den Säcularänderungen der Bahnelemente entnommen. Diese enthalten nämlich die summarischen Elementenänderungen von Jahrhundert zu Jahrhundert, deren Mittelzahlen auf den verlangten kürzeren Zeitraum verhältnifsmäfsig reducirt werden.

Die anderen sind periodisch, d. h. sie sind eine Zeit lang zunehmend und dann wieder abnehmend, so dafs sie sich im Laufe der Zeit ausgleichen. So z. B. ist dies bei dem Monde der Fall, dessen Umlaufszeit der Säculargleichung nach immer kürzer wird, aber mit der Zeit auch wieder zur Verlängerung kommt.

Der Erfolg der Störung eines Weltkörpers durch mehrere andere in ihren Elementen bekannte Körper zu gleicher Zeit, in Betreff seiner Bewegungsveränderung: also zu ermitteln, welche Bewegung er machen wird, ist wegen des nothwendigen Ansatzes vieler von einander abhängigen Gleichungen unmöglich. Es hat sich aber gefunden, dafs bei der Geringfügigkeit der einzelnen Störungen die Störung durch jeden einzelnen Himmelskörper für sich, also so berechnet werden kann, als wenn die übrigen störenden Körper nicht vorhanden wären. Hat man nun diese Einzelnstörungen sämmtlich ermittelt, so gibt die Summe derselben die Gesammtstörung sämmtlicher gleichzeitig störender Körper. Diese Aufgabe, die Ermittelung der Gesammtstörung von mehreren Himmelskörpern auf einen einzigen anderen ist daher unter dem Namen: Problem von drei Körpern bekannt.

Lagrange setzt dieses Verfahren ungefähr folgender Art auseinander: Für die Darstellung der Bewegung eines von der

Sonna angezogenen Planeten werden drei Differenzialgleicbungen des zweiten Grades angesetzt, bei deren Integrirung alse sechs Constanten, nämlich sechs von den constanten Bahnelementen allein abhängige Gröfsen vorkommen.

Wenn man nun die Gleichungen für dle Anziehung eines dritten Himmelskörpers mit einführen wollte, so würden sich jene Differenzialgleichungen nicht mehr integriren lassen. Die Glieder aber, welche hinzutreten würden, enthalten die im Vergleich mit der Sonne nur kleine Massen des dritten Körpers, sind also selbst sebr kleine Zahlen, deren Werth man näberungsweise ermitteln kann. Diese Näberungswerthe eingeführt und integrirt, als wenn diese Glieder nicht hinzugekommen wären, gibt eine der wahren Störung möglichst nahe kommende.

Diese Veränderungen sind nun theils periodisch, tbeils sind sie es nicht. Die ersteren hangen ab von der gegenseitigen Stellung des störenden und des gestörten Körpers, sie erhalten also bei der wieder eintretenden selbigen Stellung denselbigen Werth; die anderen hangen von diesen Stellungen nicht allein ab und können mit der Zeit wachsen und abnehmen. Se z. B. ergab sich, dafs die Bewegung des Jupiter beschleunigend und die des Saturn verzögernd war und dafs diese Aenderungen nicht auf Säcnlargleichungen beruhten. Genaue Beobachtungen haben dann ergeben, dafs die Wechselwirkungen zweier Planeten in Beziehung auf Bewegungsänderungen, deren Periode sehr lang ist, die Summe der Quotienten: Masse dividirt durch die Länge der grofsen Axe constant bleiben.

Phasen sind Lichterscheinungen, Lichtgestalten, das Aeufsere eines Körpers bei dessen verschiedenartiger Beleuchtung. Besonders gebraucht man diese Bezeichnung für Planeten und Monde, je nach deren Gestalt, in welcher sie uns bei verschiedenen Beleuchtungen durch die Sonne, je nachdem die Erde ihre Lage zu dem beleuchtenden und dem beleuchteten Weltkörper hat. Die Phasen des Mondes sind in dem Art. „Mondphasen" mit 12 Figuren ausführlich beschrieben.

Phorometrie, s. v. w. „Pherenomie".

Phoronomie ist die Lehre von den Gesetzen der Bewegung, wenn bei derselben von einer Kraft, welche dieselbe hervorgebracht hat und erhält, ganz abgesehen wird. Die Erklärung von Bewegung, von beschleunigter und verzögerter, von gleichförmig und ungleichförmig beschleunigter und verzögerter Bewegung sind in verschiedenen Artikeln dieses Wörterbuchs schon gegeben und die Gesetze selbst ausführlich abgehandelt.

Es soll hier nur, der möglichen Vollständigkeit wegen, noch folgendes hinzugefügt werden:

1. Vergleicht man die ungleichförmige Bewegung in Hinsicht des zurückgelegten Weges von irgend einem Augenblick oder von irgend einem Punkt des Weges an mit derjenigen gleichförmigen Bewegung, die als das Maafs aller übrigen zum Grunde gelegt wird, so heifst das Verhältnifs der Wege beider Bewegungen in einerlei Zeit die **Mittlere Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung in dieser Zeit.**

Ist nämlich σ der Weg bei der ungleichförmigen Bewegung in der Zeit τ, so ist in derselben Zeit der Weg der gleichförmigen Bewegung $= \sigma$, also die mittlere Geschwindigkeit der ungleichförmigen $= \frac{\sigma}{\tau}$. Nun ist andererseits $\frac{\sigma}{\tau}$ die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, vermöge welcher in der Zeit τ der Weg σ zurückgelegt wird, folglich kann man auch die mittlere Geschwindigkeit bei der ungleichförmigen Bewegung als diejenige Geschwindigkeit bezeichnen, welche derjenigen gleichförmigen Bewegung zukommen würde, vermöge welcher in derselben Zeit derselbe Weg wie bei der ungleichförmigen durchlaufen würde. Ist nun das Gesetz der ungleichförmigen Bewegung so beschaffen, dafs die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\sigma}{\tau}$ sich einem bestimmten Werth als Werthgrenze immerfort nähert, wenn τ immerfort kleiner und kleiner genommen wird, oder sich so vermindert, dafs diese Zeit unendlich klein wird, so nennt man diese Werthgrenze die **Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung im ersten Angenblick der Zeit τ oder in dem Punkte des Weges, wo das Bewegliche in diesem Augenblick sich befindet.**

Ist z. B. der in der Zeit t zurückgelegte Weg $s = a + bt^2$, so ist der Weg in der Zeit $s' = t + \tau = a + b\,(t + \tau)^2$, daher der in der Zeit τ zurückgelegte Weg $s' - s = b\tau\,(2t + \tau)$; daraus die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $\tau = \frac{\sigma}{\tau} = 2bt + b\tau$; folglich $\frac{\sigma}{\tau} - 2bt = b\tau$. Da nun der Subtrahend von τ unabhängig ist und $b\tau$ offenbar mit τ zugleich un-

endlich kleln wird, so ist $2bt$ die Werthgrenze von $\frac{\sigma}{\tau}$, mithin die Geschwindigkelt der ungleichförmigen Bewegnng am Ende der Zeit t oder im Anfange der Zeit $\tau = 2bt$.

Das Gesetz, wenach sich die eben erklärte Geschwindigkeit während der ganzen ungleichförmigen Bewegung ändert, bestimmt die verschiedenen Arten dieser Bewegnng.

2. Es ist der Weg eines materiellen Punkts als Functien der Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit am Ende dieses Weges oder am Ende dieser Zeit zu bestimmen.

Es sei s der in der Zeit t zurückgelegte Weg und $s = ft$ die gegebene Function, se ist der Zuwachs des Weges in der Zeit $\triangle t = \triangle s = f(t + \triangle t) - ft$

folglich ist $\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{f(t + \triangle t) - ft}{\triangle t}$

die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $\triangle t$.

Bezeichnet man daher die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t mit v, se ist diese die Werthgrenze der. mittleren Geschwindigkeit unter der Voranssetzung, dafs $\triangle t$ nnendlich klein werde.

Andererseits ist aber die Werthgrenze ven $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ das Differenzial der Fnnctien s auf t; alse $= \partial_t s$, wenn t die Urveränderliche ist, dagegen der Quetient $\frac{\partial s}{\partial t}$ der Differenzlale ven s nnd t iu Beziehnng auf irgend elne aber ihnen gemeinschaftliche Urveränderliche. Man hat also

I. v entweder $= \partial_t s$ oder $= \frac{\partial s}{\partial t}$

3. Ist nmgekehrt die Geschwindlgkeit v als Function der Zeit gegeben, so hat man gegenseitig

$$\partial s = v\,\partial t \text{ und daher}$$

II. $s = \int v \cdot \partial t$.

4. Soll nun dieser Weg mit der Zeit zugleich anfangend gezählt werden, se mufs s für $t = 0$ selbst $= 0$ werden; folglich mnfs man das Integral zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$ nehmen. Man hat also nnter dieser Veraussetzung

III. $s = \int_0^t v \cdot \partial t$

5. Es bewegt sich ein materieller Punkt durch den Weg s in der Zeit t nnd hat am Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit v als Functien der Zeit ausgedrückt. Die Beschleunigung des materiellen Punkts für diesen Augenblick zn bestimmen.

Da v als Fnnctien von t gegeben ist, so ist die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t + \triangle t = v + \triangle v$, folglich ist $\triangle v$ die Aendernng der Geschwindigkeit in der Zeit $\triangle t$ und daher $\frac{\triangle v}{\partial t}$ die mittlere Beschleunignng während der Zeit $\triangle t$. Die Beschlennigung am Anfange der Zeit $\triangle t$ oder am Ende der Zeit t ist aber die Werthgrenze der mittleren Beschleunigung für die unendliche Abnahme von $\triangle t$. Bezeichnet man also diese Beschleunignng mit u, und da andrerseits die Werthgrenze des Znwachsquotienten das Differenzial der Geschwindigkeit, also entweder $\partial_t v$ eder $\frac{\partial v}{\partial t}$ ist, so hat man

IV. $u = \partial_t v$ eder $\frac{\partial v}{\partial t}$

Nnn ist nech $v = \partial_t s$

felglich $\partial_t v = \partial_t^2 s$

6. Betrachtet man dagegen s, v, nnd t als Functionen irgend einer anderen gemeinschaftlichen Urveränderlichen, so hat man $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ nnd $\partial v = \partial \frac{\partial s}{\partial t}$ felglich hat man anch

V. $u = \partial_t^2 s$

und $$\frac{\partial \frac{\partial s}{\partial t}}{\partial t} = \frac{\partial t \cdot \partial^2 s - \partial s \cdot \partial^2 t}{\partial t^3}$$

7. Ist bei einer Bewegnng die Beschleunignng und der Weg als Fnnction einer und derselben Urveränderlichen gegeben, die Geschwindigkeit am Ende dieses Weges zu bestimmen.

Nach dem Verigen ist

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} \text{ und } u = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Man hat also $\partial s = v\,dt$

nnd daher mnltiplicirt

VI. $u \cdot \partial s = v \cdot \partial v$

beiderseits mit 2 mnltiplicirt und dann integrirt gibt

$$2\int u\,\partial x = \int 2v\,\partial v = v^2 + C.$$

Ist nnn C die Geschwindigkeit im Anfange des Weges s, se mufs für $s = 0$ auch $v = 0$ werden. Man hat alse

$$2\int_0^s u\,\partial s = c^2 + C$$

felglich

VII. $2\int_0^s u\,\partial s = v^2 - c^2$

Weraus gegenseitig

VIII. $v = \sqrt{c^2 + 2\int_0^s u\,\partial s}$

8. Beispiel. Die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, dessen Beschleunigung von dem Quadrat der in jedem Augenblick stattfindenden Geschwindigkeit bedingt ist und sich ausdrückt durch die algebraische Summe zweier Glieder, von welchen das eine constant, das andere aber das Quadrat der Geschwindigkeit zu einem Factor hat.

Nach Erfahrung bewegt sich ein physischer Körper an der Oberfläche der Erde im luftleeren Raum in jeder Verticalen mit einer gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung, je nachdem er sich der Erdoberfläche nähert oder entfernt, und zwar mit einer Beschleunigung $2g = 31{,}25$ Fufs. Bewegt sich dagegen derselbe Körper in derselben Art in der umgebenden Luft, so nimmt jene Beschleunigung ab um ein Product aus dem Quadrat der Geschwindigkeit mit einem constanten Factor, welcher durch die Gestalt des Körpers und die Menge seiner materiellen Theile bestimmt wird.

Wird nun dieses Gesetz allgemein gedacht, so bestimmt es die Beschleunigung des vorliegenden Falles. Es bewege sich nämlich zuerst der Körper so, dafs die constante Beschleunigung additiv, die mit v veränderliche aber subtractiv ist, welches dem Falle in der widerstehenden Luft entspricht, so hat man $u = g - kv^2$, wo k der gedachte Widerstandscoefficient ist.

Beginnt nun die Bewegung von der Ruhe aus und ist v die Geschwindigkeit am Ende des Weges s, so hat man nach VI.

$$u\,\partial s = v\,\partial v$$

also $\partial s = \frac{v \cdot \partial v}{u} = \frac{v dv}{g - kv^2}$

Mithin $s = \int_0^v \frac{v \cdot \partial v}{g - kv^2}$

Setzt man nun $g - kv^2 = z$, so ist $-2kv\,\partial v = \partial z$

Mithin $v \cdot \partial v = -\frac{\partial z}{2k}$

$$\text{daher } s = \int_0^v \frac{-\partial z}{2kz} = -\frac{1}{2k}\int_0^v \frac{\partial z}{z} = -\frac{1}{2k}(ln\, z)_0^v = -\frac{1}{2k}\left[ln\,(g - kv^2)\right]_0^v$$

$$= -\frac{1}{2k}\left[ln\,(g - kv^2) - ln\,g\right] = -\frac{1}{2k}\,ln\,(g - kv^2)_0^v = \frac{1}{2k}\,ln\,\frac{g}{g - kv^2} = 2ks$$

folglich $ln\,\frac{g}{g - kv^2} = 2ks$

Oder $\frac{g}{g - kv^2} = e^{2ks}$ oder $\frac{g}{e^{2ks}} = g - kv^2$

oder $v^2 = \frac{g - \frac{g}{e^{2ks}}}{k} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-2ks}\right)$

also $v = \sqrt{\frac{g}{k}}\sqrt{1 - \frac{1}{e^{2ks}}}$ (I)

Mithin bleibt v stets kleiner als $\sqrt{\frac{g}{k}}$ kann aber diesem Grenzwerthe mit dem Wachsthum von s beliebig nahe kommen.

Ferner ist nach IV. $u = \frac{\partial v}{\partial t}$

daher gegenseitig $\partial t = \frac{\partial v}{u}$

mithin $t = \int_0^s \frac{\partial v}{u} = \int_0^s \frac{\partial v}{g - kv^2}$

Man setze $\frac{g}{k} = \alpha^2$, so ist $g = k\alpha^2$

$$\text{daher } \int \frac{\partial v}{g - kv^2} = \frac{1}{k}\int \frac{\partial v}{\alpha^2 - v^2} = \frac{1}{k}\int \frac{\partial v}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \frac{1}{k}\int \left(\frac{A}{\alpha - v} + \frac{B}{\alpha + v}\right)\partial v$$

so dafs

$$\frac{}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \frac{\alpha(A + B) + (A - B)v}{(\alpha - v)(\alpha + v)}$$

Setzt man $(A - B) = 0$, so erhält man $A = B$ und $\alpha \cdot (A + B) = 1$.

Aus beiden Gleichungen folgt $2\alpha A = 1$, und $A = B = \frac{1}{2\alpha}$

Man hat also $\int\frac{\partial v}{(\alpha-v)(\alpha+v)}=\frac{1}{k}\int\left(\frac{\frac{1}{2\alpha}}{\alpha-v}+\frac{\frac{1}{2\alpha}}{\alpha-v}\right)\partial v$

$$=\frac{1}{2\alpha k}\int\left(\frac{\partial v}{\alpha+v}-\frac{-\partial v}{\alpha-v}\right)=\frac{1}{2\alpha k}\left[ln(\alpha+v)-ln(\alpha-v)\right]$$

$$=\frac{1}{2\alpha k}\left(ln\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right)_0^v$$

Also $t=\frac{1}{2\alpha k}\left(ln\frac{\alpha+v}{\alpha-v}\right)_0^v$ (1)

Nun beginnt die Bewegung aus der Ruhe, folglich ist für $s=0$ auch $v=0$, folglich ist $C=\frac{1}{2\alpha k}ln\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{1}{2\alpha k}ln\,1=0$

$$t=\frac{1}{2\alpha k}ln\frac{\alpha+v}{\alpha-v}=\frac{1}{2\alpha k}ln\frac{\alpha+v}{\alpha-v} \qquad (2)$$

Hieraus gegenseitig

$$ln\frac{\alpha+v}{\alpha-v}=2\alpha kt$$

folglich $\frac{\alpha+v}{\alpha-v}=e^{2\alpha kt}$

Hieraus $\alpha+v=(\alpha-v)e^{2\alpha kt}$

woraus $v=\frac{\alpha(e^{2\alpha kt}-1)}{e^{2\alpha kt}+1}$

Nun war $\alpha=\sqrt{\frac{g}{k}}$

Mithin $v=\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{e^{2t\sqrt{gk}}-1}{e^{2t\sqrt{gk}}+1}$ (II)

Setzt man nun die beiden Werthe von v (1 und 2) einander gleich, so erhält man

$$\frac{e^{2t\sqrt{gk}}-1}{e^{2t\sqrt{gk}}+1}=\sqrt{1-\frac{1}{e^{2ks}}}=\sqrt{\frac{e^{2ks}-1}{e^{2ks}}}=\frac{\sqrt{e^{2ks}-1}}{e^{ks}}. \qquad (3)$$

Um nun t aus s zu bestimmen hat man aus dieser letzten Gleichung

$$e^{ks}(e^{2t\sqrt{gk}}-1)=(e^{2t\sqrt{gk}}+1)\sqrt{e^{2ks}-1}$$

woraus $e^{2t\sqrt{gk}}=\frac{e^{ks}+\sqrt{e^{2ks}-1}}{e^{ks}-\sqrt{e^{2ks}-1}}$

Nimmt man nun beiderseits die Logarithmen irgend eines Systems, so erhält man

$$t=\frac{log\left(e^{ks}+\sqrt{e^{2ks}-1}\right)-log\left(e^{ks}-\sqrt{e^{2ks}-1}\right)}{2\sqrt{gk}\cdot log\,e} \qquad (III)$$

Soll dagegen s aus t gefunden werden, so hat man, die Gleichung 3 quadrirt:

$$\frac{(e^{2t\sqrt{gk}}-1)^2}{(e^{2t\sqrt{gk}}+1)^2}=1-\frac{1}{e^{2ks}}$$

Hieraus $\frac{1}{e^{2ks}}=1-\left(\frac{e^{2t\sqrt{gk}}-1}{e^{2t\sqrt{gk}}+1}\right)^2=\frac{4e^{2t\sqrt{gk}}}{(e^{2t\sqrt{gk}}+1)^2}$

woraus $e^{2ks}=\frac{(e^{2t\sqrt{gk}}+1)^2}{4e^{2t\sqrt{gk}}}$

oder $e^{ks}=\frac{e^{2t\sqrt{gk}}+1}{2e^{t\sqrt{gk}}}$

Beiderseits die Logarithmen genommen

$$s=\frac{log(e^{2t\sqrt{gk}}+1)-log\,2e^{t\sqrt{gk}}}{k\,log\,e} \qquad (IV)$$

9. Ist zweitens auch das beständige Glied in dem Ausdruck der Beschleunigung subtractiv, so hat man $u=-g-kv^2$, und wenn nun die Bewegung mit der Geschwindigkeit c beginnt, so hat man für die Geschwindigkeit v am Ende des Weges s

$$v^2=2\int u\,\partial s$$

oder differenzirt

$$v\,\partial v=u\,\partial s=(-g-kv^2)\,\partial s$$

also $\partial s=\frac{-v\,\partial v}{g+kv^2}$

folglich

$$s = -\int_c^v \frac{v\,\partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{2k}\int_c^v \frac{2kv \cdot \partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{2k}\,ln\,(g + kv^2)$$
$$= \frac{1}{2k}\left[ln\,(g + kc^2) - log\,(g + kv^2)\right]$$

also $s = \frac{1}{2k}\,ln\,\frac{g + kc^2}{g + kv^2}$ (I)

Da die Bewegung wegen der negativen Beschleunigung eine verzögerte ist, so wird die Geschwindigkeit v am Ende eines Weges $s_0 = 0$ werden, und folglich hat man aus I.

$$s_0 = \frac{1}{2k}\,ln\,\frac{g + kc^2}{g} = \frac{1}{2k}\,ln\left(1 + \frac{k}{g}\,c^2\right) \quad \text{(II)}$$

Entwickelt man v^2, um für jeden zurückgelegten Weg die noch stattfindende Geschwindigkeit zu bestimmen, so erhält man aus I.

$$e^{2ks} = \frac{g + kc^2}{g + kv^2}$$

woraus $v = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{g + kc^2}{e^{2ks}} - g\right)}$ (III)

Ferner zur Bestimmung der Zeit hat man

$$\partial t = \frac{\partial v}{u} = \frac{\partial v}{-g - kv^2}$$

daher $t = -\int_c^v \frac{\partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\int_c^v \frac{\sqrt{\frac{k}{g}}\,\partial v}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\left(Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)_c^v + C$

für $v = c$ ist Bewegungsanfang, also $t = 0$ und man hat vollständig:

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}}\left[Arc\,tg\,c\sqrt{\frac{k}{g}} - Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}}\right]$$

Setzt man den Bogen $Arc\,tg\,c\sqrt{\frac{k}{g}} = \varphi$ und $Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}} = \psi$ so hat man $tg\,\varphi = c\sqrt{\frac{k}{g}}$ und $tg\,\psi = v\sqrt{\frac{k}{g}}$

daher $tg\,(\varphi - \psi) = \frac{tg\,\varphi - tg\,\psi}{1 + tg\,\varphi \cdot tg\,\psi} = \frac{c\sqrt{\frac{k}{g}} - v\sqrt{\frac{k}{g}}}{1 + c\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\sqrt{\frac{k}{g}}} = \frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

Mithin gegenseitig $\varphi - \psi = Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

daher also $t = \frac{1}{\sqrt{kg}}(\varphi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{kg}}\,Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$ (IV)

oder $t\sqrt{kg} = Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$ oder $tg\,t\sqrt{gk} = \frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

woraus $v = \frac{c\sqrt{kg} - g\,tg\,(t\sqrt{kg})}{\sqrt{kg} + kc\,tg\,(t\sqrt{kg})} = \frac{c\sqrt{\frac{k}{g}} - tg\,(t\sqrt{kg})}{\sqrt{\frac{k}{g}}\left(1 + c\sqrt{\frac{k}{g}}\,tg\,(t\sqrt{kg})\right)}$ (V)

10. Nimmt man an, dafs wenn die Geschwindigkeit der verzögerten Bewegung auf Null gebracht ist, dann eine Bewegung nach gerade entgegengesetzter Richtung nach dem Gesetze des vorigen Satzes erfolge, so kann man fragen, mit welcher Geschwindigkeit dann der Körper in dem Punkt wieder anlange, von welchem er seine verzögerte Bewegung mit der Geschwindigkeit c anfing. Und so entspricht denn dieser Aufgabe die physische Frage: Mit welcher Geschwindigkeit wird ein in der widerstehenden Luft vertikal aufwärts geworfener Körper wiederum in dem Punkt

ankommen, aus welchem derselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit geworfen wurde.

Jene Geschwindigkeit bei der Rückkehr sei c_r. Ist nun s_0 der Weg, den der verzögerte Körper zurückgelegt hat, bis seine Geschwindigkeit auf Null gebracht ist, so hat man nach No. 9, I, wo nun $v = 0$ ist,

$$s_0 = \frac{1}{2k} ln \frac{g + kc^2}{g} = \frac{1}{2k} ln \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right)$$

woraus $ln\left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 2ks_0$

Also $1 + \frac{k}{g} c^2 = e^{2ks_0}$ (1)

Nach dem vorigen Satze findet man dagegen für die Geschwindigkeit c_r, mit welcher der Körper durch beschleunigte Bewegung am Ende des Weges s_0 wieder ankommt (No. 8, I.), wenn man s_0 statt s und c_r statt v setzt:

$$c_r = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2ks_0}}}$$

also $c_r^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{e^{2ks_0}}\right)$

woraus $\frac{1}{e^{2ks_0}} = 1 - \frac{k}{g} c_r^2 = \frac{g - kc_r^2}{g}$

Diese Gleichung mit Gleichung 1 multiplicirt

$$\left(1 - \frac{k}{g} c_r^2\right)\left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 1$$

oder reducirt

$$\frac{k}{g} c^2 - \frac{k}{g} c_r^2 \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 0$$

woraus $c_r^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{k}{g} c^2}$

11. Bewegt sich ein materieller Punkt nach irgend einem Gesetze in einer geraden oder krummen Linie, und denkt man sich von einem Punkt aus drei verschiedene gerade Linien gezogen, dann in jeder dieser Linien einen beweglichen Punkt sich so bewegend, dafs er sich in jedem Augenblick mit dem materiellen Punkt in einer und derselben Ebene befindet, die stets mit der Ebene der beiden anderen Linien parallel ist, so nennt man die Bewegungen, welche diese drei beweglichen Punkte in ihren Geraden besitzen, die **relative Bewegung des materiellen Punkts nach diesen drei Geraden**, die man **Richtungsaxen der relativen Bewegung** nennt.

Zur Vereinfachung pflegt man die drei geraden Axen rechtwinklig auf einander zu nehmen, und sie dienen dann zugleich als Axen der Coordinaten, welche die Stelle des materiellen Punkts in jedem Augenblick bestimmen. Hiernach ist nun auch leicht zu verstehen, was man unter den **relativen Geschwindigkeiten** eines materiellen Punkts nach drei Richtungsaxen begreift. Eben so, was man die **relative Beschleunigung** des materiellen Punkts nennt.

Bewegt sich der materielle Punkt immer in derselben Ebene, so nimmt man nur zwei Richtungsaxen in derselben Ebene.

12. Bewegt sich ein materieller Punkt in einer geraden Linie gleichförmig, so ist auch seine relative Bewegung nach drei Richtungsaxen gleichförmig, und sind die Richtungsaxen unter einander winkelrecht, so ist die relative Geschwindigkeit nach jeder Richtungsaxe = dem Product aus der absoluten Geschwindigkeit mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Richtung mit jener Richtungsaxe macht.

Dasselbe, was hier von den relativen Geschwindigkeiten gesagt ist, gilt auch von den relativen Beschleunigungen.

13. **Erklärung.** Bewegt sich ein materieller Punkt in einer geraden Linie, so heifst diese Gerade in der Aufeinanderfolge ihrer Punkte, wie sie nach einander die Orte des bewegten Punkts werden, betrachtet, die **Richtung der Bewegung**. Bewegt sich dagegen der Punkt in einer Curve, so heifst die Verbindungsgerade zweier Punkte seines Weges die **mittlere Richtung seiner Bewegung von dem einen Punkt zum anderen.** Dagegen heifst diejenige Gerade durch den einen Punkt in einer solchen Lage, dafs der Winkel zwischen ihr und der mittleren Richtung unendlich klein wird, die **Richtung der Bewegung in jenem Punkt.** Bekanntlich ist aber diese letzte Gerade die Tangente.

14. Ein materieller Punkt bewegt sich in einer ebenen Curve nach irgend einem Gesetze, seine relativen Bewegungen nach zwei unter sich normalen Richtungsaxen, die in derselben Ebene liegen, zu bestimmen und gegenseitig.

Es habe sich in der Zeit t der materielle Punkt von A bis B durch den Weg s bewegt, seine Geschwindigkeit in B sei v, so ist $v = \frac{\partial s}{\partial t}$. OX, OY seien die beiden Coordinatenaxen, so hat während der Zeit t der materielle Punkt relativ nach der Abscisse OX den Weg $x - x'$ zu-

rückgelegt. Dagegen ist sein relativer Weg nach der Axe OY in derselben Zeit $= y - y'$. Bezeichnet man also die relative Geschwindigkeit am Ende der Zeit t

Fig. 887.

nach der Abscissenaxe mit v_x, die nach der Ordinatenaxe mit v_y, so hat man $v_x = \frac{\partial (x - x')}{\partial t}$, und da x' constant ist, so hat man $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$.

Eben so erhält man

$$v_y = \frac{\partial (y - y')}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Nun entsteht die Frage, nach welcher Geraden, durch den Punkt B gehend, müfste der materielle Punkt sich von B aus bewegen, und zwar nach demselben Gesetz in Absicht auf t und die Gröfse des Weges, damit dieselben relativen Geschwindigkeiten nach den beiden Axen stattfänden. Diese Gerade mache mit der Abscissenaxe den Winkel φ, so hat man die relative Geschwindigkeit nach der Axe der X, weil die Geschwindigkeit jener geraden in $B = v$ sein soll, $= v \cos \varphi = \frac{\partial s}{\partial t} \cos \varphi$.

Eben so hat man die relative Geschwindigkeit nach der Axe der $Y = v \sin \varphi$ $= \frac{\partial s}{\partial t} \sin \varphi$. Nun sollen diese Geschwindigkeiten den vorhin gefundenen relativen einzeln gleich sein.

Man hat also $v \sin \varphi = v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$

und $v \cos \varphi = v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so hat man

$$tg\, \varphi = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nun ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente der Curve in B mit der Abscisse macht, und folglich ist die gesuchte gerade Linie die Tangente in B, und daher sagt man, dafs die Richtung der Geschwindigkeit, die ein materieller Punkt in irgend einem Punkt seiner Bahn hat, nach der Tangente der Curve in diesem Punkt statt finde.

Bewegte sich der materielle Punkt in einer Geraden statt in einer Curve und zwar nach demselben Gesetz, so dafs in der Zeit Δt auch der Weg Δs durchlaufen würde, so sind die gleichzeitigen relativen Wege nach den unter sich normalen Richtungsaxen $\Delta s \cdot \cos \alpha$ und $\Delta s \cdot \sin \alpha$, folglich sind auch die mittleren Geschwindigkeiten nach den Richtungsaxen $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha$ und $\frac{\Delta s}{\Delta t} \sin \alpha$, und hieraus die relativen Geschwindigkeiten im Anfange der Zeit $\Delta t = \frac{\partial s}{\partial t} \cos \alpha$ und $\frac{\partial s}{\partial t} \cdot \sin \alpha$. Also $= v \cos \alpha$ und $v \sin \alpha$, wenn v die wirkliche Geschwindigkeit in demselben Augenblick ist.

Aendert sich nun die wirkliche Geschwindigkeit in der Zeit Δt von v auf $v + \Delta v$, so ändern sich die relativen Geschwindigkeiten von $v \cos \alpha$ und $v \sin \alpha$ in $(v + \Delta v) \cos \alpha$ und $(v + \Delta v) \sin \alpha$. Also sind die relativen Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit $\Delta t = \Delta v \cos \alpha$ und $\Delta v \sin \alpha$.

Die relativen mittleren Beschleunigungen sind also $\frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \alpha$ und $\frac{\Delta v}{\Delta t} \sin \alpha$, mithin sind die relativen Beschleunigungen am Ende der Zeit $t = \frac{\partial v}{\partial t} \cos \alpha$ und $\frac{\partial v}{\partial t} \sin \alpha$. Nun war aber $\frac{\partial v}{\partial t}$ die absolute Beschleunigung in der geraden Linie, folglich ergeben sich die relativen Beschleunigungen aus der absoluten wie die relativen Geschwindigkeiten aus den absoluten Geschwindigkeiten.

Anders verhält es sich aber, wenn die Bewegung in einer Curve statt findet, d. h. die relativen Beschleunigungen lassen sich nicht nach dem eben angegebenen Gesetze bestimmen, wenn man annehmen wollte, die Bewegung erfolge nach der Geraden, die der Curve in irgend einem Punkte möglichst nahe kommt, also nach der Tangente.

Denn es mache die Gerade, in welcher sich der Punkt bewegen müſste, um dieselben relativen Beschleunigungen nach den beiden Axen zu geben, mit der Axe der X den Winkel φ, die Beschleunigung in dieser Graden am Ende der Zeit t sei $= u$, so sind die relativen Beschleunigungen nach der Axe der $X = u \cos \varphi$ und nach der Axe der $Y = u \sin \varphi$.

Sollten nun diese Beschleunigungen dieselben sein, welche sich aus der Bewegung des Punkts in der Curve ergeben, und weil die Beschleunigung das Differenzial der Geschwindigkeit ist, so müſste hiernach sein

$$u \cos \varphi = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 x$$

wenn man t als unveränderlich annimmt,

und $$u \sin \varphi = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 y$$

Werden beide Gleichungen quadrirt und addirt, so hat man

$$u^2 = (\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2 \qquad (1)$$

woraus $u = \sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}$

$$\cos \varphi = \frac{\partial_t^2 x}{u} = \frac{\partial_t^2 x}{\sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\partial_t^2 y}{u} = \frac{\partial_t^2 y}{\sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}}$$

Dagegen würde die Beschleunigung in der Tangente, wenn darin die Bewegung nach demselben Gesetz, wie in der Curve statt fände, weil die Geschwindigkeit darin am Ende der Zeit t nach dem Obigen $= v$ ist $=$ sein

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial s}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 s$$

Nun ist aber

$$(\partial_t s)^2 = (\partial_t x)^2 + (\partial_t y)^2 \qquad (2)$$

Also differenzirt

$$2\partial_t s \cdot \partial_t^2 s = 2\partial_t x \cdot \partial_t^2 x + 2\partial_t y \cdot \partial_t^2 y$$

woraus $$\partial_t^2 s = \frac{\partial_t x \times \partial_t^2 x + \partial_t y \times \partial_t^2 y}{\partial_t s}$$

und quadrirt

$$(\partial_t^2 s)^2 = \frac{(\partial x)^2 \cdot (\partial^2 x)^2 + (\partial y)^2 (\partial^2 y)^2 + 2\partial x \cdot \partial y \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 y}{(\partial s)^2}$$
$$= \frac{[(\partial x)^2 + (\partial y)^2]\,[(\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2]}{(\partial s)^2} - \frac{(\partial x)^2 (\partial^2 y)^2 + (\partial y)^2 (\partial^2 x)^2}{(\partial s)^2}$$
$$+ \frac{2\partial x \cdot \partial y \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 y}{(\partial s)^2}$$

Setzt man nun für den ersten Factor des ersten Gliedes aus Formel 2 den Werth $(\partial_t s)^2$ oder $(\partial s)^2$, so hebt sich dieser mit dem Nenner; der zweite Factor ist nach Formel $1 = u^2$, die beiden letzten Glieder sind ein Quadrat. Man hat also

$$(\partial_t^2 s)^2 = u^2 - \left(\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial s}\right)^2$$

Der Subtrahend ist aber niemals $= 0$, auſser wenn die Curve in eine gerade Linie sich verwandelt. Denn in diesem Fall ist

$$\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{(\partial x)^2} = \partial \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

weil $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist,

folglich auch der Zähler $= 0$ und $\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial s}$ ebenfalls $= 0$.

Da $\partial\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Constante und $\partial y = c \cdot \partial x$.

Diese Gleichung noch einmal integrirt gibt

$$y = cx + c'$$

eine Gleichung, welche nur der geraden Linie angehört, folglich ist die wirkliche Beschleunigung u des in einer Curve bewegten Punkts stets gröſser als die Beschleunigung nach der Tangente; letztere kann also nur eine relative Beschleunigung sein.

15. Um ohne Rücksicht auf einwirkende Kräfte, also rein phoronomisch die wirk-

Fig. 888.

liche Bahn eines Massenpunkts aus deren relativen Bewegungen ganz allgemein zu bestimmen, seien CX und CY die rechtwinkligen Coordinatenaxen, x und y die Coordinaten für einen augenblicklichen Ort des Massenpunkts M, in welchen dieser nach Verlauf der Zeit t gekommen ist, und s der von der Masse M bis dahin zurückgelegte Weg.

Nach phoronomischem Grundgesetz ist nun die Geschwindigkeit von M in diesem Angenblick $= \frac{\partial s}{\partial t}$, deren relative Geschwindigkeiten nach CX und CY sind $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial y}{\partial t}$; beide Geschwindigkeiten geben, zu einem Rechteck zusammengesetzt, in der Diagonale die Mittelgeschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Nun ist aber nach der Rectifikationsformel

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

daher $\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

oder
$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} \tag{1}$$

d. h. die Geschwindigkeit des Massenpunkts M in der Bahn ist = der Mittelgeschwindigkeit aus den beiden relativen Geschwindigkeiten.

Setzt man die beiden relativen Geschwindigkeiten mit deren Mittelgeschwindigkeit zu einem rechtwinkligen Dreieck MAB, Fig. 875 zusammen, so kann MA als die Tangente des Curvenelements in dem von M berührten Punkt betrachtet werden, folglich ist die Richtung der Mittelgeschwindigkeit beider relativen Geschwindigkeiten zugleich die Richtung der Bahntangente in demselben Punkt.

Aus diesem Grunde nennt man auch die Tangente an irgend einem Punkt einer Bahn die Richtung der Geschwindigkeit des Massenpunkts in seiner Bahn, oder die Richtung der wirklichen Bewegung in dem Ort der Bahn.

Nach phoronomischem Grundgesetz ist die Beschleunigung eines Massenpunkts nach Verlauf der Zeit $t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$;

also nach der Axe der $X = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

und nach der Axe der $Y = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Projicirt man nun diese relativen Beschleunigungen auf die Tangente der Bahn in M, so erhält man die Summe beider

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\beta$$

Nach der Curvenlehre ist aber der Cosinus des Winkels, den die geometrische Tangente mit einer der Coordinatenaxen bildet = dem Differensial der Coordinate als Function des urvariablen Bogens. Mithin, wie auch die Figur angibt:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} \text{ und } \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}$$

und die Summe beider relativen Beschleunigungen auf die Bahn reducirt:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

Nun ist $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s}$

Mithin
$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left[\frac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\frac{\partial t}{\partial s}\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]$$

also nach Gleichung 1

$$S = \frac{1}{4}\frac{\partial t}{\partial s}\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\partial t}{\partial s}\cdot 2\frac{\partial s}{\partial t}\partial\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\partial\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tag{2}$$

Wie aber oben die Seitenbeschleunigungen nach den Axen der X und der Y,

so ist $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ die Beschleunigung des Massenpunkts in seiner Bahn. Folglich ist für jeden Pnnkt der Bahn:

Die Snmme der anf die Bahntangente reducirten relativen Beschleunignngen gleich der Beschleunigung des in seiner Bahn sich bewegenden Massenpnnkts, weshalb dieselbe anch die **Tangentialbeschleunignng** genannt wird.

Projicirt man beide relativen Beschleunigungen auf die Normale MC, so gibt die ⫲ mit y gerichtete Beschleunigung die Projection $mn = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\alpha$, die Bewegnng nach CM hin gerichtet; die ⫲ mit x gerichtete Beschleunigung die Projection $Mn = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\beta$, die Bewegnng nach MC hin gerichtet.

Fig. 889.

Also die Snmme beider Projectionen

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\beta - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\alpha\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad (3)$$

Nnn ist der Krümmungshalbmesser der Bahn in M

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

Um diesen Ausdruck anf t als Urveränderliche zu gestalten hat man für den Zähler

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

also

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^3 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3}$$

für den Nenner

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t} = \partial\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)} = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}$$

folglich $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3}$$

daher $$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3}{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}$$

und die Snmme der Beschleunigungsprojectionen nach Formel 3

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{\partial t}{\partial s}\,\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3}{\varrho} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^8}{2\varrho}$$

Nnn ist $\frac{\partial s}{\partial t}$ die Geschwindigkeit v des Massenpnnkts M in dem Punkt (x, y) der Bahn, mithin

$$S = \frac{v^2}{2\varrho}$$

Diese Beschleunigung wird die **Centripetalbeschleunigung** genannt; sie ist, wie die Formel zeigt, nmgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser, mit welchem die Richtnng jeder Curvennormale zusammenfällt.

Da die Tangentialbeschleunigung und die Centripetalbeschleunigung mit den relativen Beschleunignngen gleichgeltend sind, so kann die Bahn nach jenen wie nach diesen bestimmt werden.

Photometer ist eine Vorrichtung zur Messung von Lichtintensitäten. Die Lichtstärke hat keinen Maafsstab, keine allgemein geltende Einheit, es mnfs also eine solche gewählt werden, als z. B. die Helligkeit eines Lichtes, einer Lampe bei

einer bestimmten Entfernung von dem zu beleuchtenden Gegenstande.

Eine Methode, das Verhältnifs der Wirkung zweier erleuchtender Flammen zu finden ist die, dafs man von beiden Lichtern Schatten auf eine hellfarbige Fläche werfen läfst. In einem dunklen Zimmer wird eine weifse Ebene, z. B. eine Papierfläche aufgestellt, vor dieser ein schmaler Körper; das zu prüfende und das prüfende Licht neben einander gestellt, werfen nun Schatten von diesem Körper gegen die weifse Fläche und man verschiebt das zu prüfende Licht so lange, bis beide Schatten dem Auge gleich dunkel erscheinen. Die Entfernungen beider Lichter von der Ebene geben im Quadrat das Verhältnifs deren Lichtintensitäten. Steht das prüfende Licht 2 Fufs von dem dunklen Körper, dieser 1 Fufs von der weifsen Ebene, und werden beide Schatten gleich dunkel, wenn das zu prüfende Licht 3 Fufs von dem Körper, also 4 Fufs von der weifsen Ebene entfernt ist, dann verhalten sich die Lichtintensitäten beider wie $3^2 : 4^2 = 9 : 16$. D. h. das zu prüfende Licht ist $\frac{16}{9}$ mal stärker als das prüfende Licht.

Die anderen Methoden sollen hier unerörtert bleiben.

Photometrie ist die Lehre von den im vorigen Art. gedachten Abmessungen des Lichts, die Kenntnifs aller Messungsmethoden und die Beurtheilung deren Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit.

Physik, Naturlehre, die Lehre von den äufseren Erscheinungen in Folge der Wirkung von Naturkräften. Sie steht der Chemie gegenüber, welche die innere Beschaffenheit der Naturkörper zu kennen, und diese Kenntnifs auf Zusammensetzung neuer Körper anzuwenden sucht. Die Physik ist eine reine und eine angewandte. Erstere sucht aus gegebenen Erscheinungen durch Beobachtungen und Versuche die allgemeinen Naturgesetze aufzufinden, welche diesen Erscheinungen zu Grunde liegen. Die letztere erklärt die Erscheinungen aus den von der reinen Physik überlieferten Versuche und Beobachtungen und wendet diese zugleich auf die Erklärung neuer Phänomene an.

Die Physik hat eine mathematische Seite: die Berechnung der durch die Physik in ihren Eigenschaften dargestellten Naturkräfte in ihren Wirkungen, als die der Schwerkraft, der Attraction, des Magnetismus. Es ist die angewandte Mathematik, welche die Lehren der reinen Mathematik auf die Physik rechnend und untersuchend überträgt.

Plan ist eine Grundrifszeichnung, besonders eine im verjüngten Maafsstab aufgetragene Vermessung.

Planconcaves Glas ist ein zu optischen Zwecken durchsichtiges flaches Glas, dessen eine Fläche eben und dessen andere die Form einer hohlen Calotte hat.

Planconvexes Glas ist ein Glas zum Zweck wie das vorstehende, dessen eine Fläche eben und dessen andere die Form einer erhabenen Calotte hat.

Planetarium ist ein aus kleinen Kugeln verfertigtes künstliches Sonnensystem, mit welchem durch Mechanismus die Bewegung der Planeten um die Sonne in kleinem Maafsstab vor Augen gestellt wird.

Planeten sind die Weltkörper, welche sich um die Sonne bewegen. Es geschieht dies zwar auch von den Kometen, welche man früher als zufällige Erscheinungen betrachtete, und die sich übrigens im Aeufseren von den Planeten ganz auffallend unterscheiden. Der Name Planet stammt aus dem Alterthum, sonderbarerweise von dem griechischen Worte πλανασθαι, herumirren; heifst also Irrstern, indem man sich vorstellte, dafs diese Weltkörper im Weltenraum herumirrten; aber ungeachtet man jetzt weifs, dafs sie einen regelmäfsigen, immer wiederkehrenden constanten Lauf haben, hat man aus Pietät gegen die alten Astronomen den Namen Planet beibehalten.

Der Name Komet kommt von dem Worte κομη, das Haar, wegen ihres haarartigen langen Schwanzes, woher diese Gestirne deutsch auch Haarsterne, Schwanzsterne genannt werden.

In Beziehung auf unsere Erde, die mit zu den Planeten gehört, hat man obere und untere Planeten. Die oberen P. sind diejenigen, deren Bahnen die Bahn der Erde einschliefsen, die unteren P. die, deren Bahnen von der Erdbahn eingeschlossen werden, deren es nur zwei gibt, den Merkur und die Venus.

In Beziehung auf deren Entfernung von der Sonne und von der Erde hat man helische Planeten (ἡλιος die Sonne), den Merkur, die Venus, die Erde und den Mars, weil diese der Sonne die näheren sind. Uranische Planeten den Jupiter, den Saturn und den Uranus, (οὐρανος, der Himmel) weil diese der Sonne am entferntesten sind und zu welchen jetzt noch der Neptun

gekommen ist. **Teleskopische Planeten** nennt man diejenigen, welche man mit bloßsen Augen nicht sehen kann; als die Vesta, die Asträa, die Juno, die Ceres, den Uranus, den Jupiter. Endlich nennt man **Asteroiden** die kleinen Planeten, die Vesta, Juno, Ceres, Pallas und alle die vielen neu entdeckten noch viel kleineren zwischen dem Mars und dem Jupiter befindlichen Planeten.

In dem Art. „Centralbewegung", Bd. II, pag. 15 sind von den sieben gröfseren Planeten die Entfernungen L derselben von der Sonne, deren Massen m im Verhältnifs zur Sonnenmasse = 1 und deren Momente $\frac{L}{m}$ angegeben. Ferner die Schwerpunkte des Sonnensystems im Maximo der Entfernung vom Sonnenmittel = 1,886 Sonnenhalbmesser, also noch 0,886 Sonnenhalbmesser aufserhalb der Sonne und im Minimo = 0,2446 Sonnenhalbmesser nachgewiesen.

Ueber die Gesetze der Bewegung dieser Planeten ist Folgendes zu beachten.

1. Eins der wichtigsten Gesetze, welche ermittelt worden sind, ist, dafs jeder Planet in gleichen Zeiten gleiche Sectoren durchläuft.

2. Es sei, Fig. 890, C der Ort der Sonne S, AZ ein Bogen der Bahn eines Planeten P. Ist dieser in A befindlich und hat im Abstande AC von C die Geschwindigkeit c, in einer anderen Entfernung CV die Geschwindigkeit v, so ist v so grofs wie in W, wenn der Körper von $CW = CK$ nach AC hin geradlinig bewegt wäre.

Fig. 890.

Denn ist V sehr nahe an A, so dafs die Kraft während der Bewegung als gleichförmig wirkend angesehen werden kann, ist die Schwerkraft = 1, die bewegende Kraft in $C = p$, dann ist die Zunahme an Geschwindigkeit nach dem Fall durch AW in der Zeit $t = 2g\,pt$.

Die nach AV wirkende Seitenkraft $= p \cos CAV$, also die Zunahme in V in der Zeit $t = 2g\,pt \cdot \cos CAV$

daher die Zeit t' für den Weg $AV = \frac{t}{\cos CAV}$

und die Zunahme in V

$$= 2g\,pt \cdot \frac{\cos CAV}{\cos CAV} = 2g\,pt$$

3. Die Kraft, wenn der Körper in gekrümmter Bahn läuft, hat als anziehende Kraft eine doppelte Wirkung:

A. Vermehrt sie die Geschwindigkeit, wenn sich der Körper C nähert und vermindert sie bei dessen Entfernung.

B. Erhält sie ihn in der Bahn, hindert, dafs er nicht dem Beharrungsvermögen zufolge nach der Tangente fortgeht; er macht also näherungsweise eine Kreisbewegung und es ist die bewegende Kraft für diesen Augenblick

$$p = \frac{c^2}{2gr}$$

4. Ist c die unveränderliche Geschwindigkeit, so ist die Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi r}{c}$$

woraus $$c = \frac{2\pi r}{T}$$

Nun ist nach No. 3

$$c^2 = 2g\,rp$$

also $$c = \sqrt{2g\,rp}$$

hierzu die vorige Gleichung

$$c = \frac{2\pi r}{T}$$

ergibt $$\sqrt{2g\,rp} = \frac{2\pi r}{T}$$

oder $$2g\,rp = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

oder $$gp = \frac{2\pi^2 r}{T^2}$$

Da nun g und π constant sind, so hat man für ein p', T', r'

$$p : p' = \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$$

d. i. die Schwungkraft ist gerade proportional dem Halbmesser und umgekehrt proportional dem Quadrat der Umlaufszeit.

5. Soll, wie es geschieht, die Sonne verschiedene Planeten in ihren Kreisen erhalten, so ist p in verschiedenen Abständen ungleich. Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz sind die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cubi der Abstände.

Also $T^2 : T'^2 = r^3 : r'^3$

Nach No. 4 aber ist

$$p : p' = \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$$

Die zweite Proportion durch die erste dividirt gibt

$$\frac{p}{T^2} : \frac{p'}{T'^2} = \frac{r}{T^2 r^3} : \frac{r'}{T'^2 \; r'^3}$$

oder $$p : p' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$$

Allgemeine Untersuchung über die Centralbewegung.

6. Wenn die Bahn kein Kreis ist, so ist die Schwungkraft wie vorhin, sobald man in jedem Punkt der Curve statt r den Krümmungshalbmesser nimmt.

Ist (Fig. 891 und 892) C der Centralpunkt, A Bahnpunkt, AB Tangente an der Bahn, die beschleunigende Kraft AF in die Längen AE und AD zerlegt, so

Fig. 891.

vermehrt AE die Geschwindigkeit, wenn $\angle CAB$ spitz, und vermindert die Geschwindigkeit, wenn $\angle CAB$ stumpf ist; AD hält aber der Schwungkraft das Gleichgewicht.

Fig. 892.

7. Beispiel. Da nach Kepler die Sonne im Brennpunkt steht und die durchlaufenden Sectoren der Zeit proportional sind, so ist zu schliefsen, dafs in der Sonne der Sitz der Kraft sei.

Es sei, Fig. 893

AE die halbe grofse Axe $= a$

DE die halbe kleine Axe $= b$

so ist der Inhalt der Ellipse $= \pi a b$ die Umlaufszeit in Secunden mit T bezeichnet:

Fig. 893.

Der in einer Secunde beschriebene Sector $= \pi \frac{ab}{T}$.

A. Ist der Körper in A dem Perihel, so ist dessen Entfernung

$$AC = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

AB, den in einer Secunde durchlaufenen Bogen setze man $= c$,

so ist Sector $ACB = \frac{1}{2} c \left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) = \pi \frac{ab}{T}$

also $$c = \frac{2\pi ab}{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) T},$$

der Krümmungshalbmesser in $A = \frac{b^2}{a} = r$

also Schwungkraft

$$= \frac{c^2}{2gr} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{2g \cdot \frac{b^2}{a} T^2} = \frac{2\pi a^3}{gAC^2 T^2}$$

B. Ist der Körper in G, im Aphel, Bogen $GJ = c'$, Sector $CGJ = \frac{1}{2} c' \cdot CG$,

Sector $\frac{1}{2} c' \cdot CG = \pi \frac{ab}{T}$

also $$c' = 2\pi \cdot \frac{ab}{CG \times T}$$

so ist die Schwungkraft

$$= \frac{c'^2}{2gr} = \frac{c'^2}{2g \cdot \frac{b^2}{a}} = 2\pi \frac{a^3}{g \cdot CG^2 \cdot T^2}$$

die Schwungkräfte in A und G verhalten sich also wie

$$\frac{1}{AC^2} : \frac{1}{CG^2}$$

Also eben so die Anziehungskräfte der Sonne in C, weil diese den Körper hindert, dem Beharrungsstande zu folgen und ihn nöthigt in der Bahn zu verbleiben.

C. Der Körper sei in D, die Richtung

der Bewegung also normal auf DE, $DC = a$, Bogen $DH = c_{,,}$.

Mithin Sector $DCH = \frac{1}{2} c_{,,} b = \pi \frac{ab}{T}$.

Denn $\frac{1}{2} c_{,,}$ ist $= \pi \frac{a}{T}$ oder $\frac{1}{2} DH =$ halbe Ellipse ADG und weil $\frac{a}{T}$ sich zu DH verhält wie $1 : ADG$

der Krümmungshalbmesser in $D = \frac{a^2}{b}$

also die Schwungkraft

$$\frac{c_{,,}^2}{2gr} = \frac{c_{,,}^2}{2g \cdot \frac{a^2}{b}} = 4\pi^2 \frac{a^2}{2g \cdot \frac{a^2}{b} T} = 2\pi^2 \frac{b}{gT^2}$$

und der von dieser nach der Richtung DE normal der Tangente DH sich zerlegende Theil ist $p_{,,} \cos CDE = p_{,,} \frac{b}{a}$.

Daher $p'' \frac{b}{a} = 2\pi^2 \frac{b}{gT^2}$

und $p'' = 2\pi^2 \frac{a}{gT^2}$

die drei anziehenden Normalkräfte sind demnach

$$2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{AC^2};\ 2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{CG^2};\ 2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{a^2}$$

und verhalten sich wie

$$\frac{1}{AC^2} : \frac{1}{CG^2} : \frac{1}{CD^2}$$

8. Es sollen nun die Geschwindigkeiten c; $c_,$; $c_{,,}$ betrachtet werden.

c in A ist $2\pi \cdot \frac{ab}{AC \cdot T}$; $AC = a - \sqrt{a^2 - b^2}$

$c_,$ in G ist $2\pi \cdot \frac{ab}{CG \cdot T}$; $CG = a + \sqrt{a^2 - b^2}$

$c_{,,}$ in D ist $2\pi \cdot \frac{a}{AD \cdot T}$; $AD = a$

Vorausgesetzt ist, wenn C, C' die Geschwindigkeiten des Körpers in den Entfernungen R, R' sind, das Gesetz:

$$C^2 - C_,^2 = 4gr^2 \cdot \frac{R_, - R}{RR_,}$$

ist nämlich g die Beschleunigung in der Entfernung r, so ist

$$G : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$$

woraus $G = g \cdot \frac{r^2}{R^2}$

fällt der Körper um die Länge R, so ist

$$c^2 = 4GR = 4r^2 \frac{g}{R}$$

also $C^2 = 4gr^2 \frac{1}{R}$; $C_,^2 = 4gr^2 \frac{1}{R'}$

$$C^2 - C_,^2 = 4gr^2 \cdot \frac{R_, - R}{RR_,} = 4gr^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

das allgemeine Gesetz nach dem Obigen ist aber

$$C^2 - C_,^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \left(\frac{1}{AC^2} - \frac{1}{CG^2}\right)$$

$$= 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{CG^2 - AC^2}{AC^2 \cdot CG^2} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{(CG + AC)(CG - AC)}{AC^2 \cdot GC^2}$$

$$= 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{CG - AC}{AC \cdot GC} = 8\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{CG - AC}{CG \cdot AC}$$

Ebenso

$$C^2 \pm C_{,,}^2 = \overset{(N)}{4\pi^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{T^2} \left(\frac{1}{AC^2} - \frac{1}{b^2}\right) = N \frac{(b + AC)(b - AC)}{b^2 AC^2}$$

$$= \overset{(M)}{4\pi^2} \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{b^2 - AC^2}{AC^2} = M \frac{2\left(b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}\right)}{AC^2}$$

$$= 8\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)}{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2} = 8\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= 8\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{CE}{a \cdot AC} = 8\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{a - AC}{a \cdot AC}$$

Beides der allgemeinen Formel gemäfs.

Die vorstehende Darstellung soll als Mittel dienen, die theoretischen Bestimmungen über die Planeten ohne Analysis zu übersehen.

9. Genauere Bestimmungen.

Es sei, Fig 894

C der Mittelpnnkt der Kräfte

AB die noch nnbekannte Bahn des Körpers.

BD die Tangente in B'.

p die in B wirkende beschleunigende Kraft.

Der Radiusvector BC für den Ort B des Planeten $= z$.

Die Fliehkraft desselben hierbei $= p_{,}$.

Fig. 894.

Dann ist $p : p_{,} = BC : BD = z : BD$, worans der beabsichtigte Weg des Planeten

$$BD = \frac{p_{,}}{p} z$$

Nun ist die Kraft, wenn $CD = w$ normal BD ist, von p nach $BD = p \cdot \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z}$

die normal auf $BD = p \frac{w}{z}$.

Ist die Geschwindigkeit in $B = v$,

so ist $\partial v = 2gp \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z} \cdot \partial t$

$$v \, \partial v = 2gp \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z} \partial s$$

und $\frac{pw}{z} = \frac{v^2}{2gr}$, wenn r der Krümmungshalbmesser in B ist.

$$\cos CBD = -\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{DB}{BC} = \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z}$$

daher $v \partial v = -2gp \, \partial z$

und $\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - \int p \, \partial z$,

wann c an einem bestimmten Ort die Anfangsgeschwindigkeit ist.

Planetenbahn. Die Weltkörper schweben frei im Raum, daher sind die Beschreibungen von Bahnen, entweder um Centralkörper oder um gemeinschaftliche Schwerpunkte das einzig mögliche Mittel zu deren Erhaltung, und es kann kein einziger Weltkörper in Ruhe gedacht werden. Das von Newton entdeckte Attractionsgesetz hat sich nicht nur bei allen Planeten, Kometen und Monden, sondern auch bei Gestirnen aufserhalb unseres Sonnensystems, namentlich den Doppelsternen als streng richtig bewährt, so dafs man es als zur Erhaltung des ganzen Weltalls zu Grunde liegend ansehen mufs; der Art also, dafs die Sonne mit ihrem ganzen Planetensystem mit mehreren anderen Sonnensystemen gemeinschaftlich wieder eine Centralsonne umkreist, die ein Sonnensystem zweiten Grades bildet u. s. f. (Vergleiche den Art. „Attraction" über die muthmafsliche Entstehung der Weltkörper und deren Systeme.)

Kepler hat zuerst bewiesen, dafs jeder der Umkreise, welche ein Weltkörper um seinen Centralkörper macht, als die Planeten und Kometen um die Sonne, die Monde um die Planeten, eine Ellipse ist, dafs der Centralkörper in deren einem Brennpunkt sich befindet, durch Attraction (Centripetalkraft) ihn zu sich zieht, während eine auf den umlaufenden Körper nach der Tangente in jedem Punkt seiner Bahn wirkende Cantrifugalkraft den geradlinigen Sturz des umlaufenden Körpers nach dem Centralkörper hin verhindert.

Beide Kräfte sind für jeden einzelnen Bahnpunkt so genau untereinander ausgeglichen, dafs die Bahn auf ewige Zeiten unverändert dieselbe bleibt.

Wie eine solche Zusammenwirkung möglich ist, zeigt der Art. „Centralkräfte" mit Fig. 282 bis 285 mit ausführlicher Erklärung; ferner der Art. „Centralbewegung" mit dem Beispiel der Bewegung des Mondes um die Erde, endlich der Art. „Bahn" mit Fig. 163 bis 167 die Zusammenwirkung der beiden Kräfte mit bildlicher Darstellung des Umlaufs eines Planeten und dessen verschiedene Geschwindigkeiten.

In Folge der elliptischen Form hat die Bahn eine grofse und eine kleine Axe; in der grofsen Axe hat der Planet seine Sonnennähe in dem Punkt des Perihelinms und seine Sonnenferne in dem Punkt des Apheliums. Der Ab-

stand zwischen dem Mittelpunkt der Ellipse und dem Brennpunkt, dem Standpunkt der Sonne heifst die Excentricität der Ellipse. Eine ausführliche Theorie über die Wirkung der Kräfte bei Bewegung der Weltkörper, s. die Art. „Bahn, Bahn der Weltkörper, Bahn der Weltkörper, die Ellipse". Siehe auch den Art. „Elemente der Bahn eines Planeten".

Planetenjahr ist die Zeit, in der ein Planet einen Umlauf um die Sonne macht.

Planetensystem ist die Zusammenwirkung sämmtlicher der Sonne zugehörigen Planeten einzeln und summarisch aufgefafst.

Planetoiden, e. v. w. „Asteroiden".

Planetolabium, e. v. w. „Planetarium".

Planimetrie ist der Theil der Geometrie, welcher sich mit den Ebenen beschäftigt. Vergleiche den Art. „Longimetrie".

Platonische Körper sind die fünf regelmäfsigen Polyeder.

Platonisches Jahr (grofses) der Zeitraum von 25873 Jahren, innerhalb welches die Weltaxe um die Axe der Ekliptik ihren Umgang vollbracht hat und die Nachtgleichenpunkte wieder an der vor dieser Zeit behaupteten Stelle sich befinden. (Vergl. den Art. „Nachtgleichen".)

Plus (+) ist das Zeichen für eine positive Gröfse und das der Addition.

Pneumatik, Aerodynamik ist die Mechanik der luftförmigen Körper (s. die Art. „Aerodynamik, Aerodynamische Gesetze"). Die ganze Lehre der Pneumatik findet sich ausführlich in dem Art. „Ausflufs der Luft".

Pol (πολέω, ich drehe um) ist immer ein Endpunkt einer geraden Linie in Beziehung auf etwas gleichförmiges, symmetrisches, was sich in gleichen Abständen von dem Pol um die gerade Linie herum sich befindet.

Pol heifst der feste Punkt, von dem aus die Ordinaten (Polarordinaten) nach einer Curve gezogen werden, wenn dieselbe durch eine Polargleichung bestimmt werden soll.

Pol ist jeder Endpunkt des Durchmessers einer Kugel in Beziehung auf den gröfsten auf dem Durchmesser (der Axe) normalen Kreis und allen mit diesem parallelen Kreisen.

Pole des Horizonts eines Orts der Erdoberfläche sind die unendlich weit entfernten Endpunkte der senkrecht auf dem Horizont befindlichen Linie, welche durch den Erdmittelpunkt nach der untern Himmelskugel geht: das Zenith oder der Scheitelpunkt über dem Horizont, das Nadir oder der Fufspunkt unter dem Horizont.

Pole des Himmels sind die Endpunkte der Weltaxe, welche mit unserer Erdaxe parallel läuft oder auch dieselbe ist, weshalb es auch einen Nordpol und einen Südpol am Himmel gibt, welche mit dem Nordpol und dem Südpol der Erde in einerlei geraden Linie liegen.

Pole der Ekliptik desgleichen die Endpunkte deren Axe, welche mit der Erdaxe einen Winkel von 23½° bildet.

Pole eines natürlichen Magnets sind die einander gegenüberliegenden Punkte, welche gegen Eisen die meiste Anziehungskraft äufsern. Man erkennt dieselben, wenn man den Magnet in Eisenfeile legt, wo dann diese Pole am meisten davon angehäuft sind.

Diese Pole eines natürlichen Magnets, so wie die einer künstlichen Magnetnadel üben auf die Pole eines zweiten natürlichen Magnets oder einer Nadel die eigenthümliche Wirkung, dafs sie sich je zwei und zwei einander anziehen und abstofsen. Sie heifsen daher freundliche und feindliche Pole, und in Beziehung auf Nord und Süd der hier folgenden magnetischen Pole der Erde, Nord- und Südpole; der Nordpol des einen stöfst den Nordpol des anderen ab und zieht den Südpol des anderen an, so dafs also die gleichnamigen Pole feindlich, die ungleichnamigen freundlich sind.

Die Erde hat ebenfalls magnetische Pole, einen Nordpol und einen Südpol; deren Richtung findet man an jeder Magnetnadel, denn sie zeigt nach ihnen hin und bildet mit ihrer Richtung die Richtung des magnetischen Meridians der Erde. Die Magnetnadel hat aufser dieser Declination (Unterschied ihrer Richtung mit dem wirklichen Erdmeridian) noch eine Inclination, eine Abweichung von der Horizontalen, und es gibt Punkte auf der Erde in der Nähe der Pole, an welchen die Nadel ganz senkrecht steht, und wo die Nordspitze in der Nähe des Nordpols und die Südspitze in der Nähe des Südpols senkrecht abwärts steht. Diese Orte der Erde sind deren magnetische Pole. Kapitain Rofs hat den magnetischen Nordpol erreicht,

und zwar unter 263° 14' östlich von Greenwich und 70° 5' nördlicher Breite; er fand nämlich daselbst die Inclination 90°.

Polabstand eines Sterns ist gleich 90° weniger seiner Abweichung. P. eines Orts der Erde ist gleich dessen Aequatorhöhe.

Polarcoordinaten. Deren Erklärung, s. den Artikel: „Coordinaten". Deren Bildung und Anwendung, s. den Art. „Curvenlehre, pag. 186 mit Fig. 537, pag. 193 mit Fig. 541.

Polardistanz, s. v. w. „Polarabstand".

Polardreieck bei Kugeldreiecken, s. v. w. „Supplementardreieck".

Polargleichung ist eine Bestimmungsgleichung für Curven mit Polarcoordinaten.

Polarkarte ist die Karte derjenigen Erdhalbkugel, für welche der Pol als Standpunkt der Aufnahme gedacht ist, in welcher also der Pol Mittelpunkt und der Umfang des Aequators die Grenze ist.

Polarkreise werden bei Umdrehung der Erde um die Axe von den Endpunkten der Axe der Ekliptik beschrieben; sie sind von den Polen 23½° entfernt. Der an dem Nordpol befindliche ist der nördliche, der am Südpol der südliche Polarkreis.

Polarprojection ist die Projection der auf der Erdoberfläche befindlichen Punkte und Linien zur Verzeichnung einer Polarkarte, indem also die wahre Lage jedes einzelnen Punkts in der von diesem auf die Aequatorebene gefällten Normale angegeben wird.

Polarstern, ein sehr heller Stern in der Nähe des Nordpols, der letzte Stern im Schwanz des kleinen Bären, der mit den beiden Sternen des großen Bären, die dessen Schwanz am entferntesten sind, in einer geraden Linie liegt. Die Lage des Polarsterns ist veränderlich, er nähert sich immer mehr dem Pol, hat gegenwärtig einen Abstand von demselben = 1° 35' und wird ihm noch 300 Jahre lang immer näher rücken.

Polarzirkel, s. v. w. „Polarkreis".

Polarzonen sind die von den Polarkreisen begrenzten Calotten, sowohl die auf der Erde als die an der Himmelskugel.

Polarisation des Lichts ist die Abänderung, welche ein Lichtstrahl erfährt, wenn er mittelst eines Spiegels reflectirt. Die Aenderung seiner Natur besteht darin, dafs er nur zum zweiten Mal mit derselben Kraft und unter demselben Winkel mittelst eines zweiten Spiegels reflectirt, wenn dieser zweite Spiegel mit dem ersten parallel ist. Je mehr man den zweiten Spiegel von der Parallelität mit dem ersten abweichen läfst, desto schwächer wird die Reflexion, ohne dafs dabei der Reflexionswinkel geändert wird, und wenn beide Spiegel unter einem Winkel von 90° sich befinden, so hört die zweite Reflexion auf, sie wird Null.

Polemoskop ist ein Fernrohr, mit welchem man nach einer anderen Richtung hin sieht als dahin wo der zu beobachtende Gegenstand sich befindet, indem ein schräger Planspiegel diesen anfängt und dessen Bild auf das Objectivglas wirft. Die Erfindung ist von Hevel, der es zum Gebrauch im Kriege empfahl, daher der Name (πόλεμος der Krieg).

Polhöhe, s. den Art. „Höhe des Pols" III, pag. 247, die Art.: „Astronomischer Horizont", pag. 148 und: „Anfgang und Untergang der Gestirne", pag. 174.

Für Landesvermessungen ist die Polhöhe eines bestimmten Orts der Erde von Wichtigkeit; direct kann man sie nicht messen, weil in dem Pol kein Fixstern steht. Man wählt daher einen der dem Pol zunächst stehenden Sterne, daber am zweckmäfsigsten den dem Pol nahen und hellen Polarstern, beobachtet und mifst in den Augenblicken seiner beiden Culminationen seine gröfste und seine geringste Höhe, so hat man in der halben Summe seiner beiden Höhen die Polhöhe. Oder man beobachtet und mifst die Höhe der Sonne in dem Augenblick des wahren Mittags, deren Abweichung man für jeden Tag des Jahres genau kennt. Ist die Abweichung nördlich, so subtrahirt man dieselbe von der Sonnenhöhe, ist sie südlich, so addirt man sie zur Sonnenhöhe und erhält in jedem der beiden Fälle die Aequatorhöhe, des Orts, welche von 90° abgezogen, dessen geographische Breite oder Polhöhe gibt.

Polyeder ist ein Körper, der von lauter ebenen geradliuigen Figuren begrenzt ist. Diese Figuren heifsen die Seitenflächen oder Grenzflächen, deren Summe die Oberfläche des Körpers. Die Seiten der Figuren, welche zweien zusammenliegenden Seitenflächen gemeinschaftlich sind oder die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen heifsen Kanten;

die Endpunkte der zusammentreffenden Kanten heifsen Ecken. Ein Neigungswinkel zweier zusammentreffenden Seitenflächen heifst deren Flächenwinkel und der von den in einer Ecke zusammenstofsenden Seitenflächen daselbst gebildete Winkel ein körperlicher Winkel oder Körperwinkel.

2. In jedem P. ist die Anzahl der ebenen Oberflächenwinkel das Doppelte der Anzahl der Kanten.

Denn jede Figur hat so viele Winkel als Seiten, da nun jede Kante zu zweien Seitenflächen gehört, also zwei Seiten ausmacht, so kann die Anzahl der Kanten nur die Hälfte der ebenen Winkel betragen. Hieraus folgt zugleich, dafs in einem P. die Anzahl der ebenen Winkel immer eine gerade Zahl sein mufs.

Ferner folgt daraus, dafs wenn das P. von Figuren mit einer ungeraden Anzahl von Seiten begrenzt wird, die Anzahl der Seitenflächen immer gerade sein mufs.

Wird ein P. von m Seitenflächen mit einer geraden Anzahl und von n Seitenflächen mit einer ungeraden Anzahl von Seiten begrenzt, so dafs die Anzahl der Begrenzungsflächen $= m + n$ ist, so mufs n gerade sein, m mag gerade oder ungerade sein.

3. Die Anzahl der ebenen Oberflächenwinkel eines P. ist mindestens dreimal so grofs als die Anzahl der Grenzflächen.

Denn sind die Grenzflächen Dreiecke, so sind der ebenen Winkel gerade dreimal so viel als die Anzahl der Grenzflächen beträgt; bei Flächen von mehr als drei Seiten wird die Anzahl der Winkel gröfser.

Ist demnach F die Anzahl der Grenzflächen, K die Anzahl der Kanten, so ist $2K$ die Anzahl der Winkel; also entweder $2K = 3F$ oder $2K > 3F$. Es gibt also kein P., in welchem die Anzahl der Kanten geringer wäre als $1\frac{1}{2}$ mal der Anzahl der Grenzflächen, oder die Anzahl der Grenzflächen gröfser als $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Kanten.

4. Die Anzahl aller auf der Oberfläche eines P. vorhandenen ebenen Winkel ist entweder gleich oder gröfser als die dreifache Anzahl der Ecken und als die dreifache Anzahl der Grenzflächen.

Denn jede Ecke und jede Grenzfläche wird aus mindestens 3 ebenen Winkeln gebildet.

Bezeichnet man noch die Anzahl der Ecken mit E, so ist die Anzahl der ebenen Winkel W nach Satz 3 $= 2K$. Es ist demnach immer entweder $2K = 3E$ oder $2K > 3E$ und $2K = 3F$ oder $> 3F$. Demnach kann in einem P. weder die Anzahl der Grenzflächen noch die der Ecken gröfser sein als $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Kanten.

5. In jedem P. ist die Summe der Anzahl der Ecken und der Grenzflächen um 2 gröfser als die Anzahl der Kanten. $(E + F = K + 2)$.

Denkt man sich innerhalb des P. einen beliebigen Punkt, beschreibt um denselben eine Kugelfläche, zieht von dem Punkt aus nach den Ecken des P. gerade Linien, beschreibt auf der Kugeloberfläche durch ja zwei auf derselben entstandene Durchschnittspunkte, welche den Ecken einer Kante des P. entsprechen, einen gröfsten Kreisbogen, so erhält man eine Summe von sphärischen Vielecken, die zusammen gleich der Kugeloberfläche sind.

Es kommt nun darauf an, die Inhalte dieser sphärischen Vielecke zu bestimmen.

In dem Art. „Kugel", No. 19 ist aber die Proportion als richtig erwiesen

$$J : F = \varphi - (n-2)2R : 2R$$

woraus

$$J = \frac{\varphi - (n-2)2R}{2R} \cdot F = \frac{\varphi - (n-2)180^\circ}{180^\circ} \cdot F$$

Hier bedeutet J den Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks, φ die Summe sämmtlicher Umfangswinkel, n die Anzahl seiner Seiten und F den Inhalt des 4ten Theils der Kugeloberfläche. Bezeichnet man die ganze Kugeloberfläche mit S, so hat man

$$J = \frac{\varphi - (n-2)180^\circ}{720^\circ} \times S \qquad (1)$$

Bezeichnet man ferner die Summen der Winkel der einzelnen Vielecke mit φ, φ', φ'' ... und die Anzahl der Seiten derselben mit n, n', n'' ... die Anzahl der Vielecke wieder mit F, so erhält man die der ganzen Kugeloberfläche S gleiche Inhaltssumme J_s sämmtlicher Vielecke.

$$\frac{\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots - (n + n' + n'' \ldots - 2F)\,180^\circ}{720^\circ} S = S$$

woraus

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots - (n + n' + n^2 + \ldots - 2F)\,180^\circ = 720^\circ \qquad (2)$$

Sämmtliche Winkel, deren Snmme = ist $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots$ liegen aber nm so viele Pnnkte als das P. Ecken hat nnd die Anzahl der nm eine Ecke liegenden Winkel machen znsammen 360° aus; mithin ist $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots = E \cdot 360°$. Nach No. 2 ist nnn die Anzahl $n + n' + n'' + \ldots = 2K$. Wenn man demnach diese Werthe in die letzte Gleichnng snbstituirt, so hat man

$$E \cdot 360° - (2K - 2F)\,180° = 720°$$

oder
$$E + F = K + 2 \tag{3}$$

6. Die Snmme aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines P. ist gleich so vielen Rechten als die 4fache Anzahl der Ecken beträgt weniger 8.

Also $W = (4E - 8)R\angle = (E - 2)4R\angle$.

Denn sind n, n', n'' .... dis Seitenanzahl der einzelnen Vielecke, so betragen deren Winkelsummen $(2n - 4)R$, $(2n' - 4)R$, $(2n'' - 4)R \ldots$ Nnn ist $n + n' + n'' + \ldots$ = der Anzabl aller auf der Oberfläche des P. befindlichen ebenen Winkel $= W = 2K$, mithin hat man die Summe sämmtlicher Winkel

$$(n + n' + n'' + \ldots)2R - 4FR = 2WP - 4FR = 4KR - 4FR = (K - F)4R$$

Oder
$$W = (K - F)\,4R \tag{4}$$

Nun ist aus Formel 3: $K - F = E - 2$, also die Snmme
$$W = (4E - 8)R\angle \tag{5}$$

7. In jedem P. ist die Anzahl der Kanten + 6 kleiner oder eben so grofs als die dreifache Anzahl der Ecken oder der Seitenflächeu.

Also $K + 6 \leqq \begin{cases} 3E \\ 3F \end{cases}$

Denn nach No. 4 ist $2K \geqq 3E$ und $2K \geqq 3F$.

Hierin aus Formel 3: E und F substitnirt

gibt $2K \geqq 3K - 3F + 6$

nnd $2K \geqq 3K - 3E + 6$

woraus $K + 6 \leqq 3F$

nnd
$$K + 6 \leqq 3E \tag{6}$$

8. Nach No. 3 ist $F \geqq \frac{2}{3}K$. Diesen Werth in Gleichnng 6 substitnirt, gibt $K \geqq 6$. Es geht hierans hervor, dafs in einem P. die Anzahl der Kanten nicht kleiner als 6 eein kann. Snbstitnirt man dieses Minimum von K in Formel 6, so erhält man

$$b + b \leqq \begin{cases} 3E \\ 3F \end{cases}, \text{ woraus } \begin{matrix} E \\ F \end{matrix}\Big\} \geqq 4$$

Es kann also in einem P. die Anzahl der Ecken nnd die der Grenzflächen nicht geringer als 4 sein. (Diese Sätze gehen übrigens schon aus No. 4 hervor.)

9. In jsdem P. ist die Anzahl F der Grenzflächen + 4 entweder kleiner oder gleich der doppelten Anzahl E der Ecken nnd die Anzahl der Ecken + 4 entweder kleiner oder gleich der doppelten Anzahl der Grenzflächen.

Denn da nach No. 4: $K \geqq \begin{cases} \frac{3}{2}F \\ \frac{3}{2}E \end{cases}$, so kann man Zahlen a, b finden,

so dafs $K = \frac{3}{2}F + a$ und $K = \frac{3}{2}E + b$

da nnn (Formel 3) $K = E + F - 2$

so hat man $\frac{3}{2}F + a = E + F - 2$

und $\frac{3}{2}E + b = E + F - 2$

woraus $F + 2a + 4 = 2E$

nnd $E + 2b + 4 = 2F$

daher $F + 4 < 2E$ und $E + 4 < 2F$

10. Da ans den No. 9 entwickelten Formeln

$$E = \tfrac{1}{2}F + a + 2$$

und
$$E = 2F - 2b - 4$$

so kann in einem P. die Anzahl E dsr Ecken weder kleiner als $\frac{1}{2}F + 2$ nocb gröfser als $2F - 4$ werden. Diese beiden Gröfsen $\frac{1}{2}F + 2$ und $2F - 4$ sind also die Grenzen zwischen welche in jedem P. die Anzabl E der Ecken fällt.

Da ferner $F = 2E - 4 - 2a$

und zugleich $F = \frac{1}{2}E + 2 + b$

so kann F nicht gröfser werden als $2E - 4$ noch kleiner als $\frac{1}{2}E + 2$ nnd diese bsiden Gröfsen $2E - 4$ und $\frac{1}{2}E + 2$ sind also die Grenzen, zwischen welche in jedem P. die Anzahl F der Seitenflächen fällt.

11. Kein P. kann von lauter sechs- nnd mehrseitigen Figuren eingeschlossen werden, auch gibt es kein P., dessen Ecken aus sechs oder mehr ebenen Winkeln znsammengesetzt sind.

Denn es würde die Anzahl W der ebenen Winkel auf der Oberfläche $\geqq 6F$, folglich $K \geqq 3F$ sein. Nun ist aber (Formel 6) $K \leqq 3F - 6$, also K immer $< 3F$, welches der Annahme widerspricht.

Wären die Ecken sechs- oder mehrwinklig, so wäre die Anzahl W der ebe-

nen Winkel $\geqq 6E$, also $K \geqq 3E$. Es ist aber (Formel 6) $K \leqq 3E - 6$, also $K < 3E$, welches der Annahme widerspricht.

12. **Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines P. kann nie kleiner sein als $2F$ rechte Winkel und nie gröſser als $8(F-3)$ rechte Winkel.**

Denn da nach No. 4: $2K \geqq 3F$

so ist $\quad 4K - 4F \geqq 2F$

Nun ist nach Formel 4:

$$(4K - 4F) R = W$$

mithin $W \geqq 2F$ rechte Winkel.

D. h. die Summe W der ebenen Winkel kann nie kleiner werden als $2F$ rechte Winkel, d. h. nie kleiner als so viele rechte Winkel, wie die doppelte Anzahl der Vielecksflächen ausdrückt.

Nach No. 7 ist $K + 6 \leqq 3F$

oder $\quad (K - F) + 6 \leqq 2F$

Also $(K - F) 4R \leqq (2F - 6) 4R$

also nach Formel 4

$$W \leqq 8F - 24 \text{ rechte Winkel.}$$

D. h. die Summe W der ebenen Winkel kann nie gröſser werden als $8F - 24$ und die Summe aller ebenen Winkel eines P. kann nie auſser den Grenzen $2F$ rechte Winkel und $8F - 24$ rechte Winkel fallen.

13. **Polyeder, die von lauter Dreiecken eingeschlossen sind und deren Ecken theils von fünf, theils von sechs ebenen Winkeln gebildet werden, können nicht mehr und nicht weniger als zwölf fünfflächige Ecken haben (sobald nämlich jede Ecke aus gleich vielen Flächen besteht).**

Da die Flächen sämmtlich Dreiecke sind, so hat jede Fläche 3 Seiten und 3 Winkel; bei F Flächen ist also die Anzahl der Seiten $= 3F$ und folglich die Anzahl der Kanten $K = \frac{3}{2}F$

woraus $\quad 2K = 3F \quad (1)$

Hierzu Formel 3:

$$E + F = K + 2 \quad (2)$$

Aus 1 den Werth von K in 2 gesetzt gibt

$$E = \tfrac{1}{2}F + 2 \quad (3)$$

Hat nun das P. p fünfflächige und q sechsflächige Ecken,

so ist $\quad E = p + q \quad (4)$

Die Anzahl der ebenen Winkel

$$W \text{ ist } = 5p + 6q \quad (5)$$

Eben so viele Seiten, also halb so viele Kanten hat das P., folglich ist

$$K = \tfrac{1}{2}(5p + 6q) \quad (6)$$

Aus 4 den Werth von q in 6 gesetzt gibt

$$K = \tfrac{1}{2}(5p + 6E - 6p) = \tfrac{1}{2}(6E - p)$$

woraus $\quad p = 6E - 2K$.

Setzt man nun aus 1 den Werth von K und aus 3 den Werth von E in die letzte Gleichung, so erhält man $p = 12$.

Setzt man in die Gleichungen $p = 12$, so erhält man

$$q = \tfrac{1}{3}K - 10;\; K = 3q + 30$$
$$= \tfrac{1}{2}F - 10;\; F = 2q + 20$$
$$= E - 12;\; E = q + 12$$

Kann in dem Polyeder jede Ecke von der anderen verschieden viele Begrenzungsflächen haben, so kann eine derselben von 1000 Flächen begrenzt sein.

14. **Zusammenstellung der für sämmtliche Polyeder allgemein geltenden Gesetze:**

$W = 2K$

$W = (4E - 8) R\angle$

$W = (K - F) 4 R\angle$

$W \geqq 3F$

$W \geqq 3E$

$W \geqq 2F$ Rechte Winkel, $W \leqq 8F - 24$ Rechte W. } Grenzwerthe

---

$F = K - E + 2$

$F \leqq \frac{1}{3}W$

$F \leqq \frac{2}{3}K$, $F \geqq \frac{1}{2}K + 2$ } Grenzwerthe

$F \leqq 2E - 4$, $F \geqq \frac{1}{2}E + 2$ } Grenzwerthe

$E = K - F + 2$

$E \leqq \frac{1}{3}W$

$E \leqq \frac{2}{3}K$, $E \geqq \frac{1}{2}K + 2$ } Grenzwerthe

$E \geqq \frac{1}{2}F + 2$, $E \leqq 2F - 4$ } Grenzwerthe

$K = \frac{1}{2}W$

$K = E + F - 2$

$K \geqq \frac{3}{2}F$, $K \leqq 3F - 6$ } Grenzwerthe

$K \geqq \frac{3}{2}E$, $K \leqq 3E - 6$ } Grenzwerthe

In jedem P. sind mindestens 4 Ecken, 4 Grenzflächen, 6 Kanten.

Von den Grenzwerthen hat man folgende Zusammenstellung.

Gegeben	der Gröſse	kleinster Werth	gröſster Werth
F	K	$\frac{3}{2}F$	$3F-6$
	E	$\frac{1}{2}F+2$	$2F-4$
	W	$2F$ rechte W.	$(8F-24)$ rechte W.
K	E	$\frac{1}{3}K+2$	$\frac{2}{3}K$
	F	$\frac{1}{3}K+2$	$\frac{2}{3}K$
E	K	$\frac{3}{2}E$	$3E-6$
	F	$\frac{1}{2}E+2$	$2E-4$

Ans der zweiten Rnbrik: K gegehen läſst sich folgendes schlieſsen:

1. Für $K=6$ ist $E=F=4$. Das P. ist eine drsiseitige Pyramide.

2. Kein P. kann 7 Kanten hahen, denn zwischen $\frac{7}{3}+2=4\frac{1}{3}$ nnd $\frac{14}{3}$ existirt keine ganze Zahl.

3. Für $K=8$ kann $E=F$ nnr 5 sein. Das P. ist eine vierseitige Pyramide.

4. Für $K=9$ ist $E=F=5$ bis 6. Das P. ist ein dreiseitiges Prisma, also von 5 Flächen nnd 6 Ecken.

5. Für $K=10$ ist $E=F$ nnr $=6$. Das P. ist eine fünfseitige Pyramide.

6. Für $K=11$ ist $E=F=6$ his 7. Das P. ist eine Snmme von einer drei- nnd einer vierseitigen Pyramide von gemeinschaftlicher Spitze, deren beide Grundflächen zwei Ebenen bilden, die mit einer Mittellinie zusammenhangen. Das P hat also 5 Seitenflächen + 2 Grundflächen, nud es ist $F=7$; es hat eine Spitze und 5 Grundecken, also $E=6$.

U. s. w.

15. Die Anzahl der Bestimmnngsstücke eines P. zu finden.

Ist eine der Grenzflächen ein $n$eck, so ist die Anzahl dessen Bestimmnngsstücke $=2n-3$.

Es sind nnn auſser diesen n noch $E-n$ Ecken vorhanden, zur Bestimmnng der Lage eines Pnnkts im Ranm gehören aber 3 Bestimmnngsstücke, mithin zu $(E-n)$ Pnnkte noch $3(E-n)$ Bestimmnngsstücke, im Ganzen also $2n-3+3(E-n)=3E-n-3$ Bestimmungsstücke.

Diese Anzahl ist aber zu groſs.

Denn haben die übrigen $(F-1)$ Umfangsflächen n', n'', n''' ... Seiten, so liegen immer n', n'', n''' ... in einer Ebene; die Lage einer Ebene ist aher durch drei Pnnkte bestimmt.

Ist nnn die Lage des n'ecks durch 3 Pnnkte bestimmt, so hleiben noch $n'-3$ Pnnkte zn bestimmen übrig, nnd da nun jeder derselben schon ein Bestimmnngsstück hat, so bedarf jeder nnr noch zweier Bestimmnngsstücke. Das n'eck hat also noch $2(n'-3)$ Bestimmnngsstücke nöthig nnd es sind für dasselbe $n'-3$ zu viel gerechnet. Dies gilt für alle übrigen Grenzflächen von den Seiten n'', n''' ...

Es sind demnach von den oben aufgeführten $3E-n-3$ Bestimmnngsstücken abzuziehen

$$(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$$
$$=(n'+n''+n'''+\ldots)-3(F-1)$$
$$=(n+n'+n''+\ldots)-[n+3(F-1)]$$

und da so viele Winkel als Seiten an den Grenzflächen sind, abznziehen

$$W-n-3(F-1)$$

und da nnr halh so viele Kanten als Seiten oder Winkel an den Grenzflächen sind: abzuziehen

$$2K-n-3(F-1)$$

Die erforderliche Anzahl Bestimmnngsstücke für das P. ist demnach

$$3E-n-3-2K+n+3(F-1)$$
$$=3(E+F)-2K-6=K$$

d. h. die Anzahl der erforderlichen Bestimmnngsstücke für ein P. ist = der Anzahl seiner Kanten.

Es ist hierbei zu bemerken, daſs die Kanten alleiu ein P. nicht bestimmen, es gehören diese nnd noch andere Stücke, besonders Winkel dazu.

16. Polyeder sind gleich, wenn sie einen gleichen körperlichen Inhalt haben.

P. sind congrnent, wenn sie, in einander gelegt gedacht, nur einen einzigen P. ausmachen.

P. sind ähnlich (nach Euklid XI, Erkl. 10), wenn sie von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt werden. Besser ist wohl die Erklärnng: Wenn die P. lauter gleiche Ecken in derselben Anordnnng haben, oder wenn alle homo-

loge Linien derselben einerlei Verhältnifs haben und alle homologen Winkel einander gleich sind, auch noch die homologen Stücke in einerlei Anordnung neben einander liegen.

Sind in zwei P. zwei Seitenflächen einander ähnlich und liegen alle übrigen Eckpunkte derselben in Spitzen je zwei und zwei ähnlicher Pyramiden, so sind beide P. einander ähnlich.

Aehnliche P. verhalten sich wie die Cubi ihrer Längenabmessungen.

P. sind symmetrisch, wenn sie congruente Flächen haben, die aber, wenn sie auf homologe Grenzflächen neben einander gestellt werden, mit den congruenten Flächen nach gerade entgegengesetzten Richtungen angeordnet sind.

Symmetrische P. haben gleichen körperlichen Inhalt.

Wenn man von den Eckpunkten eines P. auf eine aufserhalb des P. liegende Ebene Lothe fällt und jedes Loth auf der anderen Seite der Ebene um ein gleiches Stück verlängert, so sind die Endpunkte der Lothe die Eckpunkte eines P., welches dem ersten symmetrisch ist.

Regelmäfsige Polyeder.

17. **Ein regelmäfsiges Polyeder ist ein P., welches lauter regelmäfsige congruente Grenzflächen hat und dessen Ecken von gleich viel ebenen Winkeln eingeschlossen werden,**

Die Anzahl der regelmäfsigen P. ist begrenzt: Sie hängt ab von den regelmäfsigen Vielecken, welche dessen Grenzflächen sein können und von deren Anzahl zu Bildung deren Ecken.

Weniger als drei Vielecke können keine Ecke bilden und wie viel mehr dazu möglicher Weise genommen werden dürfen, hängt von der Gröfse deren Umfangswinkel ab, weil die Summe dieser Winkel kleiner als 4 rechte Winkel sein mufs.

Jeder Winkel eines regelmäfsigen Dreiecks hat 60°, es können also sechs Dreiecke, weil diese zusammen gerade 4 R.∠ betragen, zu einer Ecke nicht genommen werden. Es kann also nur regelmäfsige P. geben, deren Ecken 3, 4 und 5 Dreiecke zu Grenzebenen haben.

Für Quadrate als Grenzflächen existirt aus demselben Grunde nur ein einziges regelmäfsiges P.

Aus demselben Grunde giebt es nur ein einziges regelmäfsiges P., dessen Grenzflächen Fünfecke sind. Jeder Umfangswinkel eines regelmäfsigen Fünfecks hat 108°, drei Umfangswinkel zusammen also 324°. Mit dem Fünfeck hört die Grenzfläche auf; denn ein Sechseck hat Umfangswinkel von 120°; es betragen also drei derselben gerade 360°.

Ist die Anzahl der Seiten einer Grenzfläche $= n$, die Länge der Seite $= s$, so ist der Umfang einer Grenzfläche $= ns$. Um jede Grenzfläche läfst sich ein Kreis beschreiben; ist dessen Halbmesser $= r_{,}$, so ist die Normale auf die Seite $= \sqrt{r_{,}^2 - \frac{1}{4}s^2}$, also der Flächeninhalt einer Grenzfläche $= \frac{1}{2}ns\sqrt{r_{,}^2 - \frac{1}{4}s^2}$.

Um jedes regelmäfsige P. läfst sich eine Kugel beschreiben; ist deren Halbmesser $= r$, eine von dem Mittelpunkt auf die Grenzfläche gefällte Normale ist $= \sqrt{r^2 - r_{,}^2}$; setzt man nun den Inhalt der Grenzfläche $= F$, die Anzahl derselben $= N$, so ist der Inhalt des P.

$$= J = \tfrac{1}{3}NF\sqrt{r^2 - r_{,}^2}.$$

18. Das regelmäfsige P., welches drei Dreiecke für jede Ecke hat, heifst **Tetraeder** (τετρας vier) weil es vier Grenzflächen hat.

Das regelmäfsige P., welches vier Dreiecke für jede Ecke hat, heifst **Oktaeder** (Οκτας acht) weil es acht Grenzflächen hat.

Das regelmäfsige P., welches fünf Dreiecke für jede Ecke hat, heifst **Ikosaeder** (Εικοσαετια Zeit von 20 Jahren), weil es zwanzig Flächen hat.

Das regelmäfsige P., welches drei Quadrate für jede Ecke hat, heifst **Hexaeder** (Εξαετια Zeit von 6 Jahren) weil es sechs Flächen hat.

Das regelmäfsige P., welches drei Fünfecke für jede Ecke hat, heifst **Dodekaeder** (Δωδεκα zwölf) weil es zwölf Flächen hat.

19. **Den Neigungswinkel zweier aneinander liegenden Grenzflächen eines regelmäfsigen P. zu finden.**

Der Neigungswinkel zweier Ebenen wird mit Hülfe eines Körperdreiecks gefunden, wie dies in dem Art. „Parallelepipedum“ No. 11, pag. 244 mit Fig. 883 geschehen ist.

Es sei, Fig. 895, E eine Ecke eines regelmäfsigen P., die Anzahl der die Ecke bildenden ebenen Winkel sei $= n$, aus E beschreibe man mit beliebigem Halbmesser eine Kugel, EA, EB ... seien die von der Kugel abgeschnittenen Kantenstücke, $ABCDF$ sei das auf den Grenz-

Fig. 895.

flächen entstandene Polygon, dessen Seiten und Winkel alle gleich sind. Jede Seite, wie AB ... sei $= \alpha$, jeder Winkel, wie $FAEB = \gamma$, die Dreiecke EAB, EBC... sind alle gleichschenklig und es ist

$\angle AEB = \angle BEC = \frac{2\pi}{n}$.

Wird nun AB durch einen Bogen EG in G halbirt, so ist EG auf AB normal, $\angle AEG = \angle BEG = \frac{\pi}{n}$, folglich ist für den halben Neigungswinkel ($\frac{1}{2}\gamma$)

$$\sin GAE = \frac{\cos AEG}{\cos AG} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Ist nun die Anzahl der Seiten (AB,...) jeder Seitenfläche $= m$, so ist der Cosinus der halben Seite $AG = AH =$ dem Cosinus von ($90° - \angle GEA$) woraus

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 90° - \angle GEN = 90° - \frac{1}{m}\pi \qquad (1)$$

mithin

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}} = \frac{\cos\frac{180°}{n}}{\sin\frac{180°}{m}} \qquad (2)$$

Für das Tetraeder, das Octaeder, das Icosaeder, das Hexaeder, das Dodekaeder ist

$m = 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5$ und $n = 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 3$

Demnach hat man $\sin(\frac{1}{2}\gamma)$ für

das Tetraeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;	$\gamma = 70° 31' 44''$
das Octaeder	$= \frac{\cos 45°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$;	$\gamma = 109° 28' 16''$
das Ikosaeder	$= \frac{\cos 36°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{(2 + \frac{4}{5}\sqrt{5}}$;	$\gamma = 138° 11' 23''$
das Hexaeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;	$\gamma = 90°$
das Dodekaeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 36°} = \frac{5+\sqrt{5}}{20}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;	$\gamma = 116° 32' 54''$

20. Um R und r zu bestimmen bezeichne, wie No. 19

m die Anzahl der Seiten jeder Grenzfläche,

n die Zahl der zu jeder Ecke gehörenden Grenzebenen,

so hat man schon No. 19:

γ den Neigungswinkel zweier Ebenen durch die Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{180°}{n}}{\sin\frac{180°}{m}} \qquad (1)$$

Es sei Fig. 896: $ABFED$ die Grenzfläche eines P., C deren Mittelpunkt. Denkt man sich von C aus in und um dieses regelmäfsige Vieleck Kreise beschrieben, so ist CH der Halbmesser (r') des inneren, CE der Halbmesser (R') des äufseren Kreises, und es ist

Fig. 896.

$$CH = r' = EH \cdot tg\, CEH$$

also

$$r' = \tfrac{1}{2}k \cdot \cot\frac{180°}{m} \qquad (2)$$

und

$$CE = R' = EH \cdot sec\, CEH = \tfrac{1}{2}k \cdot cosec\, \frac{180^\circ}{m} \qquad (3)$$

Bedeutet der Punkt J den Mittelpunkt des P., und denkt man sich von J aus in und um das P. Kugeloberflächen beschrieben, so ist $JC = r$ der Halbmesser der inneren und $JE = R$ der Halbmesser der äußseren Kugeloberfläche, und man hat, da $\angle HCJ = R$ ist

$$JC = r = CH \cdot tg\, CHJ = r' tg\, \frac{\gamma}{2} \qquad (4)$$

und $JE^2 = R^2 = CE^2 + CJ^2 = R'^2 + r^2$ (5)

Es ist mithin, wenn man für r' aus Formel 2 in Formel 4 seinen Werth setzt

$$r = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg\, \frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

und wenn man aus Formel 3 und 6 die Werthe von R' und r in Formel 5 setzt

$$R^2 = \tfrac{1}{4} k^2 \cdot cosec^2 \frac{180^\circ}{m} + \tfrac{1}{4} k^2 \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg^2 \frac{\gamma}{2}$$

woraus

$$R = \tfrac{1}{2} k \sqrt{\left(1 + \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot sec^2 \frac{\gamma}{2}\right)} \qquad (7)$$

Nun ist Formel 1, No. 20

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{m}}$$

Und wenn man der Abkürzung wegen $\frac{180^\circ}{m} = \varphi$ und $\frac{180^\circ}{n} = \psi$ setzt,

$$R = \tfrac{1}{2} k \sqrt{\left[1 + \cot^2\varphi \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}\right]} = \tfrac{1}{2} k \sqrt{1 + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}}$$

$$= \tfrac{1}{2} k \sqrt{\frac{1 - \cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}} = \tfrac{1}{2} k \sqrt{\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} \cdot \frac{\cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}}$$

also

$$R = \tfrac{1}{2} k\, tg\, \psi \cdot tg\, \frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2} k \cdot tg\, \frac{180^\circ}{n} \cdot tg\, \frac{\gamma}{2} \qquad (8)$$

21. **Der Inhalt einer Grenzfläche** ist

$$J^2 = \tfrac{1}{4} mk^2 \cot \frac{180^\circ}{m} \qquad (1)$$

Fig. 897.

Denn ist, Fig 897, $ABGDE$ eine Grenzfläche eines regelmäßsigen P., und man zieht vom Mittelpunkt C derselben nach allen Spitzen A, B ... gerade Linien, so hat dieselbe m congruente Dreiecke ACB, BCG ... Es ist also

$$J^2 = m \times \triangle ACB$$

Fällt man von C auf eine der Kanten, z. B. auf DG eine Normale CF, so ist

$$J^2 = m \cdot \tfrac{1}{2} DG \cdot CF = \tfrac{1}{2} mk \cdot CF \qquad (2)$$

Es ist aber

$$CF = GF \cdot tg\, CGF = \tfrac{1}{2} k\, tg\, \frac{(2m-4)R}{2m} = \tfrac{1}{2} k\, tg\left(1 - \frac{2}{m} R\right) = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{2R}{m} \qquad (3)$$

daher

$$J^2 = \tfrac{1}{4} mk^2 \cot \frac{2R}{m} = \tfrac{1}{4} mk^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

wie zu erweisen war.

Um J^2 auch durch R und r ausdrücken zu können, hat man aus No. 20, Formel 8:

$$k = 2R \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

und Formel 6:

$$k = 2r\, tg\, \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

Diese Werthe in Gleichung 1 gesetzt, gibt

$$J^2 = m R^2 \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \qquad (4)$$

$$J^2 = m r^2 \cdot tg\, \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \qquad (5)$$

22. Der Inhalt des P. ist gleich dem so vieler Pyramiden als derselbe Grenzflächen hat, die als Grundflächen die gleichen Abstände des Mittelpunkts von denselben zu Höhen haben.

In Fig. 896 ist also die Ebene $ABFED$ die Grundfläche und $CJ = r$ die Höhe jeder solchen Pyramide P.

Nun ist nach Satz 5, Formel 3:

$$F = K - E + 2$$

No. 21, Formel 1 ist:

$$J^2 = \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

Pyramide $P = \tfrac{1}{3}(CJ) \cdot J^2 = \tfrac{1}{3} r J^2$.

Nach No. 20, Formel 6 ist

$$r = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$$

Daher eine Pyramide

$$P = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} k \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2} \times \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m} \qquad (1)$$

oder $P = \tfrac{1}{24} m k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$ (2)

Also $J^3 = \tfrac{1}{24} m F k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$ (3)

Aus No. 20, Formel 8 ist

$$k = 2R \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \qquad (4)$$

Diesen Werth in Formel 3 gesetzt gibt

$$J^3 = \tfrac{1}{24} m F \times 8 R^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2} \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3} m F R^3 \cdot \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \qquad (5)$$

Endlich ist, um J^3 auch durch r auszudrücken, aus No. 20, Formel 6

$$k = 2r\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

Diesen Werth in Formel 2 gesetzt, gibt

$$J^3 = \tfrac{1}{3} m F r^3\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

23. Den voranstehenden Untersuchungen und Ermittelungen entsprechend hat man die Zusammenstellung folgender für regelmäfsige P. allgemein geltende Formeln:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{m}}$$

$$R = \tfrac{1}{2} k\, tg \frac{180^\circ}{n}\, tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= r \cdot tg \frac{180^\circ}{n} \cdot tg \frac{180^\circ}{m}$$

$$r = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{180^\circ}{m}\, tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= R \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \cdot \frac{180^\circ}{m}$$

$$k = 2R \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$= 2r\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$J^2 = \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

$$= m R^2 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= m r^2\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3} m F k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$$

$$J^3 = \tfrac{1}{3} m F R^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3} m F r^3\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

24. γ und $\sin(\tfrac{1}{2}\gamma)$ s. No. 19.

Nach den Formeln No. 23 ist nun

R fürs Tetraeder	$= 3 \times r$	$= 3{,}000\,0000 \times r$
	$= \tfrac{1}{4}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}612\,3724 \times k$
fürs Octaeder	$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \times k$	$= 0{,}707\,1068 \times k$
	$= \sqrt{3} \times r$	$= 1{,}732\,0508 \times r$
fürs Ikosaeder	$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times k$	$= 0{,}951\,0565 \times k$
	$= \sqrt{3}\,(5 - 2\sqrt{5}) \times r$	$= 1{,}258\,4087 \times r$
fürs Hexaeder	$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \times k$	$= 0{,}866\,0254 \times k$
	$= \sqrt{3} \times r$	$= 1{,}732\,0508 \times r$

fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(6 + 2\sqrt{5}) \times k$	$= 1{,}401\ 2585 \times k$
	$= \sqrt{3}\,(5 - 2\sqrt{5}) \times r$	$= 1{,}258\ 4086 \times r$
r fürs Tetraeder	$= \frac{1}{3} \times R$	$= 0{,}333\ 3333 \times R$
	$= \frac{1}{12}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}204\ 1241 \times k$
fürs Octaeder	$= \frac{1}{6}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}408\ 2483 \times k$
	$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 0{,}577\ 3503 \times R$
fürs Ikosaeder	$= \frac{1}{12}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} \times k$	$= 0{,}755\ 7613 \times k$
	$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \times R$	$= 0{,}794\ 6435 \times R$
fürs Hexaeder	$= \frac{1}{2} \times k$	$= 0{,}500\ 0000 \times k$
	$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 0{,}577\ 3503 \times R$
fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{10}}(50 + 22\sqrt{5}) \times k$	$= 1{,}114\ 6381 \times k$
	$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\,(5 + 2\sqrt{5}) \times R$	$= 0{,}794\ 6544 \times R$
k fürs Tetraeder	$= \frac{2}{3}\sqrt{6} \times R$	$= 1{,}632\ 9932 \times R$
	$= 2\sqrt{6} \times r$	$= 4{,}898\ 9795 \times r$
fürs Octaeder	$= \sqrt{2} \times R$	$= 1{,}414\ 2136 \times R$
	$= \sqrt{6} \times r$	$= 2{,}449\ 4897 \times r$
fürs Ikosaeder	$= \sqrt{2}\,(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}) \times R$	$= 1{,}051\ 4620 \times R$
	$= (3 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times r$	$= 1{,}323\ 1691 \times r$
fürs Hexaeder	$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 1{,}154\ 7005 \times R$
	$= 2 \times r$	$= 2{,}000\ 0000 \times r$
fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{3}\sqrt{6}\,(3 - \sqrt{5}) \times R$	$= 0{,}713\ 6441 \times R$
	$= \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} \times r$	$= 0{,}778\ 7840 \times r$
J^2 fürs Tetraeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{3} \times k^2$	$= 1{,}632\ 9932 \times k^2$
	$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \times R^2$	$= 1{,}154\ 7005 \times R^2$
	$= 2\sqrt{3} \times r^2$	$= 3{,}464\ 1016 \times r^2$
fürs Octaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} + k^2$	$= 1{,}632\ 9932 \times k^2$
	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \times R^2$	$= 0{,}866\ 0254 \times R^2$
	$= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times r^2$	$= 2{,}598\ 0762 \times r^2$
fürs Ikosaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{3} \times k^2$	$= 0{,}433\ 0127 \times k^2$
	$= \frac{1}{16}(5 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times R^2$	$= 0{,}478\ 7270 \times R^2$
	$= \frac{3}{2}(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^2$	$= 0{,}758\ 1084 \times r^2$
fürs Hexaeder	$= k^2$	$= 1{,}000\ 0000 \times k^2$
	$= \frac{4}{3} \times R^2$	$= 1{,}333\ 3333 \times R^2$
	$= 4 \times r^2$	$= 4{,}000\ 0000 \times r^2$
fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{5}\,(5 + 2\sqrt{5}) \times k^2$	$= 1{,}720\ 4773 \times k^2$
	$= \frac{1}{8}\sqrt{10}(5 - \sqrt{5}) \times R^2$	$= 0{,}876\ 218 \times R^2$
	$= \frac{3}{2}\sqrt{2}(65 - 29\sqrt{5} \times r^2$	$= 1{,}245\ 1340 \times r^2$
J^3 fürs Tetraeder	$= \frac{1}{12}\sqrt{2} \times k^3$	$= 0{,}117\ 8511 \times k^3$
	$= \frac{8}{27}\sqrt{3} \times R^3$	$= 0{,}513\ 200 \times R^3$
	$= \frac{8}{9}\sqrt{3} \times r^3$	$= 1{,}539\ 6007 \times r^3$
fürs Octaeder	$= \frac{1}{3}\sqrt{2} \times k^3$	$= 0{,}471\ 4045 \times k^3$
	$= \frac{4}{3} \times R^3$	$= 1{,}333\ 3333 \times R^3$
	$= 4\sqrt{3} \times r^3$	$= 6{,}928\ 2032 \times r^3$
fürs Ikosaeder	$= \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\ k^3$	$= 2{,}181\ 6950 \times k^3$
	$= \frac{2}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times R^3$	$= 2{,}536\ 1509 \times R^3$
	$= 10(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^3$	$= 0{,}505\ 4056 \times r^3$
fürs Hexaeder	$= k^3$	$= 1{,}000\ 0000 \times k^3$
	$= \frac{8}{9}\sqrt{3} \times R^3$	$= 1{,}539\ 6007 \times R^3$
	$= 8 \times r^3$	$= 8{,}000\ 0000 \times r^3$

fürs Dodekaeder $= \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) \times k^2 = 7,663\ 1189 \times k^2$

$= \frac{2}{9}\sqrt{30(3 + \sqrt{5})} \times R^2 = 2,785\ 164 \times R^2$

$= 10\sqrt{2(65-29\sqrt{5})} \times r^2 = 4,980\ 5360 \times r^2$

J_s^2 fürs Tetraeder $= \sqrt{3} \times k^2 = 1,732\ 0508 \times k^2$

$= \frac{8}{3}\sqrt{3} \times R^2 = 4,618\ 8022 \times R^2$

$= 8\sqrt{3} \times r^2 = 13,856\ 4065 \times r^2$

fürs Octaeder $= 2\sqrt{3} \times k^2 = 3,464\ 1016 \times k^2$

$= 4\sqrt{3} \times R^2 = 6,928\ 2032 \times R^2$

$= 12\sqrt{3} \times r^2 = 20,784\ 6097 \times r^2$

fürs Ikosaeder $= 5\sqrt{3} \times k^2 = 8,660\ 2540 \times k^2$

$= 2(5 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times R^2 = 9,574\ 5412 \times R^2$

$= 30(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^2 = 1,516\ 2168 \times r^2$

fürs Hexaeder $= 6 \times k^2 = 6,000\ 0000 \times k^2$

$= 8 \times R^2 = 8,000\ 0000 \times R^2$

$= 24 \times r^2 = 24,000\ 0000 \times r^2$

fürs Dodekaeder $= 3\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} \times k^2 = 20,645\ 7273 \times k^2$

$= 2\sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \times R^2 = 10,514\ 616 \times R^2$

$= 30\sqrt{2(65 - 29\sqrt{5})} \times r^2 = 14,941\ 6080 \times r^2$

25. **Stereometrische Constructionen.**

Von diesen haben diejenigen, welche durch Euklid zu uns gekommen sind, das gröfste, besonders ein geschichtliches Interesse.

1. Aufgabe (Buch XII, 17 Satz). **Es sind zwei concentrische Kugeln gegeben, man soll in die gröfsere ein Polyeder beschreiben, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.**

Es sei $DEBP$ die gröfsere Halbkugeloberfläche; durch beide Kugeln sei durch deren gemeinschaftlichen Mittelpunkt C eine Ebene gelegt, so bildet diese zwei gröfste Kreise, den äufseren $BEDF$ und den ihm concentrischen inneren $GJKH$.

Fig 898.

Zeichne deren normal auf einander befindliche Durchmesser BD, EF, beschreibe in dem ersten Quadrant des gröfseren Kreises $BEDF$ die Seiten eines gleichseitigen Polygons von gerader Seitenanzahl, welches den kleineren Kreis nicht berührt.

Ziehe nun aus der an B nächsten Spitze L des Polygons den Halbmesser LC, verlängere denselben, bis er den Kreis nochmals in O schneidet, errichte auf der Kreisebene $BEDF$ in dem Mittelpunkt C eine Normale CP bis in den Umfang der gröfseren Kugel; durch die gerade Linie CP und jeden der beiden Durchmesser BD, LO lege zwei Ebenen, welche also auf der Kugeloberfläche gröfste Kreise bilden, deren Hälften DPB und OPL sichtbar sind.

Die Linien DB, LO, EF als Durchmesser, und eben so die Quadranten BP, LP, BE derselben Kugel sind einander gleich und es lassen sich also auch in BP und LP dieselben Polygonseiten eintragen. Ziehe hierauf die geraden Verbindungslinien $L'l$, $M'm$, $N'n$, so sind jedes der Vierecke, so wie das oberste Dreieck $N'nP$ ebene Figuren.

Dadurch nun, dafs man von den Punkten N', n, M', m, L', l nach dem Mittel C gerade Linien zieht, entsteht zwischen den beiden Quadranten BP und LP ein aus Pyramiden zusammengesetztes Polyeder von der gemeinschaftlichen Spitze C und deren Grundflächen die schon gedachten Vierecke und ein Dreieck ausmachen.

Construirt man nun ebenso Polygonseiten auf den drei übrigen Quadranten BF, FD, DE, desgleichen in der zweiten Halbkugel, so erhält man das verlangte aus lauter Pyramiden zusammengesetzte Polyeder, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.

Euklid macht den Beweis etwas weitläufig: In dem ersten Theil beweist er, *dafs die vier- und dreiseitigen Umfangs-Figuren Ebenen sind:*

Er fällt deshalb für das Viereck $BLlL'$ die Normalen la, $L'b$ auf die Grundebene $BFDE$, welche $\ddagger$ sind und auch die Durchschnittslinien BD, LO treffen und zieht ab. Da Bogen $BL' = Ll$, so ist $\angle CBL = \angle CLl$, bei a und b sind rechte Winkel, auch ist $L'B = lL$, folglich ist $L'b = la$ und $Bb = La$;

also auch $Cb = Ca$

folglich $Bb : bB = La : aC$

folglich $ab \ddagger LB$

Nun war $L'B \ddagger$ und $= la$

folglich $ab =$ und $\ddagger lL'$

folglich ist auch $lL' \ddagger LB$

Eben so wird bewiesen dafs $mM' \ddagger lL'$, $nN' \ddagger mM'$.

Da $lL' \ddagger BL$, so ist das Viereck $lL'BL$ in einer Ebene und so ist auch jede der anderen Vierecke in einer Ebene.

Um zu beweisen, *dafs die Ebene $LlL'B$ die innere Kugelfläche nicht berührt*, hat man nur zu zeigen, dafs die kleinste Entfernung, der Abstand derselben von C kleiner ist als der Halbmesser CG der inneren Kugel. Dieser Abstand ist aber offenbar die Normale Cc von C auf $LlL'B$.

Nun ist $\square BC = \square cC + \square cB$

ebenso $\square LC = \square cC + \square cL$

Da nun $BC = LC$

so ist $\square CB = \square CL$ und $CB = cL$

Es gilt dies von den beiden anderen Punkten des Vierecks ebenfalls und folglich hat man $cB = cL' = cl = cL$

Es läfst sich also aus c um das Viereck ein Kreis beschreiben.

Nun ist $BL > ba$, $ba = lL'$ also $BL > lL'$.

Da nun $BL = Ll = BL'$, so ist der zur Sehne lL' gehörige Bogen der kleinste, $\angle LcB$ ist stumpf und $\square LB > 2\square Bc$.

Fälle (Fig. 899) die Normale Ld. Da nun $BD < 2Dd$,

und $BD : Dd = BD \times Bd : Dd \times Bd$

so ist $BD \times Bd < 2Dd \times Bd$

Zieht man nun die LD, so ist

Fig. 899.

$$BD \times Bd = \square LB$$

ebenso ist $Dd \times BD = \square dL$

Also $\square LB < 2\square dL$

und da nach Obigem

$\square LB > 2\square Bc$

so ist $\square dL > \square Bc$

Da nun $\square BC = \square Bc + \square cC$

und $\square LC = \square Ld + \square Cd$

aber $BC = LC$

also $\square BC = \square LC$

so ist $\square Bc + \square cC = \square Ld + \square Cd$

Nun war $\square Ld > \square Bc$

folglich ist $\square Cc > \square Cd$

Also $Cc > Cd$

folglich noch viel mehr $Cc > CG$

woraus hervor geht, dafs die Oberfläche des P. die Oberfläche der inneren Kugel *nicht berührt.*

2. Aufgabe. *Ein Tetraeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.*

Es sei AB der Durchmesser der gegebenen Kugel, theile denselben in drei gleiche Theile, in einem der Theilpunkte C errichte eine Normale auf AB bis in den Umfang des Kreises.

Fig. 900.

Beschreibe nun um einen beliebigen Punkt H mit CD als Halbmesser einen Kreis, construire darin das gleichseitige Dreieck EFG, ziehe EH, FH, GH, er-

Fig. 901.

richte auf der Kreisebene in H die Normale $HK = AC$, ziehe KE, KF, KG, so ist der Körper von der Grundfläche EFG und der Spitze K das verlangte Tetraeder.

Beweis. 1. dafs der Körper ein Tetraeder ist.

KH bildet mit HE, HF, HG rechte Winkel. Da nun $HE = HF = HG$, so ist auch $KE = KF = KG$.

Nun ist $AB : BC = \square AD : \square DC$

Da nun $HK = AC$; $HE = HF = HG = DC$

so ist $KE = KF = KG = AD$

Aber $AC = 2BC$, also $AB = 3BC$

also $\square AD = 3 \square DC$

und da $DC = EH$

$\square AD = \square EF = 3 \square EH$

folglich $AD = EF = EG = FG$

und zugleich $AD = KE = KG = KF$

folglich sind sämmtliche den Körper einschliefsende Dreiecke gleichseitig und congruent.

2. Dafs der Körper von der gegebenen Kugel umfafst wird.

Verlängere die KH um die Länge $HL = BC$, so ist $AB = KL$.

Da nun $AC : CD = CD : CB$

Aber $AC = KH$, $CD = HE$, $CB = HL$

so ist auch $KH : HE = HE : HL$

folglich EH normal KL, $\angle EHK = \angle EHL = R$ und ein über KL beschriebener Halbkreis geht durch den Punkt E.

Dreht man nun diesen Halbkreis mit seinem Durchmesser KL um seinen Mittelpunkt, so trifft er eben so durch die Spitzen G und F. Es liegen also die 4 Eckpunkte des Tetraeders in der Kugeloberfläche, deren Durchmesser AB ist.

3. Aufgabe. Ein Octaeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Ist, Fig. 900, AB der gegebene Durchmesser der Kugel, so errichte in dessen Mittelpunkt M den winkelrechten Halbmesser MN, ziehe NA.

Construire nun, Fig. 902, ein Quadrat $EFGH$, von der Seite $= AN$, ziehe FH, EG, die sich in K schneiden. Errichte auf $EFGH$ in K die Winkelrechte KL mit Verlängerung rückwärts nach M, mache $KL = KM =$ einer der Linien KE, KF, KG, KH. Ziehe von L und M gerade Linien nach E, F, G, H, so ist der entstandene Körper das verlangte Octaeder.

Fig. 902.

Beweis. 1. Dafs der Körper ein Octaeder ist.

$KE = KH$, $\angle EKH = R$

folglich $\square HE = 2 \square KE$

Nun ist auch $LK = EK$ und $\angle LKE = R$,

also $\square EL = 2 \square EK$

folglich $\square HE = \square LE$ und $HE = LE$

Aus gleichen Gründen $LH = EH$,

folglich $\triangle LEH$ gleichseitig.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, dafs die Dreiecke LEF, LFG, LGH auch gleichseitig und dem $\triangle LEH$ = sind, so wie auch die vier Dreiecke unterhalb der Ebene $EFGH$ mit der gemeinschaftlichen Spitze M, folglich ist der von den Dreiecken begrenzte Körper ein Octaeder.

2. Dafs sich das Octaeder von der gegebenen Kugel umfassen läfst.

Es ist $LK = KM = KE$; mithin liegt der Punkt E in einem über LM als Durchmesser beschriebenen Halbkreis. Drehet man diesen Halbkreis um seinen festen Durchmesser LM herum, so geht er aus demselben Grunde auch durch die Punkte F, G, H, folglich liegen die Ecken L, M,

E, F, G, H in dem Umfang einer Kugel, deren Durchmesser AB, Fig. 902 ist.

4. Aufgabe. Einen Würfel (Hexaeder), welcher sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Ist, Fig. 902, AB der Durchmesser der Kugel, theile wieder denselben, dafs $AB = 3BC$, so ist der Würfel von der Seite BD der verlangte.

Denn in dem Würfel ist jeder Umfangswinkel ein Rechter, alle Seiten s sind einander gleich, mithin ist das $\square$ der Diagonale d einer Grenzfläche $= 2 \times$ dem $\square$ einer Seite s, d. i. $\square d = 2\square s$. Die Diagonale d bildet aber mit einer der ihr anliegenden Seiten s ebenfalls einen rechten Winkel und folglich mit dieser, mit jeder der beiden Diagonalen D des Würfels wiederum ein rechtwinkliges $\triangle$ und es ist $\square D = \square d + \square s = 3\square s$.

Nun ist $\square AB : \square BD = AB : BC = 3 : 1$

und da auch $\quad \square D : \square s = 3 : 1$

so ist $\quad \square D : \square s = \square AB : \square BD$

und da $BD = s$ also auch $\square DB = \square s$

so ist $\quad \square D = \square AB$

also $\quad D = AB$.

5. Aufgabe. Ein Ikosaeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Es sei I. der Durchmesser AB der gegebenen Kugel so getheilt, dafs $AB = 5BC$.

Fig. 903.

Errichte auf AB in C das Loth CD bis in den Umfang des Halbkreises und ziehe BD.

Beschreibe II. um einen Punkt W mit dem Halbmesser BD einen Kreis, beschreibe in diesen das gleichseitige Fünfeck $EFGHK$, halbire die 5 Bogen in L, M, N, O, P, und zeichne das Fünfeck $LMNOP$.

In den Punkten E, F, G, H, K errichte auf der Kreisebene die Normalen EQ, FR, GS, HJ, KV, mache jede derselben $= BD$ und verbinde deren Endpunkte zu einem gleichseitigen Fünfeck $QRSJV$; ziehe ferner die Linien QL, RL; RM, SM; SN, TN; JO, VO; VP, QP.

Ziehe III. auf der Kreisebene im Mittelpunkt W die Normale $WZ + WY$, mache WX = der Seite der sechsseitigen, XZ und WY = der Seite der zehnseitigen Figur, verbinde durch gerade Linien den Punkt Z mit den Winkelpunkten der Figur $QRSTV$ und den Punkt Y mit den Winkelpunkten der Figur $LMNOP$, so ist das verlangte Ikosaeder construirt.

Beweis der Construction. 1. Dafs der Körper ein Ikosaeder ist.

In II. sind EQ, FR ... auf der Kreisebene normal, = und $\nparallel$, folglich sind auch QR und EF = und $\nparallel$, folglich ist QR die Seite eines in den Kreis $EFGHK$ beschriebenen gleichseitigen Fünfecks. Dasselbe gilt von den übrigen Seiten und folglich ist $QRSTV$ ein gleichseitiges Fünfeck.

Es ist $EQ = BD$ = des Kreises $EFGHK$ Halbmesser, folglich = der Seite des gleichseitigen Sechsecks, EL die Seite des gleichseitigen Zehnecks, $\angle LEQ = R$, also LQ die Seite des gleichseitigen Fünfecks, aus gleichem Grunde auch LR, aber auch QR, folglich $\triangle QRL$ gleichseitig und aus denselben Gründen die Dreiecke RSM, STN, TVO, VQP gleichseitig.

In III. sieht man die Polygone $RSTVQ$ und $LMNOP$, von den gedachten Dreiecken aber die, deren Grundlinien ST, TV, VQ und deren Spitzen N, O, P sind; desgleichen die, deren Grundlinien NO, OP und deren Spitzen T, V sind, nämlich die Dreiecke STN, TVO, VQP, NOT, OPV.

Nun sind XW, QE beide normal auf der Kreisebene, also $\nparallel$ und auch gleich; folglich ist XQ mit WE = dem Halbmesser = der Seite des Sechsecks. XZ ist die Seite des Zehnecks und $\angle QXZ = R$, daher wieder QZ die Seite des Fünfecks, aus gleichen Gründen VZ, und nach Obigem auch QV; folglich $\triangle VQZ$ gleichseitig. Dasselbe gilt von den Dreiecken, deren Grundlinien PO, ON, NM, ML, LP sind und deren Spitze Y ist. Demnach ist der construirte Körper ein Ikosaeder.

2. Dafs sich das Ikosaeder von der Kugel umfassen läfst.

In III. ist WX die Seite des Sechsecks, XZ die des Zehnecks, folglich ist

$$WZ : WX = WX : XZ$$

also

$$WZ : WP = WP : WY$$

Nun ist $\angle PWZ = \angle PWY = R$, also wenn man PZ zieht, $\triangle PWZ \sim \triangle PWY$, folglich $\angle YPZ = R$, folglich geht der über YZ beschriebene Halbkreis durch P.

Aus obiger Proportion

$$WZ : WY = WX : XZ$$

wo $WZ = XY$ und $WX = XQ$ folgt

$$XY : XQ = XQ : XZ$$

folglich ist, wenn man QY zieht, auch $\angle YQZ = R$, folglich geht der über YZ beschriebene Halbkreis auch durch Q.

Wird dieser Halbkreis um seinen festen Durchmesser YZ herumgedreht, so geht er aus gleichen Gründen auch durch die übrigen Eckpunkte des Ikosaeders; sie befinden sich also in der Oberfläche einer Kugel von dem Durchmesser $YZ = AB$.

Denn da WZ nach stetiger Proportion in X geschnitten ist, so ist, wenn man WX in a halbirt: $\square Za = 5\square aX$. Nun ist $YZ = 2Za$ und $WX = 2aX$, folglich $\square YZ = 5\square WX = 5\square DB$. Da nun $AB = 5BC$ und $AB : BC = \square AB : \square BD$, also $\square AB = 5\square BD$. Folglich $\square YZ = \square AB$ und $YZ = AB$.

6. Aufgabe. Ein Dodekaeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Construire das Quadrat für den Würfel No. 4, setze zwei derselben $ABCD$, $CBEF$ rechtwinklig an einander, halbire ihre Seiten und verbinde die Theilpunkte durch die geraden Linien GK, HL, MH, NO. Schneide die NP, PO, HQ in den Punkten R, S, T nach stetiger Proportion, so dafs PR, PS, QT die gröfseren Abschnitte sind, errichte in R. S, T auf den Würfelflächen die Normalen RV, SW, TX mache diese den gröfseren Abschnitten PR, PS, QT gleich und ziehe die Linien VB, BX, XC, CW, WV, welche in einer Ebene liegen, gleiche Winkel einschliefsen und ein über der Seite BC des Würfels beschriebenes gleichseitiges Fünfeck bilden. Wird nun auf jeder der zwölf Würfelseiten ein solches Fünfeck beschrieben, so bilden diese das verlangte Dodekaeder.

Fig. 904.

Beweis. 1. Dafs $VBXCW$ eine gleichseitige Figur ist.

Ziehe BR, BS, BW. Der Theilung zufolge ist

$$\square PN + \square NR = 3\square PR$$

aber $PN = BN$

und $PR = RV$

folglich $\square BN + \square NR = 3\square RV$

Nun ist $\square BN + \square NR = \square BR$

folglich ist $\square BR = 3\square RV$

folglich $4\square RV = \square BR + \square RV = \square BV$

folglich $2RV = BV$

Nun ist $RS = 2RP = 2RV$

also $RS = VW = 2RV$

folglich ist $BV = VW$

Auf dieselbe Weise wird die Gleichheit der übrigen Seiten des Fünfecks $BVWCX$ bewiesen.

2. Dafs die Figur in einer Ebene ist.

Ziehe durch P die $PY \mp$ den Linien RV, SW, verbinde Y, H und H, X, so ist YHX eine gerade Linie.

Denn da HQ in T nach stetiger Proportion geschnitten, und QT der gröfsere Abschnitt ist, so ist

$$HQ : QT = QT : TH$$

Aber $HQ = HP$ und $QT = TX = PY$; folglich diese Werthe eingesetzt:

folglich $HP : PY = TX : TH$

Nun ist $HP \mp TX$ und LH mit $TH \mp PY$.

Erstere, weil sie auf der Ebene BD, letztere, weil sie auf der Ebene BF winkelrecht sind, folglich sind HY, HX in gerader Linie, folglich ist die Figur $BVWCX$, in welcher die ganze XY ist, in einer Ebene.

3. Dafs die Figur gleichwinklig ist.

Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten und PR der gröfsere Abschnitt, so ist

$$PN + PR : PN = PN : PR$$

Nun ist $PR = PS$

also $NP + PR = NS$

also $NS : NP = NP : PS$

folglich ist NS nach stetiger Proportion in P geschnitten und NP der gröfsere Abschnitt, folglich

$$\square NS + \square SP = 3\square PN$$

aber $PN = BN$ und $SP = SW$

folglich $\square NS + \square SW = 3\square NB$

folglich auch

$$\square NB + \square NS + \square SW = 4\square NB$$

Nun ist $\square NB + \square NS = \square BS$

folglich ist

$4\square NB = \square BS + \square SW = \square BW$

folglich $BW = 2NB = BC$

Nun war nach Beweis 1.

auch $BV = BX$ und $VW = CX$

Folglich ist $\angle BVW = \angle BXC$

Auf eben die Art wird die Gleichheit der Winkel VWC, BXC bewiesen, folglich ist $BVWCX$ gleichwinklig.

4. Dafs sich dieses Dodekaeder von der gegebenen Kugel umfassen läfst.

Verlängere YP bis in das Innere des Würfels nach Z, so trifft YZ die Diagonale des Würfels, so dafs beide in Z einander halbiren. Folglich ist Z der Mittelpunkt der Kugel, die den Würfel umfafst und PZ gleich der halben Seite PN des Würfels. Ziehe VZ.

Da NS nach stetiger Proportion geschnitten und NP der gröfsere Abschnitt ist, so ist

$$\square NS + \square SP = 3\square NP$$

Nun ist $NP = PZ$ und $PS = PY$

also $NS = YZ$

Auch ist $SP = RP$

also $SP = VY$

folglich $\square YZ + \square YV = \square VZ = 3\square NP$

Nun ist das Quadrat des Durchmessers der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat der Seite des Würfels, also auch das Quadrat des Halbmessers dem dreifachen Quadrat der halben Seite NP; folglich ist VZ der Kugelhalbmesser, Z der Mittelpunkt und der Punkt V in der Kugelfläche. Auf ähnliche Art wird bewiesen, dafs aufser V auch jeder andere Eckpunkt

des Dodekaeders in der Kugelfläche liegt; folglich wird das Dodekaeder von der Kugel umfafst.

26. Die Seiten der fünf regelmäfsigen Körper zu finden.

Es sei AB der Durchmesser der um die Körper beschriebenen Kugel, in C und D so geschnitten, dafs $AC = BC$ und $AD = 2BD$. Errichte in C und D Winkelrechte CE, DF bis an den Halbkreis, ziehe AF, BF, schneide BF in N nach stetiger Proportion, so dafs BN der gröfsere Abschnitt ist. Errichte in A die Winkelrechte $AG = AB$ auf AB ziehe CG, welche den Halbkreis in H schneidet, fälle die Winkelrechte HK auf AB, mache $CL = CK$, so dafs also $LK = 2CK$ ist, errichte endlich auf AB in L die Winkelrechte LM, so ist

AF die Seite des Tetraeders

BF die Seite des Hexaeder

BE die Seite des Octaeders

BN die Seite des Dodekaeders

BM die Seite des Ikosaeders.

Die Beweise der Constructionen gehen aus den Untersuchungen No. 25 hervor.

Fig. 905.

1. Fürs Tetraeder.

Die Theilung des Durchmessers AB in dem Punkt D stimmt genau mit der Theilung des Durchmessers AB in dem Punkt C der Fig. 900 für das Tetraeder. Dort ist

$AC = 2BC$, also $AB = 3BC$ und folglich $AB = \frac{3}{2} AC$.

Da nun $AB : AC = \square AB : \square AD$

so ist auch $\square AB = \frac{3}{2} \square AD$

wo AB der Durchmesser der gegebenen Kugel und AD die Tetraederseite ist.

Nun ist AF, Fig. 905 $= AD$, Fig. 900
AB, Fig. 905 $= AB$, Fig. 900

Folglich ist AF die Seite des in die Kugel vom Durchmesser AB beschriebenen Tetraeders.

2. Für das Hexaeder.

Auch hier ist durch D dieselbe Theilung, Fig. 900 durch den Punkt C. Es ist dort BD als die Seite des in der Kugel vom Durchmesser AB beschriebenen Würfels erwiesen, folglich ist auch Fig. 904, BF die Seite des von der Kugel des Durchmessers AB umfafsten Würfels.

3. Für das Octaeder.

Die Richtigkeit der Construction geht aus No. 25, 3 hervor.

4. Für das Dodekaeder.

Nach No. 25, 6 ersieht man mit Fig. 904, dafs die Seite des in die Kugel ein beschriebenen Würfels so getheilt werden mufs, um die Seite des Dodekaeders zu geben wie Fig. 905 dieselbe Seite BF des Quadrats, und dafs also die Construction richtig ist.

5. Für das Ikosaeder.

Fig. 905. ist $AG = AB = 2AC$

also auch $HK = 2CK$

also $\square HK = 4\square CK$

also $\square HC = \square HK + \square CK = 5\square CK$

Da nun $HC = BC$, also $\square HC = \square BC$

so ist $\square CB = 5\square CK$

Nun ist $AB = 2BC$

und $LK = 2CK$

folglich $\square AB = 4\square BC = 20\square CK$

also $\square AB = 5\square LK$

Nach No. 25, 5 ist also LK die Seite des Sechsecks in demjenigen Kreise, von dem aus die Verzeichnung der Seite des verlangten Ikosaeders geschieht.

Nun ist $AK = LB$

also $AB = LK + 2LB$

folglich ist LK die Seite der sechsseitigen und LB die der zehnseitigen Figur in jenem Kreise der die Verzeichnung der verlangten Seite bestimmt und die angeführte Construction ist richtig.

Polyedralzahlen sind in dem Art. „Figurirte Zahlen“ ausführlich abgehandelt.

Polyedrometrie ist die Lehre von den Polyedern.

Polyedron, s. v. w. „Polyeder“.

Polygon, Vieleck ist eine ebene geradlinige Figur, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen wird.

Figuren, die von drei, von vier geraden Linien eingeschlossen werden, heifsen Dreiecke, Vierecke. Die das P. ein-

schliefsenden geraden Linien heifsen **Seiten**, die von je zwei zusammentreffenden Seiten eingeschlossenen Winkel heifsen **Polygonwinkel** oder schlechtweg **Winkel**, Seiten nnd Winkel führen den gemeinschaftlichen Namen **Stücke**, **Polygonstücke**. Die Punkte, in welchen die Seiten zusammentreffen sind die **Spitzen**. Gerade Verbindnngslinien zweier Spitzen, ohne dafs sie Seiten sind, die also innerhalb des P. fallen, heifsen **Diagonalen**.

Das P. wird nach der Anzahl seiner Seiten speciell bekannt und heifst Fünfeck, Sechseck n. s. w. Für Ermittelung von Gesetzen, die allen Vielecken, abgesehen von der Anzahl deren Seiten zukommen, bezeichnet man die Anzahl der Seiten mit n nnd das Vieleck mit dem Ausdruck $n$eck.

2. Jedes $n$eck hat n Seiten, n Winkel, n Spitzen.

3. Jeder Polygonwinkel macht mit seinem **änfseren Winkel** zusammen 4 Rechte, mit seinem **Nebenwinkel** zusammen 2 Rechte aus.

Ist der P.-winkel hohl, so ist der Nebenwinkel ein **änfserer**, ist er erhaben, ein **innerer**; auch mit diesem ist der P.-winkel zusammen $= 2R$, wenn der Nebenwinkel negativ genommen wird.

Die Summe der inneren nnd der änfseren P.winkel ist $= 4nR$, die der inneren $= (2n - 4) R$, also die der äufseren $= (2n + 4) R$. Die Summe der änfseren ist also in jedem $n$eck nm $8R >$ als die Summe der inneren P.winkel.

4 Ein $n$ek kann höchstens $(n - 3)$ erhabene Winkel haben, denn bei $(n - 2)$ erhabenen Winkeln wäre deren Summe $> (2n - 4) R$.

Ein $n$eck, wenn es nnr hohle Winkel hat, kann nicht mehr als 3 spitze Winkel haben, denn bei 4 spitzen Winkeln würde die Snmme der äufseren Nebenwinkel $>$ sein als $4R$.

5. In jedem $n$eck beträgt die algebraische Snmme sämmtlicher Nebenwinkel $= 4R$, denn die Snmme der P.winkel ist $= (2n - 4) R$, die Summe derselben + der Snmme sämmtlicher Nebenwinkel $= 2nR$.

6. Ein $n$eck mit nur hohlen Winkeln ($n = 4$ ausgenommen) kann nicht mehr als 3 Rechte haben, denn deren Nebenwinkel würden zusammen mehr als $4R$ betragen.

7. Die Anzahl der von einer Spitze ab zu ziehenden Diagonalen beträgt $n - 3$; es sind also überhanpt in einem $n$eck $n(n - 3)$ Diagonalen au ziehen möglich, von welchen aber jede doppelt, vorwärts und rückwärts gezogen wird, die Anzahl der möglichen Diagonalen in einem $n$eck ist also $= \frac{1}{2} n (n - 3)$.

Durch die von einer Spitze ans gezogenen $n - 3$ Diagonalen wird das $n$eck in $n - 2$ Dreiecke getheilt, deren Winkel zusammen = der Summe der P.winkel sind. Da nnn die 3 Winkel eines Dreiecks zusammen 2 Rechte betragen, so ist die Summe der Umfangswinkel eines $n$ecks $= 2(n - 2) R = (2n - 4)$ Rechten.

8. Macht man aus einem $n$eck durch Hinzufügung einer Seite ein $(n + 1)$eck, so vermehrt sich die Snmme der Umfangswinkel nm $2R$.

Fällt das hinzukommende Dreieck aufserhalb der Figur, so ist die Richtigkeit angenscheinlich. Es sei der Schlufs des $n$ecks $abcd$; durch Hinznfügung der beiden Seiten bx, cx mit Hinweglassnng der Seite bc entstehe das $(n + 1)$eck $abxcd$.

Fig. 906.

Bei der Winkelbezeichnung hestanden die Winkel des $n$ecks ans:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

hestehen die Winkel des $(n + 1)$ecks ans:

$$\alpha + 4R - \varepsilon + \delta$$

Und es soll sein

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 2R = \alpha + 4R - \varepsilon + \delta$$

α nnd δ beiderseits subtrahirt und $\beta + \gamma = 2R - \varepsilon$ gesetzt ergibt die Richtigkeit des Satzes.

9. Bezeichnet man die anfeinander folgenden Winkel eines P. mit α, β, γ, δ ...., denkt sich dann die Seiten alle cntweder rechts oder links (ans einem Standpunkt innerhalb der Figur betrachtet) verlängert und bezeichnet die Winkel zwischen jeder Verlängerung nnd der folgenden Seite mit a, b, c, d...., so ist, wenn man diejenigen dieser Winkel, welche anfserhalb der Figur fallen, positiv, die welche innerhalb fallen, negativ nimmt, die algebraische Snmme S der Winkel a, b, c, d ... jederzeit $= 4R$.

Denn es ist $\alpha + a = \beta + b = \gamma + c$....

$= 2R$; deren Summe also $n \cdot 2R$, die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ist $= (2n - 4) R$, die Differenz beider Summen also $= 4R$.

10. **Aehnliche Polygone.** P. sind ∞, wenn sie durch gleichliegende Seiten und Diagonalen in gleichliegende ähnliche Dreiecke zerlegt werden.

Gleichliegende Winkel in ähnlichen P. sind gleich.

Gleichliegende Seiten und Diagonalen und die Umfänge ähnlicher P. stehen mit einander in fortlaufender Proportion.

Gleichliegende Dreiecke und andere Figuren in ähnlichen P. sind ähnlich.

Die Inhalte ähnlicher P. verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten, Diagonalen und der Umfänge. Denn es ist dies bei ähnlichen Dreiecken der Fall, diese aber verhalten sich wie die ähnlichen *P.*

11. Bezeichnen a, b, c die 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und ist a die Hypotenuse; denkt man sich nun 3 geradlinige ähnliche P., zu welchen a, b, c als homologe Seiten oder Diagonalen gehören und bezeichnet deren Inhalte mit A, B, C, so ist jedesmal $A = B + C$.

Denn es ist $a^2 = b^2 + c^2$

ferner $B : C = b^2 : c^2$

also $B + C : C = b^2 + c^2 : c^2 = a^2 : c^2$

Weiter ist eben so

$$A : C = a^2 : c^2$$

auch $B + C : C = a^2 : c^2$

also $B + C : C = A : C$

woraus $A = B + C$

12. Bezeichnen A, B, C die Inhalte ähnlicher P., a, b, c homologe Seiten derselben, und ist $A = B + C$, so ist das mit a, b, c als Seiten zu bildende Dreieck rechtwinklig und der rechte Winkel liegt der Seite a gegenüber.

Denn aus $B : C = b^2 : c^2$

folgt $B + C : C = b^2 + c^2 : c^2$

Da nun $B + C = A$

so ist $A : C = b^2 + c^2 : c^2$

und da $A \infty C$

so ist $A : C = a^2 : c^2$

Mithin $b^2 + c^2 : c^2 = a^2 : c^2$

woher $b^2 + c^2 = a^2$

13. Bei einem P. von einer geraden Anzahl Seiten, welches in einem Kreis liegt, ist die Summe des 1ten, 3ten, 5ten ... Umfangswinkels so grofs wie die Summe des 2ten, 4ten, 6ten ...

Denn es steht $\angle bah$ als Peripheriewinkel mit dem Centriwinkel $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta$ auf demselben Bogen. Demnach ist

Fig. 907.

$$\angle bah = a = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta)$$
$$c = \tfrac{1}{2}(\delta + \varepsilon + \eta + \vartheta + \lambda + \alpha)$$
$$e = \tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta + \lambda + \alpha + \beta + \gamma)$$
$$g = \tfrac{1}{2}(\lambda + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta)$$

woraus

$$a + c + e + g = \tfrac{3}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \theta + \lambda) = \tfrac{3}{2} 4R = 6R$$

Es ist aber

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 12R$$

folglich $a + c + e + g = b + d + f + h$.

14. Bei jedem Vieleck von einer geraden Anzahl von Seiten, welches um einen Kreis liegt, ist die Summe der 1ten, 3ten, 5ten ... Seite so grofs wie die Summe der 2ten, 4ten, 6ten ...

Denn zieht man die Halbmesser nach den Berührungspunkten, wie Cc und Cd, denkt sich die Linie Ck, so ist $\triangle Cck \cong \triangle Cdk$, folglich $ck = dk$.

Man hat demnach

$$kc = kd$$
$$le = ld$$
$$me = mf$$
$$ng = nf$$
$$og = oh$$
$$pa = ph$$
$$qq = qb$$
$$rc = rb$$

die Reihen addirt geben

$$kr + lm + no + pq = kl + mn + op + qr$$

15. **Die Anzahl der Bestimmungsstücke eines P. zu finden.**

Von den $(n - 2)$ Dreiecken, in welche ein P. getheilt werden kann, bedarf jedes dreier Bestimmungsstücke. Es würden also für ein P. $3(n - 2)$ Bestimmungsstücke erforderlich sein, wenn nicht, von einem der beiden Anfangsdreiecken ab,

jedes folgende Dreieck in dem vorher anschliefsenden in der gemeinschaftlichen Seite schon ein Bestimmungsstück mit erhielte. Also nur ein Dreieck bedarf dreier, von den übrigen jedes Dreieck nur zweier Bestimmungsstücke; das P. folglich $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Bestimmungsstücke.

Zu den Bestimmungsstücken eines Dreiecks gehört mindestens eine Seite; es würde also zur Bestimmung eines P. ebenfalls nur eine Seite erforderlich sein, wenn die übrigen Bestimmungsstücke aus den Winkeln beständen, welche die aus einer einzigen Spitze gezogenen Diagonalen mit einander bilden. Da dies aber wohl nur aus Kuriosität einmal vorkommen könnte, so sind mindestens so viele Seiten, als Dreiecke vorhanden sind, also mindestens $n - 2$ Seiten, erforderlich.

Dem Art. „Congruenz der Dreiecke," pag. 43, zufolge sind Dreiecke nicht congruent, wenn zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, es entstehen zwei verschiedene Dreiecke, die beide der Bedingung genügen. Es ist demnach auch bei den Polygonen zweifelhaft, ob die gegebenen $2n - 3$ Bestimmungsstücke auch genügende Bestimmungsstücke sind.

Regelmäfsige Polygone.

16. Ein regelmäfsiges P. ist ein P. von lauter gleichen Seiten und gleichen Winkeln; deren Anzahl ist unbegrenzt.

Die Summe sämmtlicher P.winkel ist $(2n - 4) R$,

jeder P.winkel also $= \frac{2n - 4}{n} R$.

Jeder Nebenwinkel ist $= \frac{4}{n} R$,

jeder Aufsenwinkel $= \frac{2n + 4}{n} R$

der Unterschied zwischen dem P.winkel und seinem Nebenwinkel ist $= 2 \frac{n - 4}{n} R$,

der Unterschied zwischen dem P.winkel und seinem äufseren Winkel $= \frac{8}{n} R$.

Die Winkel eines regelmäfsigen P. sind nur hohl und stumpf, die Nebenwinkel nur spitz, die Aufsenwinkel nur erhaben.

Jedes regelmäfsige P. liegt in und um einen Kreis, beide Kreise haben denselben Mittelpunkt und dieser ist zugleich der Mittelpunkt des P. Dieser Mittelpunkt liegt in einem Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier einander nicht gegenüber liegenden Seiten oder Winkel. Die Normalen auf den Seiten in deren Mitten errichtet und die Halbirungslinien aller Winkel schneiden sich alle in einem Punkt, dem Mittelpunkt.

17. Zwischen zwei concentrischen Kreisen, so nahe sie auch an einander liegen mögen, ist im gröfseren immer noch ein regelmäfsiges P. denkbar, dessen Seiten die Peripherie des Kleineren weder schneiden noch berühren.

Denn denkt man sich an einem beliebigen Punkt des kleineren Kreises eine Tangente und diese von beiden Seiten bis zum Umfang des gröfseren Kreises gezogen, so wird diese Sehne des gröfseren Kreises, und es lassen sich ∓ mit derselben noch viele kleinere Sehnen ziehen, die also von dem Umfang des kleineren fern liegen. Unter allen diesen kleineren Sehnen läfst sich aber offenbar eine ermitteln, von deren Bogen der Kreisumfang ein ganzes Vielfaches ist und man hat in sämmtlichen Sehnen dieser Bogen das verlangte P.

18. Zwischen zwei concentrischen Kreisen, so nahe sie auch an einander liegen mögen, ist um den kleineren immer noch ein regelmäfsiges P. denkbar, dessen Spitzen innerhalb der Peripherie des gröfseren Kreises liegen ohne dieselbe zu berühren.

Der Beweis wie der zu dem vorigen Satz.

19. Zwischen dem Inhalt A eines regelmäfsigen P. um einen Kreis und dem Inhalt a eines ähnlichen P in demselben ist der Inhalt b des regelmäfsigen P. von doppelt so viel Seiten in eben diesem Kreis die mittlere geometrische Proportionalfläche also $A : b = b : a$.

Ist die Seitenzahl von A, also auch von $a = n$, so ist die von $b = 2n$, A und a bestehen aus n, b aus $2n$ congruenten Dreiecken.

Stellt Fig. 908 diese Dreiecke dar, so dafs

Fig. 908.

p q c d g h k t m

$A = n \cdot \triangle pmg$

$a = n \cdot \triangle hmt$

$b = 2n \cdot hmc$

Da nnn $\angle pmc = \angle gmc$, so kann man anch schreiben

$A = 2n \cdot \triangle pmc$

$a = 2n \cdot \triangle hmk$

$b = 2n \cdot \triangle hmc$

Es folgt hierans

1. $A : b = \triangle pmc : \triangle hmc$
$\quad = pm \quad : hm = cm : km$

2. $b : a = \triangle hmc : \triangle hmk = cm : km$

Ans beiden Proportionen folgt

$A : b = b : a$

20. Ist die ganze Zahl n mindestens 3, so verhält sich der Inhalt a jedes regelmäfsigen $n$ecks in einem Kreis k zur halben Snmme der Inhalte desselben nnd des regelmäfsigen $2n$ecks in k, wie der Inhalt B des regelmäfsigen $2n$ecks nm k znm Inhalt A des regelmäfsigen $n$ecks um k, d. i.

$$a : \frac{a+b}{2} = B : A.$$

Es ist wie im vorigen Satz

ht eine der n Seiten von a

hc eine der $2n$ Seiten von b

pg eine der n Seiten von A

qd eine der $2n$ Seiten von B.

Man hat demnach

$a = m \triangle hmt = 2n \triangle hmk$

$b = 2m \cdot \triangle hmc$

$A = n \cdot \triangle pmg = 2n \triangle pmc$

$B = 2n \triangle qmd = 4n \cdot \triangle qmc$

nnd hieraus wie im vorigen Satz

$a : b = km : cm$

anch

$a : b = km : hm = cm : pm = oq : pq$

folglich

1. $a : a + b = cq : cp$

ferner $\quad B : A = 2\triangle cmq : \triangle cmp$

oder

2. $B : 2A = \triangle cmq : \triangle cmp = cq : cp$

Also ans 1 nnd 2

$a : a + b = B : 2A$

oder $\quad a : \frac{1}{2}(a+b) = B : A$

21. Betrachtet man a und A als gegeben oder bekannt, so folgt aus den beiden vorigen Sätzen

1. $b = \sqrt{a \cdot A}$ nnd 2. $B = \dfrac{2aA}{a + \sqrt{a \cdot A}}$

Für $n = 4$, r der Halbmesser des zugehörigen Kreises

$a = 2r^2;\ A = 4r^2$

Also die Inhalte der regelmäfsigen Achtecke in nnd nm den Kreis

$b = \sqrt{2r^2 \cdot 4r^2} = 2r^2\sqrt{2}$

$$B = \frac{2 \cdot 2r^2 \cdot 4r^2}{2r^2 + \sqrt{2r^2 \cdot 4r^2}} = \frac{8}{1+\sqrt{2}}\, r^2 = 8(\sqrt{2} - 1)\, r^2$$

Setzt man wieder $a = 2r^2\sqrt{2}$ nnd $A = 8(\sqrt{2} - 1)\, r^2$ so erhält man die Inhalte der regelmäfsigen Sechzehnecke in nnd um den Kreis

$b = 4r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ nnd

$B = 16r^2\left(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)$

n. s. w.

22. Jedes regelmäfsige P. ist = einem Dreieck, welches den Umfang des P. znr Grundlinie und die Normale (h) ans dem Mittelpnnkt anf einen seiner Seiten (a) zur Höhe hat: $J = \frac{1}{2}\, nah$.

Die Höhe h oder der Halbmesser r des inbeschriebenen Kreises ist =

$$\tfrac{1}{2} a\, tg \cdot \left(\frac{2n - 4}{2n} R\right);$$

der Halbmesser R des darum beschriebenen Kreises ist =

$$\tfrac{1}{2} a\, sec \cdot \left(\frac{2n - 4}{2n} R\right).$$

23. Bezeichnet man Fig. 908

mit r den Halbmesser mc des Kreises,

mit s die Seite ht des regelmäfsigen $n$ecks im Kreise,

mit s' die Seite hc des regelmäfsigen $2n$ecks im Kreise,

mit S die Seite pg des regelmäfsigen $n$ecks nm den Kreis,

mit z den Centriwinkel pmg für eine Seite,

mit y den Umfangswinkel,

mit J den Inhalt des inneren $n$ecks,

mit J' den Inhalt des änfseren $n$ecks,

so hat man

1. $r = \dfrac{s_{,}^2}{\sqrt{4s_{,}^2 - s^2}}$

2. $s = \dfrac{s_{,}}{r}\sqrt{4r^2 - s_{,}^2}$

3. $s_{,} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}}$

24. Ans Formel 2 nnd 3 findet man dle Seiten der regelmäfsigen P. im Kreise

s des Dreiecks $= r\sqrt{3}$

$s_,$ des Sechsecks $= r$

des Zwölfecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

des Vierundzwanzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

des Achtundvierzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

des Sechsnndnennzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$

n. s. w.

s des Vierecks $= r\sqrt{2}$

s' des Achtecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

des Sechzehnecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

des Zweinnddreifsigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

des Vierundsechzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$

n. s. w.

s des Fünfecks $= r\sqrt{\frac{4 - \sqrt{5}}{2}}$

s' des Zehnecks $= r\,\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

des Zwanzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}$

des Vierzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}$

des Achtzigecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}$

n. s. w.

s des Funfzehnecks $= \frac{1}{4}r\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$

$s_,$ des Dreifsigecks $= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{2}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

25. Ferner findet man die Selten der um den Kreis liegenden P.:

$$S = \frac{2s_, r}{\sqrt{4r^2 - s_,^2}}$$

Znr Bestimmung der felgenden Formeln nimmt man also $s_,$ aus den No. 24 anfgestellten Formeln.

Es sind also die nm den Kreis liegenden Seiten:

S des Dreiecks $= \frac{2 \cdot (r\sqrt{3}) \cdot r}{\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^2}} = 2r\sqrt{3}$

des Sechsecks $= \frac{2r \cdot r}{\sqrt{r^2 - r^2}} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= \frac{2 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r}{\sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})}} = 2r\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2r(2 - \sqrt{3})$

des Viernndzwanzigecks $= \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{\sqrt{4r^2 - r^2\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}} = 2r\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

$= 2r(2 + \sqrt{3})\left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 1\right)$

des Achtnndvierzigecks $= 2r\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$

$= \sqrt{14 - 3\sqrt{3}}\left[2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right]$

des Sechsundneunzigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$

u. s. w.

S des Vierecks $= 2r$

des Achtecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = 2r(\sqrt{2} - 1)$

des Sechzehnecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2r\left[\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} - \sqrt{2} - 1\right]$

des Zweiunddreifsigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$

des Vierundsechzigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$

u. s. w.

S des Fünfecks $= 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= 2r \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{2}}$

des Zwanzigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{2 + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}$

des Vierzigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}$

des Achtzigecks $= 2r \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}}$

u. s. w.

26. Nachdem nun No. 24 und 25 die Seiten der in und um den Kreis beschriebenen P. gefunden worden, hat man nun deren Inhalte zu finden.

Zu diesem Behuf hat man Fig. 908 das auf die Seite kt gefällte Apothema

$$mk = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2},$$

mithin den Inhalt des Dreiecks

$$mkt = \tfrac{1}{4}s\sqrt{4r^2 - s^2}$$

und den Inhalt des P. $= \frac{1}{4}ns\sqrt{4r^2 - s^2}$

Also die Inhalte der in dem Kreise beschriebenen P.

J des Dreiecks $= \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$

des Sechsecks $= \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= 3r^2$

des Vierundzwanzigecks $= 6r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

des Achtundvierzigecks $= 12r^2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

des Sechsundneunzigecks $= 24r^2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

u. s. w.

J des Vierecks $= 2r^2$

des Achtecks $= 2r^2\sqrt{2}$

des Sechzehnecks $= 4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

des Zweiunddreifsigecks $= 8r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

des Vierundsechzigecks $= 16r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

u. s. w.

J des Fünfecks $= \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

des Zwanzigecks $= \frac{5}{2}r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

des Vierzigecks $= 10r^2\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$

des Achtzigecks $= 20r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

u. s. w.

27. Um die Inhalte der umbeschriebenen P. zu finden, hat man zur Höhe lm auf der Seite $pg = S$ den Halbmesser r, daher der Inhalt des $gmp = \frac{1}{2}rS$ und den Inhalt J des P. $= \frac{1}{2}nrS$.

Demnach den Inhalt der um den Kreis beschriebenen P.

J des Dreiecks $= 3r^2\sqrt{3}$

des Sechsecks $= 2r^2\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= 12r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 12r^2(2-\sqrt{3})$

des Vierundzwanzigecks $= 24r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 24r^2\left[2\sqrt{2+\sqrt{3}}-(1+\sqrt{2})\right]$

des Achtundvierzigecks $= 48r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 48r^2\left[2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right]$

des Sechsundneunzigecks $= 96r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$

J des Vierecks $= 4r^2$

des Achtecks $= 8r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 8r^2(\sqrt{2}-1)$

des Sechzehnecks $= 16r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

des Zweiunddreifsigecks $= 32r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

des Vierundsechzigecks $= 64r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$

J des Fünfecks $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= 10r^2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2}}$

des Zwanzigecks $= 20r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

des Vierzigecks $= 40r^2 \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}$

des Achtzigecks $= 80r^2 \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}}}}$

u. s. w.

28. Trigonometrische Bestimmung der P. und ihrer Stücke.

Es ist der Centriwinkel einer Seite

$s = \frac{4}{n} R = \frac{360°}{n}$

der Umfangswinkel

$y = \frac{2n - 4}{n} R = \frac{n - 2}{n} 180°$

die Seite des $n$ecks im Kreise

$s = 2r \sin \frac{180°}{n}$

die Seite des $n$ecks um den Kreis

$S = 2r \cdot tg \frac{180°}{n}$

der Inhalt des inneren $n$ecks

$J = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360°}{n} = \frac{1}{4} ns^2 \cot \frac{180°}{n}$

der Inhalt des äußeren $n$ecks

$J' = nr^2 \, tg \frac{180°}{n} = \frac{1}{4} n S^2 \cot \frac{180°}{n}$

der Halbmesser des Kreises

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec \frac{180°}{n} = \frac{1}{2} S \cot \frac{180°}{n}$

1. Für das Dreieck ist

$s = \frac{4}{3} R = 120°$

$y = \frac{2}{3} R = 60°$

$s = 2r \cdot \sin 60°$	$= 1{,}732\,0508 \times r$
$S = 2r \cdot tg\, 60°$	$= 3{,}464\,1016 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\, 60°$	$= 0{,}577\,3503 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 60°$	$= 0{,}288\,6751 \times S$
$J = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 120°$	$= 1{,}209\,0381 \times r^2$
$J = \frac{1}{4} s^2 \cdot \cot 60°$	$= 0{,}433\,0127 \times s^2$
$J' = 3r^2 \cdot tg\, 60°$	$= 5{,}196\,1524 \times r^2$
$J' = \frac{3}{4} S^2 \cdot \cot 60°$	$= 0{,}433\,0127 \times S^2$

2. Für das Viereck ist

$s = R = 90°$

$y = R = 90°$

$s = 2r \cdot \sin 45°$	$= 1{,}414\,2136 \times r$
$S = 2r \cdot tg\, 45°$	$= 2{,}000\,0000 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\, 45°$	$= 0{,}707\,1068 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 45°$	$= 0{,}500\,0000 \times S$
$J = 2r^2 \cdot \sin 90°$	$= 2{,}000\,0000 \times r^2$
$J = s^2 \cdot \cot^2 45°$	$= 1{,}000\,0000 \times s^2$
$J' = 4r^2 \cdot tg\, 45°$	$= 4{,}000\,0000 \times r^2$
$J' = S^2 \cdot \cot 45°$	$= 1{,}000\,0000 \times S^2$

3. Für das Fünfeck ist

$s = \frac{4}{5} R = 72°$

$y = \frac{6}{5} R = 108°$

$s = 2r \cdot \sin 36°$	$= 1{,}175\,5706 \times r$
$S = 2r \cdot tg\, 36°$	$= 1{,}543\,0852 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\, 36°$	$= 0{,}805\,6508 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 36°$	$= 0{,}688\,1909 \times S$
$J = \frac{5}{2} r^2 \cdot \sin 72°$	$= 2{,}377\,6412 \times r^2$
$J = \frac{5}{4} s^2 \cdot tg\, 36°$	$= 1{,}720\,4774 \times s^2$
$J' = 5r^2 \cdot tg\, 36°$	$= 3{,}632\,7130 \times r^2$
$J' = \frac{5}{4} S^2 \cdot \cot 36°$	$= 1{,}720\,4774 \times S^2$

4. Für das Sechseck ist

$s = \frac{2}{3} R = 60°$

$y = \frac{4}{3} R = 120°$

$s = 2r \cdot \sin 30°$	$= 1{,}000\,0000 \times r$
$S = 2r \cdot tg\, 30°$	$= 1{,}154\,7006 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\, 30°$	$= 1{,}000\,0000 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 30°$	$= 0{,}866\,0254 \times S$
$J = 3r^2 \cdot \sin 60°$	$= 2{,}598\,0762 \times r^2$
$J = \frac{3}{2} s^2 \cdot \cot 30°$	$= 2{,}598\,0762 \times s^2$
$J' = 6r^2 \cdot tg\, 30°$	$= 3{,}464\,1018 \times r^2$
$J' = \frac{3}{2} S^2 \cdot \cot 30°$	$= 2{,}598\,0762 \times S^2$

5. Für das Achteck ist

$s = \frac{1}{2} R = 45°$

$y = \frac{3}{2} R = 135°$

$s = 2r \cdot \sin 22° 30'$	$= 0{,}765\,3668 \times r$
$S = 2r \cdot tg\, 22° 30'$	$= 0{,}828\,4272 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\, 22° 30'$	$= 1{,}306\,5628 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 22° 30'$	$= 1{,}207\,1068 \times S$
$J = 4r^2 \cdot \sin 45°$	$= 2{,}828\,4272 \times r^2$
$J = 2s^2 \cdot \cot 22° 30'$	$= 4{,}828\,4272 \times s^2$
$J' = 8r^2 \cdot tg\, 22° 30'$	$= 3{,}313\,7088 \times r^2$
$J' = 2S^2 \cdot \cot 22° 30'$	$= 4{,}828\,4272 \times S^2$

6. Für das Zehneck ist

$z = \frac{2}{5} R = 36°$

$y = \frac{8}{5} R = 144°$

$s = 2r \cdot \sin 18° = 0{,}618\,0340 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 18° = 0{,}649\,8394 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 18° = 1{,}618\,0340 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 18° = 1{,}538\,8417 \times S$

$J = 5r^2 \cdot \sin 36° = 2{,}938\,9265 \times r^2$

$J = \frac{5}{2} s^2 \cdot \cot 18° = 7{,}694\,2087 \times s^2$

$J' = 10 r^2 \cdot tg\ 18° = 3{,}249\,1970 \times r^2$

$J' = \frac{5}{2} S^2 \cdot \cot 18° = 7{,}694\,2087 \times S^2$

7. Für das Zwölfeck ist

$z = \frac{1}{3} R = 30°$

$y = \frac{5}{3} R = 150°$

$s = 2r \cdot \sin 15° = 0{,}517\,6380 \times r$

$S = 2R \cdot tg\ 15° = 0{,}535\,8984 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 15° = 1{,}931\,8522 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 15° = 1{,}866\,0254 \times S$

$J = 6r^2 \cdot \sin 30° = 3{,}000\,0000 \times r^2$

$J = 3s^2 \cdot \cot 15° = 11{,}196\,1524 \times s^2$

$J' = 12r^2 \cdot tg\ 15° = 3{,}215\,3904 \times r^2$

$J' = 3S^2 \cdot \cot 15° = 11{,}196\,1524 \times S^2$

8. Für das Fnnfzehneck ist

$z = \frac{4}{15} R = 24°$

$y = \frac{26}{15} R = 156°$

$s = 2r \cdot \sin 12° = 0{,}415\,8234 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 12° = 0{,}425\,1130 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 12° = 2{,}404\,8671 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 12° = 2{,}352\,3150 \times S$

$J = \frac{15}{2} r^2 \cdot \sin 24° = 3{,}050\,5245 \times r^2$

$J = \frac{15}{4} s^2 \cdot \cot 12° = 17{,}642\,3629 \times s^2$

$J' = 15r^2 \cdot tg\ 12° = 3{,}188\,3475 \times r^2$

$J' = \frac{15}{4} S^2 \cdot \cot 12° = 17{,}642\,3629 \times S^2$

9. Für das Sechzehneck ist

$z = \frac{1}{4} R = 22°\,30'$

$y = \frac{7}{4} R = 157°\,30'$

$s = 2r \cdot \sin 11°\,15' = 0{,}312\,8690 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 11°\,15' = 0{,}316\,7688 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 11°\,15' = 3{,}196\,2266 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 11°\,15' = 3{,}156\,8757 \times S$

$J = 8r^2 \cdot \sin 22°\,30' = 3{,}090\,1700 \times r^2$

$J = 4s^2 \cdot \cot 11°\,15' = 31{,}568\,7570 \times s^2$

$J' = 16r^2 \cdot tg\ 11°\,15' = 3{,}167\,6880 \times r^2$

$J' = 4S^2 \cdot \cot 11°\,15' = 31{,}568\,7570 \times S^2$

10. Für das Zwanzigeck ist

$z = \frac{1}{5} R = 18°$

$y = \frac{9}{5} R = 162°$

$s = 2r \cdot \sin 9° = 0{,}212\,8690 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 9° = 0{,}316\,7688 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 9° = 3{,}196\,2266 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 9° = 3{,}156\,8757 \times S$

$J = 10r^2 \cdot \sin 18° = 3{,}090\,1700 \times r^2$

$J = 5s^2 \cdot \cot 9° = 31{,}568\,7570 \times s^2$

$J' = 20r^2 \cdot tg\ 9° = 3{,}167\,6880 \times r^2$

$J' = 5S^2 \cdot \cot 9° = 31{,}568\,7570 \times S^2$

11. Für das Vierundzwanzigeck ist

$z = \frac{1}{6} R = 15°$

$y = \frac{11}{6} R = 165°$

$s = 2r \cdot \sin 7°\,30° = 0{,}261\,1124 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 7°\,30' = 0{,}263\,3050 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 7°\,20' = 3{,}829\,7683 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 7°\,30' = 3{,}797\,8770 \times S$

$J = 12r^2 \cdot \sin 15° = 3{,}105\,8280 \times r^2$

$J = 6s^2 \cdot \cot 7°\,30' = 45{,}574\,5246 \times s^2$

$J' = 24r^2 \cdot tg\ 7°\,30' = 3{,}159\,6600 \times r^2$

$J' = 6S^2 \cdot \cot 7°\,30' = 45{,}574\,5246 \times S^2$

12. Für das Fünfundzwanzigeck ist

$z = 0{,}16 R = 14°\,24'$

$y = 1{,}84 R = 165°\,36'$

$s = 2r \cdot \sin 7°\,12' = 0{,}250\,6664 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 7°\,12' = 0{,}252\,6588 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 7°\,12' = 3{,}989\,3664 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 7°\,12' = 3{,}957\,9075 \times S$

$J = 12{,}5 r^2 \cdot \sin 14°\,24' = 3{,}108\,6237 \times r$

$J = 6{,}25 s^2 \cdot \cot 7°\,12' = 49{,}473\,8444 \times s^2$

$J' = 25r^2 \cdot tg\ 7°\,12' = 3{,}158\,2350 \times r^2$

$J' = 6{,}25 S^2 \cdot \cot 7°\,12' = 49{,}473\,8444 \times S^2$

13. Für das Dreifsigeck ist

$z = \frac{2}{15} R = 12°$

$y = \frac{28}{15} R = 168°$

$s = 2r \cdot \sin 6° = 0{,}209\,0570 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 6° = 0{,}210\,2084 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 6° = 4{,}783\,3833 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 6° = 4{,}757\,1822 \times S$

$J = 15r^2 \cdot \sin 12° = 3{,}118\,6755 \times r^2$

$J = 7{,}5 s^2 \cdot \cot 6° = 71{,}357\,7337 \times s^2$

$J' = 30r^2 \cdot tg\ 6° = 3{,}153\,1260 \times r^2$

$J' = 7{,}5 S^2 \cdot \cot 6° = 71{,}357\,7337 \times S^2$

14. Für das Zweiunddreifsigeck ist

$z = 0{,}125 R = 11°\,15'$

$y = 1{,}875 R = 168°\,45'$

$s = 2r \cdot \sin 5°\,37'\,30'' = 0{,}196\,0343 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 5°\,37'\,30'' = 0{,}196\,9829 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot cosec\ 5°\,37'\,30'' = 5{,}101\,1594 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 5°\,37'\,30'' = 5{,}076\,5850 \times S$

$J = 16r^2 \cdot \sin 11°\,15' = 3{,}121\,4448 \times r^2$

$J = 8s^2 \cdot \cot 5°\,37'\,30'' = 81{,}225\,3600 \times s^2$

$J' = 32r^2 \cdot tg\ 5°\,37'\,30'' = 3{,}151\,7264 \times r^2$

$J' = 8S^2 \cdot \cot 5°\,37'\,30'' = 81{,}225\,3600 \times S^2$

15. Für das Vierzigeck ist

$s = 0{,}1R = 9^\circ$

$y = 1{,}9R = 171^\circ$

$s = 2r \cdot \sin 4^\circ 30' = 0{,}157\,2082 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 4^\circ 30' = 0{,}157\,4034 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 4^\circ 30' = 6{,}360\,9907 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 4^\circ 30' = 6{,}353\,1012 \times S$

$J = 20r^2 \cdot \sin 9^\circ = 3{,}128\,6900 \times r^2$

$J = 10s^2 \cdot \cot 4^\circ 30' = 127{,}062\,024 \times s^2$

$J' = 40r^2 \cdot tg\, 4^\circ 30' = 3{,}148\,0680 \times r^2$

$J' = 10S^2 \cdot \cot 4^\circ 30' = 127{,}062\,024 \times S^2$

16. Für das Achtundvierzigeck ist

$s = \frac{1}{12}R = 7^\circ 30'$

$y = \frac{23}{12}R = 172^\circ 30'$

$s = 2r \cdot \sin 3^\circ 45' = 0{,}130\,8062 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 3^\circ 45' = 0{,}131\,0870 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 3^\circ 45' = 7{,}644\,8995 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 3^\circ 45' = 7{,}628\,5263 \times S$

$J = 24r^2 \cdot \sin 7^\circ 30' = 3{,}132\,6288 \times r^2$

$J = 12s^2 \cdot \cot 3^\circ 45' = 183{,}084\,63 \times s^2$

$J' = 48r^2 \cdot tg\, 3^\circ 45' = 3{,}146\,0880 \times r^2$

$J' = 12S^2 \cdot \cot 3^\circ 45' = 183{,}084\,63 \times S^2$

17. Für das Funfzigeck ist

$s = 0{,}08R = 7^\circ 12'$

$y = 1{,}92\,R = 172^\circ 48'$

$s = 2r \cdot \sin 8^\circ 36' = 0{,}125\,5810 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 3^\circ 36' = 0{,}125\,8294 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 3^\circ 36' = 7{,}962\,9873 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 3^\circ 36' = 7{,}947\,2729 \times S$

$J = 25r^2 \cdot \sin 7^\circ 12' = 3{,}133\,3300 \times r^2$

$J = 12{,}5s^2 \cdot \cot 3^\circ 36' = 198{,}681\,825 \times s^2$

$J' = 50r^2 \cdot tg\, 3^\circ 36' = 3{,}145\,7350 \times r^2$

$J' = 12{,}5\,S^2 \cdot \cot 3^\circ 36' = 198{,}681\,825 \times S^2$

18. Für das Sechzigeck ist

$s = \frac{1}{15}R = 6^\circ$

$y = \frac{29}{15}R = 174^\circ$

$s = 2r \cdot \sin 3^\circ = 0{,}104\,6720 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 3^\circ = 0{,}104\,8156 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 3^\circ = 9{,}553\,6522 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 3^\circ = 9{,}540\,5680 \times S$

$J = 30r^2 \cdot \sin 6^\circ = 3{,}135\,8550 \times r^2$

$J = 15s^2 \cdot \cot 3^\circ = 286{,}217\,0394 \times s^2$

$J' = 60r^2 \cdot tg\, 3^\circ = 3{,}144\,4680 \times r^2$

$J' = 15S^2 \cdot \cot 3^\circ = 286{,}217\,0394 \times S^2$

19. Für das Vierundsechzigeck ist

$s = \frac{1}{16}R = 5^\circ 37' 30''$

$y = \frac{31}{16}R = 174^\circ 22' 30''$

$s = 2r \cdot \sin 2^\circ 48' 45'' = 0{,}098\,1353 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 2^\circ 48' 45'' = 0{,}098\,2536 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 2^\circ 48' 45'' = 10{,}190\,0116 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 2^\circ 48' 45'' = 10{,}177\,7347 \times S$

$J = 32r^2 \cdot \sin 5^\circ 37' 30'' = 3{,}136\,5488 \times r^2$

$J = 16s^2 \cdot \cot 2^\circ 48' 45'' = 325{,}687\,5117 \times s^2$

$J' = 64r^2 \cdot tg\, 2^\circ 48' 45'' = 3{,}144\,1152 \times r^2$

$J' = 16S^2 \cdot \cot 2^\circ 48' 45'' = 325{,}687\,5117 \times S^2$

20. Für das Achtzigeck ist

$s = 0{,}05R = 4^\circ 30'$

$y = 1{,}95R = 175^\circ 30'$

$s = 2r \cdot \sin 20^\circ 15' = 0{,}078\,5196 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 2^\circ 15' = 0{,}078\,5802 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 2^\circ 15' = 12{,}735\,6732 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 2^\circ 15' = 12{,}725\,8500 \times S$

$J = 40r^2 \cdot \sin 4^\circ 30' = 3{,}138\,3640 \times r^2$

$J = 20s^2 \cdot \cot 2^\circ 15' = 509{,}034\,0000 \times s^2$

$J' = 80r^2 \cdot tg\, 2^\circ 15' = 3{,}143\,2080 \times r^2$

$J' = 20S^2 \cdot \cot 2^\circ 15' = 509{,}034\,0000 \times S^2$

21. Für das Sechsundneunzigeck ist

$s = \frac{1}{24}R = 3^\circ 45'$

$y = \frac{47}{24}R = 176^\circ 15'$

$s = 2r \cdot \sin 1^\circ 52' 30'' = 0{,}065\,4380 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 1^\circ 52' 30'' = 0{,}065\,4732 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 1^\circ 52' 30'' = 15{,}281\,6421 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 1^\circ 52' 30'' = 15{,}273\,4196 \times S$

$J = 48r^2 \cdot \sin 3^\circ 45' = 3{,}139\,3488 \times r^2$

$J = 24s^2 \cdot \cot 1^\circ 52' 30'' = 733{,}124\,1398 \times s^2$

$J' = 96r^2 \cdot tg\, 1^\circ 52' 30'' = 3{,}142\,7126 \times r^2$

$J' = 24S^2 \cdot \cot 1^\circ 52' 30'' = 733{,}124\,1398 \times S^2$

22. Für das Hunderteck ist

$s = 0{,}04R = 3^\circ 36'$

$y = 1{,}96R = 176^\circ 24'$

$s = 2r \cdot \sin 1^\circ 48' = 0{,}062\,8216 \times r$

$S = 2r \cdot tg\, 1^\circ 48' = 0{,}062\,8526 \times r$

$r = \frac{1}{2}s \cdot cosec\, 1^\circ 48' = 15{,}918\,0918 \times s$

$r = \frac{1}{2}S \cdot \cot 1^\circ 48' = 15{,}910\,2573 \times S$

$J = 50r^2 \cdot \sin 3^\circ 36' = 3{,}139\,5250 \times r^2$

$J = 25s^2 \cdot \cot 1^\circ 48' = 795{,}512\,8675 \times s^2$

$J' = 100r^2 \cdot tg\, 1^\circ 48' = 3{,}142\,6300 \times r^2$

$J' = 25S^2 \cdot \cot 1^\circ 48' = 795{,}512\,8675 \times S^2$

Polygonalzahlen sind in dem Art. „Figurirte Zahlen" ausführlich abgehandelt.

Polygonometrie ist die Lehre von den Polygonen, besonders von der Ausmessung und Berechnung derselben.

Polynom, s. v. w. Multinom.

Polynomial-Coefficient, s. den folgenden Art.

Polynomischer Satz ist die Anweisung zur Bildung der Potenz von beliebigem Grade eines Polynoms, also die geordnete Entwickelung der Reihe

$(a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots. s)^n$

Bezeichnet man sämmtliche Glieder vom zweiten ab mit einem einzigen Zeichen x, so hat man $(a \pm x)^n$, folglich die Aufgabe des binomischen Satzes.

Die in ihren einzelnen Gliedern entwickelte $n$te Potenz eines Binoms enthält $(n+1)$ Glieder und zwar beide Elemente a und b in allen möglichen Combinationen mit Wiederholungen $a^m b^{n-m}$ und $a^{n-m} b^m$ von 0 bis n. Dies Gesetz geht bei 3 Gliedern auf 3, bei m Gliedern auf m Elemente über; daher hat ein Polynom von m Elementen zur $n$ten Potenz entwickelt (nach dem Art. „Combination", pag. 36)

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \text{ Glieder} \qquad (1)$$

2. Um das Gesetz der Bildung einer solchen Potenzenreihe vorläufig anschaulich zu haben möge folgendes Beispiel dienen:

$$(a+b+c+d)^4$$

Man erhält

$$\begin{aligned} & a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6a^2d^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 12a^2cd + 4ab^3 \\ & \quad + 4ac^3 + 4ad^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 12abd^2 + 12ac^2d + 12acd^2 + 24abcd \\ & + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 6b^2d^2 + 12b^2cd + 4bc^3 + 4bd^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 \\ & + c^4 + c^3d + c^2d^2 + cd^3 \\ & + d^4 \end{aligned}$$

Die erste Abtheilung mit dem ersten Gliede a hat 4 Elemente und die dritte Ordnung, weil zu dieser a nicht hinzugezählt werden kann,

also $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \; . \; . \; . \; . \; .$ 20 Glieder

Die zweite Abtheilung mit dem ersten Gliede b hat 3 Elemente und die dritte Ordnung,

also $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \; . \; . \; . \; . \; .$ 10 Glieder

Die dritte Abtheilung mit dem ersten Gliede c hat 2 Elemente und die dritte Ordnung

mithin $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \; . \; . \; . \; .$ 4 Glieder

Die vierte Abtheilung mit dem einzigen Gliede (1 Element und dritte Ordnung) . 1 Glied

Summa 35 Glieder

Die ganze Potenz hat 4 Elemente mit 4ter Ordnung, mithin $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ Glieder.

3. **Die Anzahl der Elemente soll immer mit m, die Summe der Einheiten des Potenzexponenten immer mit n bezeichnet werden. Exponent immer mit X, Element immer mit E.**

4. n ist zugleich die Anzahl der Dimensionen jedes Gliedes:

$a^n b$; $a^{n-m} c$; $a^{n-3} bcd$ u. s. w.

Ist $m > n$, so kann folglich jedes einzelne Glied höchstens n einzelne E enthalten. Hat kein E eines Gliedes einen X, so fehlen $(m-n)$ E.

$(a+b+c+d+e)^3$ kann a^3, a^2c, ad^2, abc, cde enthalten, nicht aber a^2b^2, cd^2e.

Ist $m < n$, so mufs in jedem Gliede mindestens ein E in Potenz vorkommen. $(a+b+c)^4$ hat nur Glieder wie a^2bc, ab^3, c^4.

Eine Potenz in welcher $m = n$ ist, heifst eine vollständige Potenz.

5. Zu Erlangung einer gewissen Gewandtheit in der practischen Handhabung für Ausübung der Hauptregel zur Zusammenstellung einer geordneten Reihe von Gliedern der Potenz eines Polynoms, soll hier ein etwas ausgedehnteres Beispiel als Richtschnur vorangestellt werden, nämlich das Beispiel

$$(a+b+c+d+e+f+g+h)^8$$

Das Polynom hat 8 Glieder, es soll zur 8ten Potenz erhoben werden, und die Potenz ist eine vollständige.

Nach No. 2 beträgt die Anzahl der Glieder:

1. Der ganzen Potenz $= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 6435$ Glieder

2. Der ersten Abtheilung mit dem ersten

Glieder $a = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8}{15}\, 6435$ = 3432 Glieder

3. Der zweiten Abtheilung mit dem ersten
Gliede $b = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4}{15} \times 6435$ = 1716 „

4. Der dritten Abtheilung mit dem ersten
Gliede $c = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6}{13} \times 1716$ = 792 „

5. Der vierten Abtheilung mit dem ersten
Gliede $d = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{12} \times 792$ = 330 „

6. Der fünften Abtheilung mit dem ersten
Gliede $e = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{11} \times 330$ = 120 „

7. Der sechsten Abtheilung mit dem ersten
Gliede $f = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = \frac{3}{10} \times 120$ = 36 „

8. Der siebenten Abtheilung mit dem
ersten Gliede $g = \frac{8}{1}$ = 8 „

der Glieder Summe 6435 Glieder

Die Potenz $(a+b+c+d+e+f+g+h)^8$ hat nun folgende Glieder.

I. Diejenigen Glieder, welche nur aus einem E bestehen:

	Anzahl der Glieder	
Es ist dies das einzige Glied a^8	1	1

II. Diejenigen Glieder, welche aus zweien E bestehen.

$a^7(b+c+d+e+f+g+h)$		
$+a^6(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
$+a^5(b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
$+a^4(b^4+c^4+d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$		
$+a^3(b^5+c^5+d^5+e^5+f^5+g^5+h^5)$		
$+a^2(b^6+c^6+d^6+e^6+f^6+g^6+h^6)$		
$+a(b^7+c^7+d^7+e^7+f^7+g^7+h^7)$		
in Summa $7 \times 7 =$	49	49

III. Diejenigen Glieder, welche aus dreien E bestehen.

1	$(a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6)(c+d+e+f+g+h)$ . .	36	
2	$(a^6c+a^5c^2+a^4c^3+a^3c^4+a^2c^5+ac^6)(d+e+f+g+h)$ . . .	30	
3	$(a^6d+a^5d^2+a^4d^3+a^3d^4+a^2d^5+ad^6)(e+f+g+h)$	24	
4	$(a^6e+a^5e^2+a^4e^3+a^3e^4+a^2e^5+ae^6)(f+g+h)$	18	
5	$(a^6f+a^5f^2+a^4f^3+a^3f^4+a^2f^5+af^6)(g+h)$	12	
6	$(a^6g+a^5g^2+a^4g^3+a^3g^4+a^2g^5+ag^6)h$	6	
7	$a^5b^2(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^5c^2(d+e+f+g+h)$		
	$a^5d^2(e+f+g+h)$		
	$a^5e^2(f+g+h)$		
	$a^5f^2(g+h)$		
	a^5g^2h	21	
	Latus	147	50

		Anzahl der Glieder	
	Transport	147	50
8	$(a^5b+..ab^5)(c^2+..h^2)+(a^5c+..ac^5)(d^2+..h^2)$		
	$+(a^5d+..ad^5)(e^2+..h^2)+(a^5e+..ae^5)(f^2+g^2+h^2)$		
	$+(a^5f+..af^5)(g^2+h^2)+(a^5g+..ag^5)h^2$	105	
9	$a^4b^3(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^4c^3(d+e+f+g+h)$		
	$a^4d^3(e+f+g+h)$		
	$a^4e^3(f+g+h)$		
	$a^4f^3(g+h)$		
	a^4g^3h	21	
10	$a^4b^2(c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4c^2(d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4d^2(e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4e^2(f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4f^2(g^2+h^2)$		
	$a^4g^2h^2$	21	
11	$a^3b^4(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^3c^4(d+e+f+g+h)$		
	$a^3d^4(e+f+g+h)$		
	$a^3e^4(f+g+h)$		
	$a^3f^4(g+h)$		
	a^3g^4h	21	
12	$a^3b^3(c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^3c^3(d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^3d^3(e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^3e^3(f^2+g^2+h^2)$		
	$e^3f^3(g^2+h^2)$		
	$a^3g^3h^2$	21	
13	$a^2b^3(c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2c^3(d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2d^3(e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2e^3(f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2f^3(g^3+h^3)$		
	$a^2g^3h^3$	21	
14	$(a^4b+..ab^4)(c^3+..h^3)+(a^4c+..ac^4)(d^3+..h^3)$		
	$+(a^4d+..ad^4)(e^3+..h^3)+(a^4e+..ae^4)(f^3+g^3+h^3)$		
	$+(a^4f+..af^4)(g^3+h^3)+(a^4g+..ag^4)h^3$	84	
15	$(a^3b+a^2b^2+ab^3)(c^4+..h^4)+(a^3c+..ac^3)(d^4+..h^4)$		
	$+(a^3d+..ad^3)(e^4+..h^4)+(a^3e+..ae^3)(f^4+g^4+h^4)$		
	$+(a^3f+a^2f^2+af^3)(g^4+h^4)+(a^3g+a^2g^2+ag^3)h^4$	63	
16	$a^2b^5(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^2c^5(d+e+f+g+h)$		
	$a^2d^5(e+f+g+h)$		
	$a^2e^5(f+g+h)$		
	$a^2f^5(g+h)$		
	a^2g^5h	21	
	Latus	525	50

		Anzahl der Glieder	
	Transport	525	50
17	$a^2b^4(c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2c^4(d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2d^4(e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2e^4(f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2f^4(g^2+h^2)$		
	$a^2g^4h^2$	21	
18	$a^2b^3(c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2c^3(d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2d^3(e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2e^3(f^3+g^3+h^3)$		
	$a^2f^3(g^3+h^3)$		
	$a^2g^3h^3$	21	
19	$a^2b^2(c^4+d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2c^2(d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2d^2(e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2e^2(f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2f^2(g^4+h^4)$		
	$a^2g^2h^4$	21	
20	$(a^2b+ab^2)(c^5+..h^5)+(a^2c+ac^2)(d^5+..h^5)+(a^2d+ad^2)(e^5+..h^5)$ $+(a^2e+ae^2)(f^5+g^5+h^5)+(a^2f+af^2)(g^5+h^5)+(a^2g+ag^2)h^5$	42	
21	$ab(c^6+..h^6)+ac(d^6+..h^6)+ad(e^6+..h^6)+ae(f^6+g^6+h^6)$ $+af(g^6+h^6)+agh^6$	21	647

IV. Diejenigen Glieder, welche aus vier E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character:

$(a^5bc+..abc^5)=a^5bc+a^4b^2c+a^4bc^2+a^3b^3c+a^3b^2c^2+a^3bc^3+a^2b^4c+a^2b^3c^2+a^2b^2c^3+a^2bc^4+ab^5c+ab^4c^2+ab^3c^3+ab^2c^4+abc^5$ beträgt 15 Glieder.

$(a^4bc+..abc^4)$ hat 10 Glieder.

$(a^3bc+abc^3)$ hat 6 Glieder.

$(a^2bc+abc^2)$ hat 3 Glieder.

$(a^5bc+..abc^5)(d+e+f+g+h)+(a^5bd+..abd^5)(e+..h)$ $+(a^5be+..abe^5)(f+g+h)+(a^5bf+..abf^5)(g+h)$ $+(a^5bg+..abg^5)h$	225	
$(a^4bc+..abc^4)(d^2+..h^2)+(a^4bd+..abd^4)(e^2+..h^2)$ $+(a^4be+..abe^4)(f^2+g^2+h^2)+(a^4bf+..abf^4)(g^2+h^2)$ $+(a^4bg+..abg^4)h^2$	150	
$(a^3bc+..abc^3)(d^3+h^3)+(a^3bd+..abd^3)(e^3+..h^3)$ $+(a^3be+..abe^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3bf+..abf^3)(g^3+h^3)$ $+(a^3bg+..abg^3)h^3$	90	
$(a^2bc+..abc^2)(d^4+..h^4)+(a^2bd+..abd^2)(e^4+..h^4)$ $+(a^2be+..abe^2)(f^4+g^4+h^4)+(a^2bf+..abf^2)(g^4+h^4)$ $+(a^2bg+..abg^2)h^4$	45	
$abc(d^5+..h^5)+abd(e^5+..h^5)+abe(f^5+g^5+h^5)+abf(g^5+h^5)$ $+abgh^5$	15	
$(a^5cd+..acd^5)(e+..h)+(a^5ce+..ace^5)(f+g+h)$ $+(a^5cf+..acf^5)(g+h)+(a^5cg+...acg^5)h$	150	
$(a^4cd+..acd^4)(e^2+..h^2)+(a^4ce+..ace^4)(f^2+g^2+h^2)$ $+(a^4cf+..acf^4)(g^2+h^2)+(a^4cg+..acg^4)h^2$	100	
Latus	775	697

	Anzahl der Glieder	
Transport	775	697
$(a^3cd+..acd^3)(e^3+..h^3)+(a^3ce+..ace^3)(f^3+g^3+h^3)$ $+(a^3cf+..acf^3)(g^3+h^3)+(a^3cg+..acg^3)h^3$	60	
$(a^2cd+..acd^2)(e^4+h^4)+(a^2ce+..ace^2)(f^4+g^4+h^4)$ $+(a^2cf+..acf^2)(g^4+h^4)+(a^2cg+..acg^2)h^4$	30	
$acd(e^5+..h^5)+ace(f^5+g^5+h^5)+acf(g^5+h^5)+acgh^5$ . . .	10	
$(a^5de+..ade^5)(f+g+h)+(a^5df+..adf^5)(g+h)$ $+(a^5dg+..adg^5)h$	90	
$(a^4de+..ade^4)(f^2+g^2+h^2)+(a^4df+..adf^4)(g^2+h^2)$ $+(a^4dg+..adg^4)h^2$	60	
$(a^3de+..ade^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3df+..adf^3)(g^3+h^3)$ $+(a^3dg+..adg^3)h^3$	36	
$(a^2de+..ade^2)(f^4+g^4+h^4)+(a^2df+..adf^2)(g^4+h^4)$ $+(a^2dg+..adg^2)h^4$	18	
$adef^5+adfg^5+adgh^5$	3	
$(a^5ef+..aef^5)(g+h)+(a^5eg+..acg^5)h$	45	
$(a^4ef+..aef^4)(g^2+h^2)+(a^4eg+..aeg^4)h^2$	30	
$(a^3ef+..aef^3)(g^3+h^3)+(a^3eg+..aeg^3)h^3$	18	
$(a^2ef+..aef^2)(g^4+h^4)+(a^2eg+..aeg^2)h^4$	9	
$aef(g^5+h^5)$	2	
$(a^5eg+..aeg^5)h$	15	
$(a^4eg+..aeg^4)h^2$	10	
$(a^3eg+..aeg^3)h^3$	6	
$(a^2eg+..aeg^2)h^4$	3	
$aegh^5$	1	
$(a^5fg+..afg^5)h$	15	
$(a^4fg+..afg^4)h^2$	10	
$(a^3fg+..afg^3)h^3$	6	
$(a^2fg+afg^2)h^4$	3	
$afgh^5$	1	1256

V. Diejenigen Glieder, welche aus fünf E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character:

a^4bcd, ab^4cd, abc^4d, $abcd^4$
a^3b^2cd, a^3bc^2d, a^3bcd^2
a^2b^3cd, ab^3c^2d, ab^3cd^2

a^2bc^3d, ab^2c^3d, abc^3d^2
a^2bcd^3, ab^2cd^3, abc^2d^3
$a^2b^2c^2d$, $a^2b^2cd^2$, $a^2bc^2d^2$, $ab^2c^2d^2$

$(a^4bcd+..abcd^4)$ hat 20 Glieder
$(a^3bcd+..abcd^3)$ hat 10 „
$(a^2bcd+..abcd^2)$ hat 4 „

$(a^4bcd+..abcd^4)(e+f+g+h)+(a^4bce+..abce^4)(f+g+h)$ $+(a^4bcf+..abcf^4)(g+h)+(a^4bcg+..abcg^4)h$	200	
$(a^3bcd+..abcd^3)(e^2+f^2+g^2+h^2)+(a^3bce+..abce^3)(f^2+g^2+h^2)$ $+(a^3bcf+..abcf^3)(g^2+h^2)+(a^3bcg+..abcg^3)h^2$	100	
$(a^2bcd+..abcd^2)(e^3+..h^3)+(a^2bce+..abce^2)(f^3+g^3+h^3)$ $+(a^2bcf+..abcf^2)(g^3+h^3)+(a^2bcg+..abcg^2)h^3$	40	
Latus	340	1953

	Anzahl der Glieder	
Transport	340	1950
$abcd(e^4 + .. h^4) + abce(f^4 + g^4 + h^4) + abcf(g^4 + h^4) + abcgh^4$ . .	10	
$(a^4bde + .. abde^4)(f + g + h) + (a^4bdf + .. abdf^4)(g + h)$ $+ (a^4bdg + .. abdg^4)h$	120	
$(a^3bde + .. abde^3)(f^2 + g^2 + h^2) + (a^3bdf + abdf^3)(g^2 + h^2)$ $+ (a^3bdg + .. abdg^3)h^2$	60	
$(a^2bde + .. abde^2)(f^3 + g^3 + h^3) + (a^2bdf + .. abdf^2)(g^3 + h^3)$ $+ (a^2bdg + .. abdg^2)h^3$	24	
$abde(f^4 + g^4 + h^4) + abdf(g^4 + h^4) + abdgh^4$	6	
$(a^4bef + .. abef^4)(g + h) + (a^4beg + .. abeg^4)h$	60	
$(a^3bef + .. abef^3)(g^2 + h^2) + (a^3beg + .. abeg^3)h^2$	30	
$(a^2bef + .. abef^2)(g^3 + h^3) + (a^2beg + .. abeg^2)h^3$	12	
$abef(g^4 + h^4) + abegh^4$	3	
$(a^4bfg + .. abfg^4)h$	20	
$(a^3bfg + .. abfg^3)h^2$	10	
$(a^2bfg + .. abfg^2)h^3$	4	
$abfgh^4$	1	
$(a^4ede + .. acde^4)(f + g + h) + (a^4cdf + .. acdf^4(g + h)$ $+ (a^4cdg + .. acdg^4)h$	120	
$(a^3ede + .. acde^3)(f^2 + g^2 + h^2) + (a^3cdf + .. acdf^3)(g^2 + h^2)$ $+ (a^3edg + .. aedg^3)h^2$	60	
$(a^2cde + .. acde^2)(f^3 + g^3 + h^3) + (a^2cdf + .. acdf^2)(g^3 + h^3)$ $+ (a^2edg + .. acdg^2)h^3$	24	
$acde(f^4 + g^4 + h^4) + acdf(g^4 + h^4) + aedgh^4$	6	
$(a^4cef + .. acef^4)(g + h) + (a^4ceg + .. aceg^4)h$	60	
$(a^3cef + .. acef^3)(g^2 + h^2) + (a^3ceg + .. aceg^3)h^2$	30	
$(a^2eef + .. acef^2)(g^3 + h^3) + (a^2ceg + .. aceg^2)h^3$	12	
$acef(g^4 + h^4) + acegh^4$	3	
$acfgh^4$	1	
$(a^4def + .. adef^4)(g + h) + (a^4deg + .. adeg^4)h$	60	
$(a^3def + .. adef^3)(g^2 + h^2) + (a^3deg + .. adeg^3)h^2$	30	
$(a^2def + .. adef^2)(g^3 + h^3) + (a^2deg + .. adeg^2)h^3$	12	
$adef(g^4 + h^4) + adegh^4$	3	
$adfgh^4$	1	
$(a^4efg + .. aefg^4)h$	20	
$(a^3efg + .. aefg^3)h^2$	10	
$(a^2efg + .. aefg^2)h^3$	4	
$aefgh^4$	1	1157

VI. Diejenigen Glieder, welche aus sechs E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character.

$a^2bcde,\ ab^2cde,\ abc^2de,\ abcd^2e,\ abcde^2$

$a^2b^2ade,\ a^2bc^2de,\ a^2bcd^2e,\ a^2bcde^2$

$ab^2c^2de,\ ab^2cd^2e,\ ab^2cde^2$

$abc^2d^2e,\ abc^2de^2$

$abcd^2e^2$

$(a^2bcde + .. abcde^2)$ hat 15 Glieder

$(a^3bcde + .. abcde^3)$ „ 5 „

Latus		3107

	Anzahl der Glieder	
Transport		3107
$(a^3bcde + .. abcde^3)(f+g+h) + (a^3bcdf + .. abcdf^3)(g+h)$ $+ (a^3bcdg + .. abcdg^3)h$	90	
$(a^2bcde + .. abcde^2)(f^2+g^2+h^2) + (a^2bcdf + .. abcdf^2(g^2+h^2)$ $+ (a^2bcdg + .. abcdg^2)h^2$	30	
$abcde(f^3+g^3+h^3) + abcdf(g^3+h^3) + abcdgh^3$	6	
$(a^3bcef + .. abcef^3)(g+h) + (a^3bceg + .. abceg^3)h$	45	
$(a^2bcef + .. abcef^2)(g^2+h^2) + (a^2bceg + .. abceg^2)h^2$	15	
$abcef(g^3+h^3) + abcegh^3$	3	
$(a^3bcfg + .. abcfg^3)h$	15	
$(a^2bcfg + . abcfg^2)h^2$	5	
$abcfgh^3 + abdfgh^3 + abefgh^3$	3	
$(a^3cdef + .. acdef^3)(g+h) + (a^3cdeg + .. acdeg^3)h$	45	
$(a^2cdef + .. acdef^2)(g^2+h^2) + (a^2cdeg + .. acdeg^2)h^2$	15	
$acdef(g^3+h^3) + acdegh^3$	3	
$(a^3defg + . adefg^3)h$	15	
$(a^2defg + .. adefg^2)h^2$	5	
$adefgh^3$	1	296

VII. Diejenigen Glieder, welche aus sieben E bestehen.

Erklärung Der erste Factor jedes Gliedes hat den folgenden Character.

a^2bcdef, ab^2cdef, abc^2def, $abcd^2ef$, $abcde^2f$, $abcdef^2$ mit also 6 Gliedern.		
$(a^2bcdef + .. abcdef^2)(g+h) + (a^2bcdeg + .. abcdeg^2)h$	18	
$abcdef(g^2+h^2) + abcdegh^2$	3	
$(a^2cdefg + ... acdefg^2)h$	6	
$acdefgh^2$	1	
$abcdefgh$	1	29
Summa		3432

Polynomium ist eine aus unendlich vielen Theilen bestehende Gröfse.

Ponton. Die Bestimmung des Inhalts geschieht folgendermaafsen:

Fig. 909.

1. Das innere Parallelepiped mit der unteren Grundfläche ist $= abh$.

2. die vier dreiseitigen Prismen, zwei von der Länge a und zwei von der Länge b sind $= \frac{1}{3}(a+b)(A-a)h$. Unter der Voraussetzung, dafs $A-a=B-b$ hat man $B=A-(a+b)$.

Die vier Eckpyramiden sind $\frac{1}{12}(A-a)^2$.

Der Inhalt des Pontons ist demnach $= [ab + \frac{1}{3}(a+b)(A-a) + \frac{1}{12}(A-a)^2]h$.

Porisma. Die Erklärungen alle, welche Klügel sämmtlich als von verschiedenen Mathematikern herrührend, in seinem mathematischen Wörterbuch angibt, sind mehr und weniger unverständlich. Den aufgeführten Beispielen nach ist Porisma die Lösung der Aufgabe, aus gegebenen geometrischen Gröfsen andere zu finden, die alle mit einander in einem constanten Verhältnifs stehen.

Die von Klügel unter No. 5 aufgeführte

beispielsweise Aufgabe ist: Ein Kreis und eine gerade Linie sind gegeben. Man soll in dem Kreisumfang denjenigen Punkt

Fig. 910.

finden, durch welchen nach beliebigen Richtungen gerade Linien gezogen, dieselben alle so geschnitten werden, dafs beide Theile gleiche Rectangel geben. Dieser Punkt ist der Durchschnittspunkt der aus dem Mittelpunkt auf die gerade Linie gefällten Normale. Denn dafs $DE \times FE$ constant ist, findet man mit Hülfe des Halbmessers CD. Es ist nämlich

$$DE = 2CE \sin \tfrac{1}{2}\alpha = 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$FE = EG \sec FEG = EG \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha$$

mithin $DE \times FE = 2r \cdot EG.$

Porosität, s. u. dem Art. „Atom" pag. 163.

Positiv, s. affirmativ.

Positionswinkel eines Sterns, der gebildet wird durch zwei gröfste Kreise, der eine durch den Pol der Ekliptik, der andere durch den Pol des Aequators.

Postulat, s. u. „Constructionssätze", pag. 124.

Potenotsche Aufgabe. Es sind die drei Punkte A, B, C ihrer Lage nach bekannt, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC ist gegeben; man soll einen beliebigen vierten Punkt D gegen die gegebenen drei Punkte seiner Lage nach bestimmen.

Bezeichnet man die Seiten AC und BC mit b und a, die Winkel des Dreiecks mit A, B, C. Ferner wird voraus-

Fig. 911.

gesetzt, dafs man von D aus nach den gegebenen drei Punkten visiren kann und dafs mithin $\angle BDC = \alpha$ und $\angle ADC = \beta$ bekannt sind.

Die beiden $\angle CAD$ und CBD sind unbekannt, mit x und y bezeichnet und man hat

$$y = 360^\circ - C - D - x$$

oder der Abkürzung wegen den bekannten Winkel $360^\circ - C - D$ mit γ bezeichnet: $y = \gamma - x$.

Die Diagonale CD läfst sich aus den beiden Dreiecken ACD und BCD ausdrücken, es ist nämlich

$$CD = b\,\frac{\sin x}{\sin \beta} = a\,\frac{\sin(\gamma - x)}{\sin \alpha}$$

hieraus $$\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\gamma - x)}{\sin x} = \frac{\sin \gamma \cos x - \cos \gamma \sin x}{\sin x} = \sin \gamma \cot x - \cos \gamma$$

Mithin $\cot x = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \cot \gamma$

Eben so ist $\cot y = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{\sin \beta}{\sin a} + \cot \gamma$

Ist γ stumpf, d. h. sind $\angle C + \angle D < 180^\circ$, so ist $\cot \gamma$ negativ zu nehmen.

Potenz ist ein Product aus zweien oder mehreren gleichen Factoren.

$49 = 7 \times 7 = 7^2$; $64 = 8 \times 8 = 8^2 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$. Die Anzahl der gleichen Factoren heifst der Exponent, die mehrmal genommene Zahl heifst die Wurzel; die Potenz wird nach der Zahl des Exponenten benannt.

Jede Wurzel ist die erste Potenz: $7 = 7^1$; $49 = 7^2$ ist die zweite Potenz von 7 oder das Quadrat von 7 oder 7 im Quadrat. So heifst die dritte Potenz auch der Cubus, die vierte auch Biquadrat.

Desgleichen wird nach dem Exponent die Wurzel benannt und man hat zweite oder Quadratwurzel, dritte oder Cubikwurzel, vierte oder Biquadratwurzel, 5te, 10te Wurzel u. s. w.

Bleibt die Wurzel dieselbe und man potenzirt diese nach der natürlichen Reihenfolge von Bruchzahlen, so heifst die constante Wnrzel die Basis, die Exponenten heifsen Logarithmen, die Potens der Nnmerns, die ganze Reihenfolge der Potenzen in Summa ein Logarithmensystem.

Die alten Mathematiker verglichen bekanntlich die arithmetischen Gröfsen immer mit den geometrischen, sie nannten daher die zweite Potenz eine viereckige Zahl oder ein Quadrat, die vierte ein Quadratoqnadrat, die fünfte einen Qnadrato-Cubus, die sechste einen Cnbocnbns. Daher bei Euklid die in Potenz commensnrabele nnd incommensnrabele Linien.

1. Die Elementarrechnung mit einfachen Potenzen oder die Species derselben bestehen blos in zwei Rechnnngsarten, dem Mnltipliciren und dem Dividiren. Ersteres geschieht dnrch Addition, letzteres dnrch Snbtraction der Exponenten.

$$a^n \times a^m = a^{m+n};\; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n;\; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5;\; \frac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m};\; (a^3)^4 = a^{12};\; (a^2)^3 = a^6.$$

Es ist $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $a^n = \sqrt[\frac{1}{n}]{a}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a};\; \sqrt[3]{a^4 \cdot b^2 \cdot c} = a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}};\; \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[np]{a^m} = a^{\frac{m}{np}}$$

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^5 = a^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{a^{10}}$$

$$\left(a^m\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m \cdot a^n}{b^m \cdot b^n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$$

Potenz der Hyperbel ist Fig. 718, pag 265 im Art. „Hyperbel" das Quadrat der Linie *MZ* oder der halben Linie *MN*.

Potenzexponent, s. n. Exponent.

Potenzrechnung, s. n. Poteuz.

Potenzzeichen, desgl. daselbst.

Praktik, welsche, ist die Knnst, beim Rechnen mit Leichtigkeit nnd Schnelligkeit zn verfahren.

Presse, die hydraulische, s. „hydranlische Presse". Alle übrigen Pressen znm bürgerlichen Gebrauch, auch mechanische Pressen genannt, werden dnrch Hebel, Keile oder Schrauben in Thätigkeit gesetzt.

Primfactoren einer Zahl sind die einfachsten Theiler derselben, z. B. die Primfactoren der Zahl 120 sind $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Primzahlen sind Zahlen, die aus keinen Factoren bestehen, die kein Prodnct sind. Die von 1 bis 100 sind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97. Die Zahl 2 ist die einzige gerade Zahl unter den Primzahlen. Es gibt kein äufseres Kennzeichen für eine ungrade Zahl mit Ausnahme, deren Endziffer die 5 ist, ob sie Primzahl ist oder nicht.

Primzahlen unter sich sind solche Zahlen, die keinen gemeinschaftlicheu Factor haben als 25 und 36. Sie werden anch relative Primzahlen genannt.

Prisma ist ein Körper, welcher zwei parallele congruente Endebenen besitzt, und deren diese verbindenden Seitenflächen Parallelogramme sind. Jeder mit den Endebenen ∦ genommene Durchschnitt ist denselben congruent.

2. Zwei Prismen sind congruent, wenn sie congrnente Endflächen nnd eine congruente Seitenfläche haben.

3. Ein schiefes Prisma hat denselben Inhalt mit einem geraden von denselben Seitenkanten, dessen Grundflächen aber ein auf die Seitenkanten normal geführter Durchschnitt ist. Denn ist *GHJ* ein normaler Qnerschnitt des schiefen Prisma *ABC DEF*, so nimm auf der verlängerten Kante *AF* ein Stück $GL = AF$, lege durch *L* eine Ebene ∦ zn *GHJ* nnd erweitere die Seitenflächen des Prisma, bis sie die Ebone schneiden, so entsteht ein gerades Prisma *GHJKLM*, dessen Kanten deneu des schiefen Prisma gleich sind.

Da $AF = GL$ so ist $AG = FG$; ebenso folgt $BK = EH$, $CM = DJ$ n. s. w. Bringt man also den Körper *GHJ DEF* so in den Körper *KLM ABC*, dafs die Grund-

Fig. 912.

flächen *GHJ* und *KLM* congruiren, so werden auch die Kanten *GF*, *EH* u. s. w. mit den Kanten *AL*, *BK* u. s. w. zusammen fallen, weil sie auf den Grundflächen normal und je zwei und zwei einander gleich sind; mithin fallen auch die Punkte *F*, *D*, *E* u. s. w. auf die Punkte *A*, *C*, *B* u. s. w. und die Endflächen eben so. Daher decken sich auch alle Seitenflächen, folglich sind die Körper *ABCLKM* und *DEFGHJ* congruent.

Nimmt man nun von dem Körper *DEFLKM* einerseits den Körper *ABCLKM* hinweg, so bleibt das schiefe Prisma *ABCDEF*, nimmt man andererseits den gleich grofsen Körper *DEFGHJ*, so bleibt das gerade Prisma *GHJLKM*; das schiefe und das gerade Prisma sind also gleich grofs.

4. In einem Parallelepipedum sind die gegenüber liegenden Seitenflächen gleich und parallel.

Denn das P. ist ein Prisma, dessen Endflächen Parallelogramme sind. In einem Prisma sind die Endflächen congruent, folglich die Endflächen des P. congruente Parallelogramme. Bei zweien gegenüberliegenden Seitenflächen sind also je zwei Seiten einander ‡ und gleich, folglich diese Seitenflächen ‡ und ≅, weil überdies die homologen Winkel gleich sind, da ihre Schenkel ‡ laufen. In einem Parallelepipedum kann man also je zwei einander gegenüberliegende Begrenzungsflächen als Grund- oder Endflächen betrachten.

5. Zwei Parallelepipeda von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich grofs.

Denn legt man die Grundflächen der beiden P. so auf einander, dafs sie congruiren und die P. selbst auf einer Seite der congruirenden Grundflächen liegen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn zwei gegenüberliegende Seitenflächen des einen P. mit zweien des anderen in einer und derselben Ebene liegen und

2. Wenn keine Seitenfläche des einen mit keiner Seitenfläche des anderen in einer und derselben Ebene liegt.

Es seien nun im 1sten Fall *ABCDEFGH* und *ABCDJKLM* die beiden P., bei denen die Seitenflächen *AG*, *AL*, *DH*, *DM* in einer Ebene liegen. Da sie gleiche Höhen haben, so fallen auch die oberen Endflächen *FH* und *KM* in einerlei mit der Grundfläche *BD* ‡ laufende Ebene und so bildet sich das vierseitige Prisma *AELC*, dessen Endfläche die Trapeze *ABLF* und *DCME* sind. Dieses Prisma wird durch die Ebene *ADJK* in zwei Theile zerlegt, wovon der eine das P. *AM*, der andere das dreiseitige Prisma *ADEFKJ* ist. Eben so zerlegt die Ebene *BCHG* jenes vierseitige Prisma in das P. *AH* und das dreiseitige Prisma *BCHGLM*. Diese dreiseitigen Prismen sind aber ≅; denn es ist die Grundfläche *AFK* der einen ≅ der Grundfläche *BGL* der anderen, die Seitenfläche *ADEF* des einen ≅ der Seitenfläche *BCHG* des anderen und diese beiden sind gegen ihre Grundfläche unter gleichen Winkeln geneigt. Nimmt man daher von dem vierseitigen Prisma nach einander die dreiseitigen hinweg, so mufs Gleiches übrig bleiben. Nun bleiben aber die beiden zu vergleichenden Parallelepipeden, folglich sind diese gleich grofs.

2ter Fall. Liegen die Seitenflächen des einen mit denen des anderen in verschiedenen Ebenen, so sei *NOPQ* die obere Endfläche des Parallelepipeds *ABCDNOPQ*. Erweitert man nun die Seitenflächen *ADNO* und *BCQP* bis sie die erweiterten Ebenen der Seitenflächen *ABGF* und *CDEH* schneiden, so bildet sich über der Grundfläche *ABCD* durch Erweiterung der oberen Endflächen *EG* und *NP* ein drittes Parallelepipedum *ABCEJKLM*, mit welchem nach dem ersten Fall die beiden Parallelepipeda *ACHF* und *ACQO* gleich grofs sind, und folglich sind die eben genannten auch unter sich gleich grofs.

Fig. 913.

6. Jedes Parallelepiped läfst sich in ein gerades von derselben Höhe nnd von gleich grofser nnd rechtwinkliger Grundfläche, d. h. in ein rechtwinkliges P. verwandeln, welches mit dem gegebenen einerlei Körperinhalt hat.

Denn construirt man über der Grundfläche des gegebenen ein gerades von derselben Höhe, so ist nach dem vorigen Satz das letzte mit dem gegebenen von gleicher Gröfse. Es sei *ABCDEFJK* das gleich grofse gerade P.; auf der Seite *AB* der Grundfläche errichte man bis an *CD* in *A* nnd *B* die Normalen *AH* nnd *BG*, so entsteht das Rechteck *ABGH* gleich der Grundfläche *ABCD*. Errichtet man nnn über *ABGH* als Grundfläche ein gerades P. von einerlei Höhe mit dem *ABCDEFJH*, so ist jenes ein rechtwinkliges, welches mit dem gegebenen eine gleich grofse Grnndfläche nnd eine gleiche Höhe hat, ist aber auch von gleichem körperlichen Inhalt mit dem gegebenen. Denn man kann die gemeinschaftliche Seitenfläche *ABEF* als Grundfläche betrachten, so hat dann das Parallelepipednm *ABCDEFJK* nnd das rechtwinklige, dessen Grnndfläche nrsprünglich *ABGH* ist, einerlei Grnndfläche nnd gleiche Höhe, folglich sind beide P. gleich grofs; das rechtwinklige ist also auch mit dem gegebenen gleich grofs.

7. Parallelepipeda verhalten sich ihrem körperlichen Inhalt nach wie die Prodncte aus den Inhalten ihrer Grundflächen mnltiplicirt mit den zugehörigen Höhen, sofern man die Grundflächen nach einerlei Flächeneinheit und die Höhen nach derselben Längeneinheit bestimmt.

Denn da P., wenn sie nicht rechtwinklig sind, sich in solche mit gleichen Grundflächen nnd gleichen Höhen verwandeln lassen, so ist der Beweis nur für rechtwinklige zu führen.

Es seien zuerst die P. von congruenten Grnndflächen, dann lassen sie sich so in einander legen, dafs ihre Grnndflächen congruent nnd ihre Seitenkanten zusammen fallen, dafs einer also ein Theil des anderen wird.

ABC nnd *ABD* seien die beiden zu einander gelegten P., deren gemeinschaftliche Grundfläche *AB*, dann sind *AC* und *AD* ihre Höhen. Ist nun zuerst *AC* commensurabel mit *AD*, so sei *AE* ihr gemeinschaftliches Maafs. Dieses sei in *AC* n-, in *AD* m mal enthalten. Trägt man nun *AE* von *A* nach *D* auf nnd legt durch die Endpunkte der aufgetragenen Theile Ebenen ∓ zu *AB*, so zerfällt dadurch das P. *ABC* in n, das P. *ABCD* aber in m nnter sich congruente Theile. Bezeichnet man nnn einen dieser Theile mit P, so hat man Pp. $ABC = nP$ und Pp. $ABD = mP$; folglich ist $P = \frac{1}{n} ABC$ und also Pp.$ABD = \frac{m}{n} ABC$; mithin ist $\frac{m}{n}$ der Name des Verhältnisses $ABC : ABD$. Ganz eben so folgt, dafs $AD = \frac{m}{n} AC$, folglich hat auch das Verhältnifs $AC : AD$ denselben Namen $\frac{m}{n}$, die beiden Verhältnisse sind also einander gleich und daher P. ABC : P. $ABD = AC : AD$.

Sind die Höhen *AC* nnd *AD* incommensurabel, so folgt eben so, dafs jene beiden Verhältnisse immer einerlei Annähernngsnamen nnd mithin ebenfalls einander gleich sind; es verhalten sich also P. mit congruenten Grundflächen wie ihre zugehörigen Höhen.

Nnn seien ferner bei zwei rechtwinkligen Pp. A nnd B die Nebenseiten der Grnndflächen des einen nnd a, b die des anderen, die zugehörigen Höhen seien H nnd h, die Inhalte der Pp. P nnd p. Nnn denke man sich zwei andere P., wovon das eine zu Nebenseiten der Grundflächen A, B nnd zur Höhe h hat, der Inhalt dieses P. $= P'$, von dem anderen P seien a, B die Nebenseiten der Grundflächen nnd h die Höhe, der Inhalt $= p'$, so hat man nach dem Erwiesenen $P : P' = H : h$. Bei den Pp. P' nnd p' kann man die Seitenflächen, deren Nebenseiten B und h sind, als Grundflächen betrachten, dann

sind ihre Höhen A, a und man hat ebenfalls $P' : p = A : a$.

Bei den Pp. p' und p kann man die Seitenflächen, deren Nebenseiten a und b sind, als Grundflächen betrachten, dann sind diese gleich und B und b sind die zugehörigen Höhen, folglich ist auch $p' : p = B : b$.

Setzt man die drei Proportionen durch Multiplication zusammen, so erhält man

Fig. 914.

$$Pl'p' : P'pp' = H \cdot A \cdot B : hab$$

woraus $\quad P : p = ABH : abh.$

Sind G und g die Inhalte der Grundflächen der Pp. P und p, so hat man $G : g = AB : ab$, folglich $P : p = H \cdot G : hg$.

8. Ein P. wird von einer durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Ebene in zwei gleich grofse dreiseitige Prismen zerlegt.

Man schneide das P. mit einer Ebene, die auf den Seitenkanten desselben normal ist, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm und wird durch die Diagonalfläche also in zwei congruente Dreiecke getheilt, welche die normalen Durchschnitte der beiden dreiseitigen Prismen sind, worin das P. zerlegt wird. Nun ist jedes Prisma gleich einem geraden, dessen Grundfläche der normale Querschnitt des ersten ist und dessen Seitenkanten dieselben sind, folglich sind hier die dreiseitigen Prismen so grofs als zwei congruente dreiseitige Prismen, folglich sind sie auch unter sich einander gleich.

9. Zwei dreiseitige Prismen verhalten sich also wie die Pp., von denen sie die Hälften sind, folglich wie die Producte aus ihren Höhen in die doppelten Inhalte der Grundflächen, also auch wie die Producte aus Grundfläche und Höhe.

10. Zwei Prismen verhalten sich im Allgemeinen wie die Producte aus den Inhalten ihrer Grundflächen in ihre Höhen.

Denn es bezeichnen P und p die beiden Prismen, G und g die Inhalte ihrer Grundflächen, H und h die zugehörigen Höhen. Man zerlege jedes Prisma durch Diagonalebenen durch die Seitenkanten in dreiseitige. Die des Prisma P seien der Reihe nach P_1 P_2 P_3 .. P_n; die Inhalte deren Grundflächen G_1 G_2 G_3 .. G_n. Bei dem Prisma p bezeichnen p_1 p_2 p_3 .. p_n und g_1 g_2 g_3 dasselbe.

Da nun dreiseitige Prismen sich wie die Producte aus Grundfläche in Höhe verhalten, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind.

Also

$$P_1 : P_2 : P_3 : \dots P_n = G_1 : G_2 : G_3 : \dots G$$

daher

$$P_1' : P_1 + P_2 + \dots P_n = G_1' : G_1 + G_2 + \dots G_n$$

eben so folgt

$$p_1 : p_1 + p_2 + \dots p_n = g_1 : g_1 + g_2 + \dots g_n$$

Aber $\quad P_1 + P_2 + \dots P_n = P$

$$p_1 + p_2 + \dots p_n = p$$

$$G_1 + G_2 + \dots G_n = G$$

$$g_1 + g_2 + \dots g_n = g$$

Also hat man auch

$$P_1 : P = G_1 : G$$

$$p_1 : p = g_1 : g$$

Nun verhält sich

$$P_1 : p_1 = G_1 H : g_1 h$$

Es ist aber auch, wenn man die Hinterglieder der letzten Proportion mit h multiplicirt,

$$p_1 : p = g_1 h : gh$$

woraus $\quad P : P_1 = GH : G_1 H$

hieraus $\quad P : p = GH : G, H$

11. Der Inhalt eines Prisma ist das Product aus den Zahlen, welche den Inhalt der Grundfläche nach dem Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit und die Höhe nach der Längeneinheit selbst bestimmen.

Denn sind P und p zwei Prismen, die Inhalte ihrer Grundflächen G und g ihre Höhen mit der Längeneinheit gemessen H und h, so hat man nach dem vorigen Satz $P : p = GH : gh$. Ist nun p ein Würfel, dessen Kante jede $= 1$, so ist $g = 1$, $h = 1$, also auch $gh = 1$.

Bezeichnet man nun diesen Würfel mit k, so hat man

$$P : k = GH : 1$$

mithin ist $\quad P = GH \cdot k$

folglich ist $G \cdot H$ die Zahl, welche angibt, welches Vielfache der Raum des Prisma P von dem Körperraum des Würfels k ist, folglich ist GH der Inhalt des Prisma.

Aehnliche Prismen siehe Bd. I., pag. 31.

12. In einem dreiseitigen Prisma *ABCDEF* kennt man drei in einer Ecke znsammenstofsende Kanten wie auch die ebenen Winkel dieser Ecke; die Neignngswinkel aller das Prisma begrenzenden Flächen, den körperlichen Inhalt und die Oberfläche desselben zu finden.

1. Bezeichnet man die Kanten *AB* mit a, *AC* mit b, *AD* mit c, die gegebenen Winkel *BAC* mit α, *BAD* mit β, *CAD* mit γ, so sind wegen dieser bekannten Winkel α, β, γ auch die Seiten des sphärischen $\triangle bcd$ bekannt, also auch die Winkel b, c, d. D. h. die Neigungswinkel der Seitenflächen *ADEB*, *ADFC* gegen die Grundfläche und gegen einander selbst.

2. Im geradlinigen Dreieck *ABC* kennt man die beiden Seiten *AB*, *AC* und den Winkel *BAC*, folglich auch die Winkel *ABC*, *ACB* und die Seite *BC*.

3. Im sphärischen Dreieck *ace* kennt man nun den Winkel $\alpha = b$, nebst den Seiten *ac*, *ae* $(180° - \beta)$, folglich auch die Winkel c, e und die Seite *ce*. Der Winkel c gibt die Neignng der Ebene *BEFC* gegen die Grundfläche *ABC* und der Winkel e die Neigung der nämlichen Ebene gegen *ABDE*.

Fig. 915.

4. An der Ecke *C* kennt man die Winkel *ACB* (2), $ACF = 180° - \gamma$ und $BCF = 180° - CBE = 180° - ce$, folglich läfst anf eine ähnliche Art wie bei *A* der Neigungswinkel der Ebenen *BCFE*, *ACFD* finden.

5. Der körperliche Inhalt eines Prisma ist die Hälfte von dem des Parallelepipeds von doppelt so grefser Grundfläche und ist demnach

$$abc\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}$$

6. Die Oberfläche des Prisma besteht ans drei Parallelogrammen und zwei Dreiecksn. Es ist aber $\triangle ACB = \triangle DFE = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$. Parallelogramm $ABED = ac \sin\beta$, $ACFD = bc \sin\gamma$. Da ferner *BC* und *CBE* ischen gefnnden worden', so setze man $BC = f$, $CBE = \zeta$, alsdann ist Parallelogramm $CBEF = cf \sin\zeta$. Nimmt man 'alles dieses zusammen, so erhält man die gesnchte Oberfläche

$$ab \sin\alpha + ac \sin\beta + bc \sin\gamma + cf \sin\zeta.$$

13. Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist dreien Pyramiden znsammsn genommen glsich, ven einerlei Grundfläche mit dem Prisma, deren Höhen aber die Abstände dsr Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grnndfläche sind, oder einem dreiseitigen vollständigen Prisma = von derselben Grundfläche nnd dessen Höhe das arithmetische Mittel aus jenen drei Abständen ist.

Denn es sei *ABC* die Grundfläche, *DEF* der schiefe Schnitt des dreiseitigen Prisma. Man lege dnrch die Eckpnnkte *A*, *C*, *E* und *C*, *E*, *F* Ebenen, so zerlegen diese das Prisma in drei dreiseitige Pyramiden. Diese drei Pyramiden sind *FDEC* (*FDE* Grundfläche, *C* Spitze), *ABCE* (*ACB* Grnndfläche, *E* Spitze) nnd *AFEC* (*CAE* Grnndfläche, *F* Spitze). Die Pyramide *ABCE* hat mit dem Prisma einerlei Grundfläche und ihre Spitze im Winkelpunkt *E* des schiefen Schnitts, alse zur Höhe den Abstand dieses Pnnkts von der Grundfläche.

Betrachtet man von der Pyramide *ACFE* das Dreieck *ACF* als Grundfläche, so ist *E* ihre Spitze, und weil *BE* mit *AF* also auch mit der Ebene des Dreiecks *ACF* ∦ läuft, se ist diese zweite Pyramide anch einer Pyramide gleich über derselben Grundfläche *ACF*, die ihre Spitze in *B* hat. Von dieser Pyramide ist das Dreieck *ABC* eine Begrenzungsfläche; nimmt man diese als Grnndfläche an, so hat sie ihre Spitze in *F*. Die zweite Pyramide *ACEF* ist also gleich einer Pyramide ven einerlei Grundfläche mit dem Prisma nnd deren Höhe der Abstand des Winkelpunkts von der Grundfläche ist. Nimmt man bei der dritten Pyramide *CDEF* das $\triangle CDE$ als Grundfläche, also *F* znr Spitze, so ist sie, weil *AF* ∦ der Ebene *CDE*, einer Pyramide gleich über derselben Grundfläche *CDE* mit der Spitze in *A*. Von dieser ist das $\triangle ACD$ eine Begrenzungsfläche; nimmt man diese zur Grund-

fläche, so hat sie ihre Spitze in E, weil BE mit der Ebene ACD ∦ läuft, sie ist also einer Pyramide gleich über derselben Grundfläche ACD und Spitze in B, mithin ist auch die dritte Pyramide $CDFE$ dieser letzt genannten Pyramide gleich. Man kann aber bei letzterer die Begrenzungsfläche ABC als Grundfläche betrachten; dann ist D ihre Spitze, folglich ist die dritte Pyramide einer Pyramide gleich über der Grundfläche der Prisma, die den Abstand der Winkelspitze D zur Höhe hat.

Fig 916.

Dafs die Pyramide $ACDE$ gleich ist der Pyramide $CDFE$, folgt unmittelbar, weil $\triangle ACD = \triangle CDF$. Ist nun g der Inhalt der Grundfläche ABC, und sind h, h', h'' die Abstände D, E, F von der Grundfläche, so sind die Inhalte der drei Pyramiden, die das Prisma ausmachen, $\frac{1}{3}gh$, $\frac{1}{3}gh'$, $\frac{1}{3}gh''$, daher der Inhalt des Prisma $= \frac{1}{3}g(h + h' + h'')$.

Sind die Seitenkanten auf der Grundfläche normal, so sind sie zugleich die Abstände der Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche, und daher ist in diesem Fall der Inhalt des Prisma ein Product aus der Grundfläche und dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten.

14. Der Inhalt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma ist gleich dem Product aus dem Inhalt eines auf die Seitenkanten normal geführten Durchschnitts und dem arithmetischen Mittel dieser Seitenkanten.

Denn es sei GHJ ein normaler Querschnitt des schief abgeschnittenen Prisma $CDEF$, so zerlegt der normale Schnitt dasselbe in zwei Theile, deren Inhalte sich nach dem Vorigen bestimmen lassen, indem man GHJ als Grundfläche für beide Theile betrachtet, denn dann hat man

$$\text{Prisma } ABCGHJ = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(AG + BH + CJ)$$
$$\text{Prisma } DEFGHJ = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(FG + EG + DJ)$$
$$\text{Prisma } ABCDEF = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(AF + BE + CD)$$

15. Den Inhalt eines schief abgeschnittenen vierseitigen Prisma zu finden, wenn die vier Seitenkanten und der normale Querschnitt gegeben sind.

Es sei $ABCDEFGH$ das vierseitige schief abgeschnittene Prisma, dessen Endflächen $ABCD$ und $EFGH$, die Kante AF sei a, $BG = b$, $CH = c$, $DE = d$, $JKLM$ der normale Querschnitt. Zieht man in diesem die Diagonale KM, so sei $\triangle JKM = g$, $KLM = g'$. Legt man durch die Kanten DE und BG eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei dreiseitige, wovon nach dem vorigen Satz das eine $ABDEFG = \frac{1}{3}(a + b + d)g$ das andere $BCDEGH = \frac{1}{3}(b + c + d)g'$

Daher ist der Inhalt des vierseitigen Prisma $ABCDEFGH =$

$$\tfrac{1}{3}(a + b + d)g + \tfrac{1}{3}(b + c + d)g'$$
$$= \tfrac{1}{3}(ag + cg') + \tfrac{1}{3}(b + d)(g + g').$$

Fig. 917.

Ist die Seitenfläche $ABDF$ ∦ der Seitenfläche $CDEH$, ihr Abstand von einander gleich h, die Seite JM des normalen Querschnitts $= l$, und die parallele Seite $KL = \lambda$, so ist $g = \frac{1}{2}hl$, $g' = \frac{1}{2}h\lambda$, da-

her in diesem Fall das vierseitige Prisma
$= \frac{1}{3}(a+b+d) \cdot \frac{1}{2}hl + \frac{1}{3}(b+c+d) \cdot \frac{1}{2}h\lambda$
$= \frac{1}{6}hl(a+b+d) + \lambda(a+b+c)$.

Sind die parallelen Seitenflächen $ABGF$ und $CDEH$ Rechtecke, so ist $b = a$, $d = c$, daber der körperlicho Inhalt
$= \frac{1}{6}h[(2a+c)l + (a+2c)\lambda]$.

Fig. 918.

Fig. 919.

Fig. 920.

16. Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Parallelepipeds ist das Product aus dem Inhalt der Grundfläche und dem arithmetischen Mittel der Abstände zweier gegenüberliegenden Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche.

Es sei $ABCD$ der schiefe Schnitt des Parallelepipeds über der Grundfläche $EFGH$ des Inhalts $= g$. Die Abstände der Winkelspitzen A, B, C, D seien in derselben Folge a, b, c, d von der Grundfläche. Legt man nun durch die Kanten BG und DE eine Ebene, so theilt diese das Parallelepiped in zwei schief abgeschnittene dreiseitige Prismen, deren Grundflächen die Hälften der Grundflächen des Parallelepipeds sind. Folglich ist nach dem Obigen

$$ABDEFG = \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{3}(a+b+d)$$
$$BCDEGH = \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{3}(b+c+d)$$

Mithin der Inhalt des ganzen Parallelepipeds
$= \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{3}(a+b+d) + \frac{1}{2}g\,\frac{1}{3}(b+c+d)$
$= \frac{1}{6}g(a+2b+2d+c)$

Der schiefe Schnitt ist ein Parallelogramm, weil die Gegenseiten die Durchschnitte des schiefen Schnitts mit Parallelebenen sind. Die Diagonalen halbiren sich also wechselseitig in ihrem Durchschnitt J. Legt man durch die Lothe a und c und b und d Ebenen, so sind diese auf der Grundfläche des Parallelepipeds normal, die Durchschnittslinie JK dieser beiden Ebenen ist also auch ein Loth auf der Grundfläche, und folglich ist $2JK = a + c = b + d$. Substituirt man daher für $b + d$ seinen Werth $a + c$ in den obigen Inhaltsausdruck des Parallelepipeds, so wird derselbe
$= \frac{1}{6}g(3a+3c) = g \cdot \frac{1}{2}(a+c)$.

Ist das schief abgeschnittene Parallelepiped ein gerades, so sind die Abstände der Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche die Kanten selbst, und hieraus folgt wie bei dem dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma, dafs der Inhalt jedes schief abgeschnittenen Parallelepipeds ein Product ist aus dem Inhalt eines auf die Kanten normal geführten Querschnitts und dem arithmetischen Mittel zweier gegenüberliegenden Kanten.

Fig. 921.

17. Prismen sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen, eine ähnliche homologe Seitenfläche und diese unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt haben.

Denn es seien *ABCDEFGH* und *abcdefgh* zwei Prismen, worin die Grundflächen *ABEF* und *abef*, sowie die Seitenflächen *ABCD* und *abcd* einander ähnlich und die letzten gegen die ersten

Fig. 922.

unter gleichen Winkeln geneigt, alsdann ist die Ecke bei $B \cong$ der bei b. Denn wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen ist $ABE =$ Seite abe, und wegen Aehnlichkeit der Seitenflächen Seite $ABC = abc$, und wegen gleicher Neigungswinkel der Seiten FE, fe sind auch die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich Folglich sind auch die Seiten CBE und cbe, so wie die Winkel, welche diese Seiten mit den Seiten ABE und abe machen einander gleich. Die Seitenflächen BCE und bce der Prismen sind also gleichwinklig und gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt. Wegen Aehnlichkeit der Grundflächen ist $AB : ab = BE : be$, und wegen der Aehnlichkeit der Seitenflächen $AB : ab = BC : bc$. Mithin ist auch $BC : bc = BE : be$. Daher sind die Seitenflächen BCE und bce ähnlich, schliefst man so fort, so folgt, dafs alle homologen Seitenflächen ähnlich und folglich alle homologen Winkel gleich und alle homologen Kanten und Linien proportional sind.

18. Aehnliche Polyeder verhalten sich wie die Würfel der homologen Kanten oder Linien.

Man fälle auf die Grundflächen die Lothe CG und cg und ziehe BG und bg, so sind die $\angle CBG$ und cbg die Neigungswinkel der Kanten BC, bc gegen die Grundflächen, und da die Ecken B und $b \cong$ sind, so sind diese Neigungswinkel einander gleich, mithin die Dreiecke CBG, cbg einander $\cong$. Daher hat man

$$CG : cg = BC : bc = AB : ab.$$

Es ist aber auch Grundfläche

$$ABEF : abef = AB^2 : ab^2.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so erhält man

$$CG \times ABEF : cg \times abef = AB^3 : ab^3.$$

Nun verhalten sich aber Prismen wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen, folglich ähnliche Prismen wie die Cubi ihrer homologen Kanten.

Prisma, achromatisches, siehe den Art. „achromatisch“, pag. 24.

Prisma, (Optik) hat in der Physik Wichtigkeit in Betreff der Brechung der Lichtstrahlen. Das Wesentlichste hiervon s. den Art. „Brechung der Lichtstrahlen“.

Prisma (Kryst.). Es gibt deren sehr viele:

1. Das quadratische oder die quadratische Säule hat die Form 891.
2. Das oblonge oder die rectanguläre Säule hat die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds.
3. Das rechtwinklig vierseitige. Es gibt zweierlei derselben und kommen diese häufig mit den Quadratoctaedern vor.
4. Das achtseitige, das vier und vierkantige hat 8 Flächen mit zweierlei Kanten.
5. Das sechsseitige; ihre 6 Flächen sind der Hauptaxe parallel.
6. Das zwölfseitige, sechs und sechskantige hat 12 Flächen, 12 Kanten die der Hauptaxe ‡, die Kanten zweierlei, 6 abwechselnd sind stumpfer und 6 abwechselnde schärfer.
7. Das vertikale vierseitige steht in genauer Beziehung zu den Rhombendodekaedern. Die Kanten des P, welche an den Endpunkten der zweiten Nebenaxe liegen, heifsen die ersten, die an den zweiten Seitenkanten die zweiten Seitenkanten.
8. Das horizontale, deren Flächen der zweiten Nebenaxe ‡ sind, heifsen die ersten horizontalen Prismen; deren Flächen der ersten Nebenaxe ‡ sind, die zweiten horizontalen Prismen.
9. Das vertikale P. und die beiden horizontalen Prismen, die zu einem

und demselben Octaeder gehören und deren Flächen daher eine gleiche Lage haben wie die Kanten desselben, heifsen die drei zusammengehörigen Prismen.

10. Das vordere schiefe Prisma,
11. Das hintere schiefe Prisma eines zwei und eingliedrigen Octaeders, kommen aber in den zweierlei Flächen eines zwei und eingliedrigen Octaeders getrennt vor, woher die zwei schiefen Prismen, in welche sie zerfallen können, auch besonders bezeichnet werden. Dies geschieht nun dadurch, dafs man das Prisma, dessen obere Flächen an dem Octaeder an der hinteren Seite liegen, das vordere schiefe Prisma, das letztere das hintere schiefe Prisma nennt.

    Bei der Bezeichnung eines Octaeders müssen immer die Zeichen beider Prismen ausgeführt werden, da eines nie das andere voraussetzt.
12. Das vierseitige Prisma, deren Flächen der Hauptaxe ǂ sind.
13. Das vertikale Prisma, deren Flächen der Hauptaxe ǂ sind.
14. Das erste horizontale Prisma, deren Flächen der zweiten Nebenaxe ǂ sind.
15. Das zweite horizontale Prisma, deren Flächen der ersten Nebenaxe ǂ sind.

Prismatisches Krystallisationssystem ist das vierte System, das einund-einaxige System, bei welchem drei unter einander ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden (s. „Axensystem").

Prismoid ist ein Körper, dessen Grundflächen parallele geradlinige Oberflächen von gleich vielen aber unähnlichen Seiten sind. Die Seitenlinien oder Kanten sind sich einander, keine oder nicht alle parallel, wie sie in dem Prisma sind. Die Folge der parallelen Durchschnitte mufs als stetig gedacht werden.

Probe, Rechnungsprobe ist eine Rechnung, mit welcher man sich versichert, dafs eine in Zahlen ausgeführte Rechnung richtig ist. Die beste Probe ist, wenn zwei Rechner sie unternehmen und ihre Resultate übereinstimmend finden. Wenn ein Rechner dies nicht haben kann, so mag er selbst die ganze Rechnung nach einer Zwischenzeit wieder vornehmen und zwar auf eine abgeänderte Art. Z. B. beim Addiren, besonders vieler Posten wird er einmal von oben herunter, das andere Mal von unten nach oben summiren; auch fängt man nach derselben Richtung mit einer Einheit mehr oder weniger an, wo man als Resultat eine Einheit mehr oder weniger erhält.

Die Multiplication mag es durch die Division, die Division durch die Multiplication prüfen. Hier können auch die Logarithmen nützliche Dienste leisten. Das Facit einer Regel de trie nehme man als ein gegebenes Glied der Proportion und eines der gegebenen Glieder zum Gesuchten. Siehe ferner die Art. „Neunerprobe, Eilferprobe".

Problem, s. unter dem Art. „Aufgabe".

Problem von drei Körpern, s. d. Art. „Perturlationen".

Problem, ballistisches, s. u. „Ballistik".

Problem, beaunisches, ist folgendes: Die Gleichung für die krumme Linie *AM* zu finden, in welcher die Ordinate *PM* zu der Subtangente *PR* sich verhält wie eine gegebene gerade Linie zu dem Unterschied der Ordinate und Abscisse.

Fig. 923.

D. i. wenn die gerade Linie *AB* unter dem Winkel von 45° durch den Anfang der Abscissen *A* gezogen wird, welche *PM* in *Q* schneidet und die gegebene Linie *D* heifst, so soll sein

$$PM : PR = D : MQ.$$

Jacob Bernoulli hat diese Aufgabe allgemeiner gemacht, dafs er statt der geraden Linie *AB* irgend eine krumme Linie setzte.

Es sei *AMN* die gesuchte krumme Linie, die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Winkel *APM* ein rechter, die gegebene Linie $D = a$.

Es ist die Subtangente $PR = y\frac{\partial x}{\partial y}$,
also nach der Bedingung der Aufgabe
$$\partial y : \partial x = a : y - x$$
d. h. $$ad\,x = y\,\partial y - x\,\partial y.$$

In dieser Differenzialgleichung sind die veränderlichen Gröfsen nicht gesondert. Inzwischen hat man hier nicht nöthig, eine Substitution oder einen Multiplicator zu suchen. Man subtrahire auf beiden Seiten das Differenzial ady, so ist
$$a\,\partial x - a\,\partial y = y\,\partial y - x\,\partial y - a\,\partial y$$
oder $$\frac{a(\partial x - \partial y)}{a + x - y} = -\partial y$$
Da $$\int \frac{\partial u}{u} = ln\,\frac{u}{const.},$$
so ist $$logn\,\frac{a + x - y}{const.} = -\frac{y}{a}$$
und $$ln\,\frac{const.}{a + x - y} = +\frac{y}{a}$$

Soll die krumme Linie durch den Anfangspunkt der Abscissen gehen, so ist der Logarithmus = 0 wenn $y = 0$ und die zugehörige Zahl ist = 1, also $Const. = a$
und $$logn\,\frac{a}{a + x - y} = \frac{y}{a}.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie $AC = a$, ziehe CV unter dem Winkel von 45° oder $\# AB$, verlängere RM bis an CV in S, so ist $MS = a + x - y$. Es sei $MT \# CP$, so ist auch $MT = a + x - y$ und $CT = y\sqrt{2}$.

Man setze $TM = u$, $CT = z$,
so ist $$ln\,\frac{a}{u} = \frac{z}{a\sqrt{2}}.$$

Es ist also die krumme Linie eine logarithmische, deren Asymptote CV ist. Dafs die Coordinaten CT, TM einen Winkel von 45° machen, ist kein wesentlicher Unterschied von derjenigen, wo der Coordinatenwinkel ein rechter ist. Die berührende RM schneide die Asymptote in V. Ebenso wie bei rechtwinkligen Coordinaten ist $TV = -\frac{u\,\partial z}{\partial u}$. Aus der Gleichung zwischen u und z folgt $-\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{a\sqrt{2}}$, also ist $TV = a\sqrt{2}$ oder die Subtangente auf der Asymptote ist unveränderlich wie an der logarithmischen mit rechtwinkligen Ordinaten.

Dieses hat Descartes gefunden. Er läfst die krumme Linie durch die stetige Durchschneidung zweier geraden Linien beschreiben, deren eine sich $\#$ mit AB, die andere $\#$ mit AC von dem Punkt A an bewegt. Die Geschwindigkeit der ersteren läfst er gleichförmig sein, die Geschwindigkeit der anderen aber zunehmen nach dem umgekehrten Verhältnifs des auf AC noch rückständigen Weges für die mit AB parallele. In A sollen beide Geschwindigkeiten gleich grofs sein. Dieses ist ganz richtig. Die mit AB parallele sei in LM, die mit AC parallele in TM, ihr Durchschnitt M. Es sei $AL = t$ und $LM = CT = z$, so ist der senkrechte Abstand der TM von $AC = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Die Geschwindigkeiten der Linien LM, TM, jener nach der Richtung AL, dieser nach der Richtung PM verhalten sich wie $\partial t : \partial y$. Nun ist $t = a - u$, also $dt = -\partial u$ die Gleichung zwischen u und z gibt $-\frac{\partial u}{a - t} = \frac{\partial y}{a}$. Daher ist $\partial t : \partial y = a - t : a = 1 : \frac{a}{a - t}$.

In A, wo $t = 0$ ist, ist $\partial t : \partial y = 1 : \frac{a}{a - t}$.

Man kann auch, wie man hieraus sieht, TM sich gleichförmig und LM sich ungleichförmig bewegen lassen, sowie man die Logarithmen ursprünglich in arithmetischer Progression, die zugeordneten Zahlen in geometrischer sich vorstellt.

Product ist die Gröfse, welche aus der Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen entsteht. Wie ein Product numerischer Gröfsen gefunden wird, lehrt die gemeine Arithmetik, s. „Multiplication". Für allgemeine Gröfsen, als Zahlen betrachtet, zeigt es die Buchstabenrechnung, für Reihen insbesondere die Combinationslehre.

2. das Product $(1 - s^2)(1 - \frac{1}{4}s^2)(1 - \frac{1}{9}s^2)(1 - \frac{1}{16}s^2)$ u. s. w. ist $= \frac{sin\,\pi s}{\pi s}$ und
das Product $(1 - s^2)(1 - \frac{1}{9}s^2)(1 - \frac{1}{25}s^2)$ u. s. w. $= cos\,\frac{1}{2}\pi s$.
Denn es ist $sin\,\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 -$ u. s. w.
und $cos\,\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 + \ldots$

Die erste Reihe wird = 0, wenn $\varphi = 0$ oder φ ein Vielfaches von $\pm\pi$ wird, und die zweite Reihe wird = 0, wenn φ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ wird.

Setzt man daher für φ die Gröfsen πs und $\frac{1}{2}\pi s$, so haben die obige Reihen ihre Richtigkeit und Gültigkeit.

3. Das Prodnct $(1+z^2)(1+\frac{1}{4}z^2)(1+\frac{1}{9}z^2)\ldots = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2\pi z}$

und das Prodnct $(1+z^2)(1+\frac{1}{9}z^2)(1+\frac{1}{25}z^2)\ldots = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}\right)$

Denn es ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Daher ist $$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots \qquad (A)$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots \qquad (B)$$

Die Reihe A verwandelt sich, wenn $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt und alles dnrch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, in die Reihe für $\sin x$ nnd diese ist gleich dem Prodnct

$$x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots.$$

Productionsmaschine, s. den Art. „**Arbeitsmaschine**".

Progression, Reihe ist eine nach einem bestimmten Gesetz fortlanfende Reihenfolge von Zahlengröfsen. Es giht zweierlei P., **arithmethische** und **geometrische P.** Die ersteren sind in dem Art. **Arithmetische Reihe** ausführlich abgehandelt.

Die **geometrische Progression** ist eine Reihenfolge von Zahlengröfsen, in welcher jedes vorstehende Glied mit einer constanten Zahl multiplicirt wird, nm das unmittelhar daranf folgende Glied zu geben.

Eine Reihe ist nach beiden Richtungen endlos, sie ist nach einer Richtnng hin **steigend**, **wachsend**, nach der anderen hin **fallend**, **ahnehmend**.

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\ldots.$$

Die Zahl, mit welcher jedes voranstehende Glied multiplicirt wird, nm das nachfolgende Glied zu erhalten, heifst der Exponent; in dem vorstehenden Beispiel ist derselbe = 2.

Die allgemeine Form einer geometrischen Reihe ist

$$\frac{a}{e^2}\cdot\frac{a}{e}\cdot a\cdot ea\cdot e^2a\cdot e^3a\ldots. e^{n-1}a$$

wo bei a, dem ersten Gliede, $e^{n-1}a$ das $n$te Glied ist.

Um die Snmme der Glieder solcher Reihe zu erhalten, multiplicire die gegebene Reihe mit dem Exponent nnd schreibe sie darunter.

Also gegeben

$$a + ea + e^2a + e^3a + \ldots. + e^{n-1}a = S$$
$$ea + e^2a + e^3a + e^4a + \ldots. + e^n a = eS$$

Zieht man nun die obere von der nnteren ah, so hat man, da alle inneren Glieder mit einander sich aufheben

$$e^n a - a = eS - S$$

worans $$S = \frac{e^n a}{e-1}$$

Ist das erste Glied nnd irgend ein anderes P, ferner der Exponent e gegeben, so erhält man die Angabe des wie vielten Gliedes, welches P ansmacht, ans der Formel für S. Denn es ist

$S = \frac{P\cdot e}{e-1}$ bekannt. Setzt man nnn $P = e^x$, so hat man

$$x \log e = \log S + \log(e-1) - \log e$$

Es sei $P = 512$, $e = 2$, $a = 1$,

so ist $$S = 512 = \frac{2^x\cdot 1}{1}$$

nnd $$x \log 2 = \log 512$$

hieraus ist $$x = \frac{\log 512}{\log 2} = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = 9.$$

Pronische Zahl ist die Summe einer Zahl nnd ihres Qnadrats oder ihres Cubus oder ihres Biqnadrats, nämlich $a+a^2$ oder $a+a^3$ oder $a+a^4$.

Proportion. Dieser Gegenstand ist in diesem Wörterbnch nnter verschiedenen Artikeln ausführlich behandelt worden. S. die Art. „**Arithmetische P.**" nnd „**geometrische P.**"; „**continnirliche oder stetige P.**" s. u. dem Art. „**Continnirlich. Multipl. P.**" in dem Art. „**Aeqnivalent**"; ferner die Art. „**contrageometrische P.**"; „**fortlanfende oder geordnete P.**" in dem Art. „**Geometrische P.**" No. 3. Endlich

die Art. „Harmonische P. und contraharmonische P."

Der Uebelstand, dafs wenn die Proportionalität zweier Arten von Gröfsen für den Fall bewiesen ist, wo die Gröfsen jeder Art commensurabel sind, dafs es dann auch noch für den Fall, wo sie incommensurabel sind, geschehen mufs, veranlafst ein allgemeines Kennzeichen aufzusuchen, für welches zwei Gröfsen der einen Art mit zweien Gröfsen der anderen Art proportional sind, diese Gröfsen mögen commensurabel oder incommensurabel sein, wenn nämlich bei ihnen dieses Kennzeichen wahrzunehmen ist.

Zwei Gröfsen einer Art sind nämlich mit zweien Gröfsen einer andern Art proportional, wenn sie so zusammenhangen, dafs immer je zwei Gröfsen der einen Art dasselbe Verhältnifs haben, als die beiden ihnen einzeln angehörigen mit ihnen zusammenhangenden Gröfsen der anderen Art.

Das Kennzeichen der Proportionalität derselben ist nun das, dafs die Ganzen der einen Art auch zu den Ganzen der anderen Art gehören müssen. Man denke sich ein Dreieck afg, in diesem zwei mit fg parallele Linien bd und ce gezogen, so hangen die beiden von den Seiten abgeschnittenen Stücke ab, bc der einen mit denen ad, de der zweiten Seite so zusammen, dafs ad und de als Gerade der anderen Art proportional sind, wenn die Summen $ab + bc$ und $ad + de$. Da dies nun hier ist, so sind die genannten Geraden proportional. Zu erweisen ist nun allgemein der Lehrsatz.

Zwei Arten von Geraden sind proportional, wenn zu den Ganzen zweier Geraden der ersten Art immer auf das Ganze zweier jenen einzelnen angehörigen oder mit ihnen zusammenhangenden Gröfsen der anderen Art gehört; oder wenn zwei Gröfsen a, b von einer mit zwei Gröfsen A und B, jenen einzeln zugehörig, von anderer Art in solcher Beziehung stehen, dafs gleichwie zu den einzelnen Gröfsen a und b, respective die Gröfsen A und B stehen, auch zu dem Ganzen jener $= a + b$ immer das Ganze dieser Gröfsen $= A + B$ gehörig ist, so sind die Gröfsen a und b den Gröfsen A und B proportional und man hat $a : b = A : B$.

Beweis. Es sei $b = a$, so ist der Voraussetzung nach $B = A$, und es gehört dann zu $a + b = a + a = 2a$ die Gröfse $A + A = 2A$, d. h. das Ganze der einen Art eben so abhängig wie die Einzelnen der einen zu dem einzelnen der anderen Art. Es sei ferner $b = ma$, so ist $a + b = (m + 1)a$. Sind nun A und B Gröfsen anderer Klasse und stehen mit a und b in gleicher Beziehung und es findet zwischen $A + B$ dieselbe Beziehung zu $a + b$ statt, d. h. $A + B$ ist $= (m + 1)A$, so sind A, B und a, b proportional, denn aus $A + B = (m + 1)A$ folgt $B = mA$, also dasselbe Vielfache von A wie b von a ist. Also $a : b = A : B$.

Ist $b = \frac{m}{n} a$, also $b + a = \frac{m}{n} a + a$
$= \frac{n + m}{n} a$.

Ist nun $A + B$ auch $= \frac{n + m}{n} A$, so folgt $B = \frac{n}{n} A$, mithin $a : b = A : B$.

Folglich besteht die Proportionalität bei obiger Voraussetzung, wenn die Gröfsen commensurabel sind.

Sind die Gröfsen einerlei Art incommensurabel, d. h. $b \begin{matrix} > \frac{m}{n} a \\ < \frac{m + 1}{n} a \end{matrix}$ also

$$b + a \begin{cases} > \frac{n + m}{n} a \\ < \frac{n + m + 1}{n} a \end{cases}$$

und es ist $B + a$ ebenfalls $\begin{matrix} > \frac{m + n}{n} A \\ < \frac{n + m + 1}{n} A \end{matrix}$ so folgt aus letzterem $B \begin{matrix} > \frac{m}{n} a \\ < \frac{m + 1}{n} a \end{matrix}$, d. h. es sind in dem Verhältnifs $a : b = A : B$ die Hinterglieder immer zwischen denselben Vielfachen ihrer Vorderglieder begriffen, sie haben also gleich irrationale Verhältnifsnamen, sind mithin einander gleich und man hat daher auch in diesem Falle $a : b = A : B$.

Proportionale, mittlere, zwischen zwei Zahlen. Die mittlere arithmetische ist die halbe Summe beider Zahlen, die mittlere geometrische ist die Quadratwurzel aus deren Product.

Proportionale Spirale, s. v. w. „logarithmische Spirale".

Proportionalität, der Bestand zweier Zahlen in irgend einer der gedachten Proportionen.

Proportionalzirkel, ein aus zwei wie die Schenkel eines Zirkels drehbar um einander verbundene Lineale. Auf diesen Linealen sind gerade Linien aus dem Mittelpunkt der Bewegung getragen, die nach verschiedenen Verhältnissen eingetheilt sind; paarweise, auf jedem Lineal eine. Jede dieser getheilten Linien ist ein Maafsstab, welcher die Stelle einer Tabelle vertritt, indem die beigesetzten Zahlen gewisse zu den Längen der Linien gehörige Gröfsen bedenten. Dazu kommen oft noch Linien an dem äufseren Rande parallel mit denselben. Diese dienen schlechthin als Maafsstäbe.

1. Die arithmetische Linie ist eine in gleiche Theile eingetheilte Linie, worauf die beigesetzten Zahlen die Längen von dem Mittelpunkt der Bewegung oder Theilung angeben.

2. Die geometrische Linie gibt durch die Zahlen der Eintheilung die Quadrate der Längen an, wo das Quadrat der Länge 1 zur Einheit dient. Die Längen verhalten sich wie die Quadratwurzeln der beigezeichneten Zahlen.

3. Die cubische Linie gibt durch die Zahlen der Eintheilung die Würfel der Längen an, so dafs die Längen selbst sich wie die Kubikwurzeln der Zahlen verhalten.

4. Die Linien der Seiten regulärer Vielecke zeigt für die beigesetzte Zahl der Seiten die verhältnifsmäfsige Länge derselben, so dafs jede dieser Längen auf dem Kreise, dessen Halbmesser der Seite des Sechsecks gleich ist, sich so oft herumtragen läfst als die Anzahl der Seiten angibt. Die Seite des Sechsecks sei $= r$, die Anzahl der Seiten eines Vielecks $= n$, so ist die Seite $= 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Auf dem Proportionalzirkel, wie ihn Galilei angegeben hat, sind die Zahlen der Vielecke in umgekehrter Ordnung gesetzt. Die Länge zu der Zahl 6 ist nun die Seite und die Länge zu einer anderen Zahl, z. B. 10, ist der Halbmesser zu dem Zehneck oder Vieleck.

5. Die Linie der Chorden der Polygonwinkel zeigt die Verhältnisse der Chorden von den Nebenwinkeln der Centriwinkel an. Diese sind $= 2r \cos \frac{180^\circ}{n}$. Die Linie ist entbehrlich.

6. Die tetragonische Linie zeigt für die beigesetzte Zahl der Seiten regulärer Vielecke, welche gleichen Inhalt haben, die verhältnifsmäfsige Länge der Seiten. Der gegebene Inhalt sei a^2, die Seite $= v$, so ist $v^2 = \frac{4a^2}{n} \, tg \, \frac{180^\circ}{n}$, z. B. wenn die Seite des Dreiecks 10000 Theile erhält, so ist die Seite des eben so grofsen Vierecks = 6580, des eben so grofsen Fünfecks 5017 u. s. w.

7. Die Linie für die Eintragung der regulären Körper in eine Kugel zeigt die verhältnifsmäfsige Länge des Durchmessers einer Kugel und der Seiten der einzutragenden Körper.

8. Die Linien für die Verwandlung der regulären Körper zeigt die verhältnifsmäfsige Länge der Seiten bei gleichem Inhalt, zugleich mit dem Durchmesser einer gleich grofsen Kugel.

9. Die Linie der Chorden gibt die Länge der Chorden zu den beigesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobei die Länge zu 60° der Halbmesser ist. Diese Linie dient zugleich als Linie der Sinus für die halben Bogen.

10. Die Linie der Tangenten gibt die Länge der Tangenten zu den beigesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobei die Tangente von 45° der Halbmesser des Kreises ist. Um Verwirrung in der Eintheilung für die kleinen Bogen zu vermeiden, wird diese Linie an der äufseren Seite der beiden Schenkel gezeichnet, so dafs, wenn beide gerade ausgestreckt werden, sie zusammen die vollständige Linie der Tangenten bis zu der Tangente 2 oder dem doppelten Halbmesser ($= tg \, 63° \, 26' \ldots$) ausmachen.

11. Die Linie zur Eintheilung einer geraden Linie dient, eine gerade Linie in 2 bis 12 gleiche Theile zu theilen; ferner die Eintheilung nach dem äufseren und mittleren Verhältnisse zu machen; auch zu dem Durchmesser eines Kreises den Umfang oder umgekehrt zu finden. Sie ist entbehrlich.

12. Die Fortificationslinie enthält die verhältnifsmäfsigen Längen der Halbmesser regulärer Vielecke für eine gegebene Länge der Seite, auch noch die zugehörigen Längen der Flanke, der Kehllinie und der Kapitallinie, die aber nach alten Systemen genommen zu werden pflegen. Diese Linie mag füglich wegbleiben, da auch die Maafse an den Bastionen keine bestimmten Verhältnisse haben können.

13. Die metallische Linie enthält die Durchmesser gleich schwerer Kugeln, also überhaupt die ähnlich liegenden Seiten gleich schwerer ähnlicher Körper von verschiedenen Metallen.

14. Man findet auch noch auf den Proportionalzirkeln einen **Kaliberstab** für Geschütz und Kugeln an der äufseren Seite gezeichnet, bei dessen Gebrauch das Instrument ganz geöffnet wird, dafs es ein gerader Maafsstab wird.

15. Lombert hat dem Proportionalzirkel eine besondere Einrichtung **zu perspectivischen Zeichnungen** gegeben. Auf der einen Seite sind fünf Paar Linien gezogen, an welchen die Längen sich umgekehrt wie die Eintheilungszahlen verhalten, um dadurch den perspectivischen Abstand eines Punktes von der Horizontallinie zu finden. Auf der anderen Seite sind die Linien der Sinus, Tangenten und Secanten gezeichnet nebst einer elliptischen Linie, durch deren Hülfe die Ordinaten einer Ellipse für angenommene Ellipsen gefunden werden.

16. Jacob Bernoulli hat einen Proportionalzirkel für Schifffahrer angegeben. Aus dem Rhumb (der Richtung des Schiffes) und der Veränderung der Breite wird dadurch die Veränderung der Länge gefunden.

17. Die Engländer haben viel weniger Doppellinien an ihren Sectoren oder Proportionalzirkeln, aber mehr einzelne an den äufseren Seiten als Maafsstäbe, von jenen, nach Hutton nur die arithmetische, diejenige der Chorden, Sinus, Secanten, Tangenten bis 45° und nach einem kleineren Maafsstabe über 45° nebst der Linie der Polygone. Als Maafsstäbe einfach, einer in Zolle und kleinere Theile getheilten, ferner für Chorden, Sinus, Tangenten, einige zur Schifffahrt dienende und einige logarithmische Maafsstäbe.

18. Der Proportionalzirkel ist ein nützliches Instrument für Personen, die im Rechnen und in geometrischen Constructionen ungeübt sind. Es ist aber kostbar, besonders wenn es vollständig sein soll. Auch mufs es eine ziemliche Länge haben, wenn man eine gewisse Genauigkeit erhalten will. Mäfsig geübte können es füglich entbehren.

19. Der Gebrauch beruhet auf der Lehre von den ähnlichen Dreiecken: In dem $\triangle ABC$ sei $DE \mp BC$, so sind die Dreiecke ABC, ADE ähnlich und es ist $AB : AD = BC : DE$. Dadurch werden die Glieder eines gegebenen Verhältnisses $AB : AD$ in diejenigen eines diesem gleichen $BC : DE$ verwandelt, von welchen eines BC oder DE gegeben wird. Auf dem Proportionalzirkel nimmt man auf zwei gleichbenannten Linien AB, AB die gleichen Längen AC, AC und AD, AD, so sind CC, DD parallel bei jeder Eröffnung des Instruments. Oeffnet man dasselbe so weit, dafs man mit einem Handzirkel zwischen zwei gleichnamigen Punkten C, C eine gegebene Linie fafst, so erhält man zwischen zwei anderen gleichnamigen Punkten D, D (die auch auf der anderen Seite von C, C liegen mögen) eine Linie DD, die zu CC das Verhältnifs $AD : AC$ hat, und die Linien CC, DD haben auf die bei C, D gesetzten Zahlen eben die Beziehungen, wie AC und AD gegen sie haben.

Fig. 924.

Z. B. CC und CD sollen die ähnlich liegenden Seiten zweier ähnlicher Figuren sein, deren Flächen sich wie $3 : 2$ verhalten, so nimmt man auf der geometrischen Linie beider Schenkel zwei Punkte C, D, deren Zahlen wie $3 : 2$ sind, daher eben so die ähnlichen über CC und DD gezeichneten Figuren. Ist die eine gegeben, so hat man gleich durch das Instrument die andere.

Man wolle die Seite eines Fünfecks haben, dessen Halbmesser gegeben wird. Auf der Linie der Polygone nehme man zwischen den Punkten 6, 6 die Weite DD dem Halbmesser gleich, und dann die Weite CC zwischen den Punkten 5, 5, so ist CC die gesuchte Seite des Fünfecks. Ist die Seite des Vielecks gegeben, so fafst man diese zwischen den zugehörigen Zahlen und das Intervall 6, 6 ist der Halbmesser zu demselben.

20. Der Proportionalzirkel hat anfangs noch eine andere Gestalt gehabt als die jetzt gewöhnliche hier beschriebene, nämlich die eines Doppelzirkels mit einem verschiebbaren Gewinde, welches nach den bezifferten Abtheilungen auf den Schenkeln gestellt und befestigt wird. Dieser Zirkel bildet zwei Vertikalwinkel, an welchen die Abstände der Spitzen sich wie die Längen der gleichen Schenkel verhalten. Speckle in seiner Architec-

tura von Festungen, welche zum erstenmale 1589 herausgekommen ist, erwähnt gleich im Anfange eines solchen Zirkels zum Verjüngen, zugleich eines anderen zu diesem Zwecke ganz in der Form unseres Proportionalzirkels. „Andere", sagt er, „haben einen breiten Zirkel gemacht, mit einem unbeweglichen Centro, da sie dann auf beiden Linien in der Mitte der gespaltenen Linien die Theilungen der Verjüngungen gemacht, und so weit man ihn allewege aufthut, ist allewege die Verjüngung von einem bis in die 20 Theile gestanden und hat man solche Theilung mit einem andern Zirkel nehmen und suchen müssen." Er habe, fährt er fort, „diese und andere Zirkel im Gebrauch nicht genau genug gefunden, sondern habe sich andere machen lassen," die völlig so beschaffen sind, wie die noch jetzt üblichen Doppelzirkel mit entgegengesetzten Schenkeln und festem Gewinde. Er hat deren mehrere mit verschiedenen Verhältnissen der Länge der Schenkel abgebildet. Für alle diese Instrumente gebraucht er die Benennung Proportionalzirkel.

21. **Aus dem Doppelzirkel** mit beweglichem Gewinde ist vermuthlich der Proportionalzirkel des Jobst Burgi oder Justus Byrgius entstanden, den Levin Hulsius in seinem dritten Tractat der mechanischen Instrumente (Frankfurt 1604) beschreibt. Es sind auf den Schenkeln mehrerlei Abtheilungen, sechs Arten angebracht, um nicht bloſs Linien, sondern auch Flächen und Körper zu verjüngen oder zu vergröſsern und noch einige Verhältnisse anzugeben. Man faſst mit diesem Zirkel die eine Linie zwischen dem einen Paar Schenkeln und erhält zwischen den Spitzen des anderen Paars die dazu gehörige Linie.

22. Clavius beschreibt in seiner Geometria practica, die zuerst zu Rom 1604 herausgekommen ist, einen Proportionalzirkel nach der gegenwärtigen Form. Dieser hat auf der einen Fläche nur die arithmetische Linie, auf der anderen die Linie der Chorden. Clavius schlägt den Namen Instrumentum partium vor. Er sagt nicht, daſs er ein neues Instrument angäbe.

23. Galiläi machte seinen Proportionalzirkel im J. 1606 bekannt, in einer sehr selten gewordenen Schrift. Die Einrichtung ist ganz wie an den jetzt gewöhnlichen Instrumenten. Die darauf gezogenen Linien sind die arithmetische, geometrische, stereometrische, metallische, polygraphische (für regelmäſsige Vielecke) die tetragonica und eine adjuncta, mittelst welcher Kreisabschnitte und Mongleich de quadrirt werden können. Mathias Bernegger hat die Schrift ins Lateinische übersetzt und mit einem Comentar versehen, welcher wieder ins Italienische übersetzt ist, wie er es sehr verdiente. Er fügte noch die Linie der Chorden und zwei Linien für die regulären Körper bei. Ein Mailänder Balthasar Capra eignete sich in einer Schrift die Erfindung dieses Instruments zu, worüber Galiläi mehr als es die Sache verdiente und er es nöthig hatte, sehr aufgebracht wurde, sogar daſs ohne Zweifel auf seine Veranlassung alle vorräthigen Exemplare der Schrift des Capra confiscirt wurden. Er bestätigte durch Zeugnisse, daſs er den Proportionalzirkel vor 10 Jahren (um 1597) erfunden habe, und daſs seit der Zeit wohl auf 100 Stück in Padua wären gefertigt worden. Einem Manne wie Galiläi mag man dieses, und wenn die Sache viel wichtiger wäre, auf sein Wort glauben. Vielleicht hat Capra ihn blos necken wollen, auf Anstiften der Neider und Widersacher des Galiläi.

24. Die Form des Galiläi'schen Proportionalzirkels ist also nicht neu, wohl aber der Gebrauch. Denn die ältere diente nur zur einfachen Verjüngung oder Vergröſserung der Linien, da sie bloſs die arithmetische Linie enthielt. Die galiläische Einrichtung dient zu mancherlei geometrischen Constructionen und mag selbst zu Rechnungen bisweilen angewandt werden. In Absicht auf die Bekanntmachung durch den Druck ist, nach der von Speckle geschehenen Erwähnung zweier Verjüngungs-Instrumente, das Byrgius-Instrument das ältere, denn die Zueignung des Werkes von Hulsius vom 20. Mai 1603 und die der Gallileischen Schrift vom 10. Juli 1606.

25. Hulton erzählt in seinem Wörterbuch die Geschichte des Proportionalzirkels folgendermaſsen. Man schreibt, sagt er, die Erfindung dem Guido Baldo oder Ubaldo um das Jahr 1568 zu. Die erste gedruckte Nachricht davon gibt Caspar Mordente zu Antwerpen im Jahr 1584, welcher erzählt, daſs sein Bruder Fabricius Mordente in dem Jahr 1554 das Instrument erfunden habe. Darauf hat Daniel Speckle zu Straſsburg im Jahre 1589 es beschrieben, nach ihm Thomas Hood in London 1598, worauf sehr viele Schriftsteller über die Geometrie davon gehandelt haben.

Es ist hier ein Miſsverstand in den Benennungen vorhanden, aus dem, was

ich aus des Speckle Werk angeführt habe, sieht man, dafs die ältere Einrichtung in Doppelzirkel, vermuthlich mit beweglichem Gewinde gewesen ist. Es wäre unbegreiflich, wie in dem Streite zwischen Galiläi und Capra diese früheren Ansprüche auf die Erfindung des Proportionalzirkels nicht in Anregung gekommen sind.

26. Ueber den Proportionalzirkel sind viele Schriften erschienen. Ein Verzeichnifs findet man in Scheibel's neuer Ausgabe von Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, Breslau 1781 in Leupold Theatro..., wo auch die Byrgische Einrichtung abgebildet und beschrieben ist, und in Kästners Geschichte der Mathematik.

Pseudomorphosen, (Kryst.) s. v. w. „Afterkrystalle“.

Ptolemäischer Satz. In einem Viereck im Kreise ist die Summe der Producte je zweier gegenüberliegender Seiten gleich dem Product der beiden Diagonalen.

Also $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Fig. 925.

Denn zieht man die Linie AE
so dafs $\angle BAE = \angle CAD$
so ist, da $\angle ABE = \angle ACD$

$\triangle BAE \sim \triangle CAD$

Nun ist $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE$
also auch $= \angle CAD + \angle CAE$
$= \angle DAE$.

Ferner ist $\angle ACB = \angle ADB = \angle ADE$
Hieraus hat man
$\angle ABC = \angle AED$
folglich $\triangle ABC \sim \triangle AED$
daher $AB : BE = AC : CD$
auch $AC : BC = AD : ED$
oder $AB \times CD = BE \times AC$
$AD \times BC = ED \times AC$
hieraus durch Additon

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times (BE + DE) = AC \times BD.$$

Punkt ist nach Euklid, was keine Theile hat; der Punkt kann nur Wahrnehmung durch die Sinne nicht dargestellt werden. In der Geometrie hat man für Kreise Mittelpunkte, die Grenzen von Linien, die Orte, wo Linien sich schneiden, Durchschnittspunkte, bei Tangenten Berührungspunkte. Punkte sind die Spitzen von Winkeln und Ecken. In der Statik hat man Angriffspunkte der Kraft, Momentenpunkte, Schwerpunkte, todte Punkte (s. „Nebenlast“) u. s. w.

Punkt der mittleren Entfernung.

1. Der Punkt der mittleren Entfernungen oder der Mittelpunkt der Entfernungen eines Vielecks ist der Punkt in der Ebene desselben, welcher die Eigenschaft besitzt, dafs seine Entfernung von jeder in der Ebene des Vielecks willkührlich angenommenen geraden Linie oder Axe das arithmetische Mittel der Entfernungen positiv oder negativ genommen wird, je nachdem sie auf der einen oder der anderen Seite der Axe liegen. Auch auf Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, selbst auf willkührliche Punkte im Raum läfst sich dieser Begriff erweitern, wenn nur willkührliche Ebenen im Raum als Axen angenommen werden. Die nöthige Kürze gebietet jedoch, die Untersuchung auf Vielecke in einer Ebene zu beschränken, um so mehr, da sie sich leicht auf den Raum überhaupt auch ausdehnen lassen wird, wenn sie für den specielleren Fall richtig aufgefafst worden.

Carnot hat den Punkt der mittleren Entfernungen in die Geometrie eingeführt und in seiner Géométrie de position viele merkwürdige Eigenschaften desselben bewiesen. Uebrigens lehrt die Mechanik, dafs dieser Punkt mit dem Schwerpunkt mehrerer gleichen Massen in den Spitzen des Vielecks einerlei ist.

2. Zuvörderst ist zu zeigen, dafs es für jedes Vieleck einen Punkt der mittleren Entfernungen gibt. Nimmt man nämlich willkührlich zwei auf einander senkrechte Axen an und bezeichnet die Coordinaten der Spitzen des Vielecks durch

$x_1;\ y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3$ u. s. w.

so ist, wenn die Seitenzahl $= n$ ist, der Punkt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

sind, der Punkt der mittleren Entfernungen. Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, dafs diese Gleichungen oder wenigstens die Ordinatengleichung für jede zwei andere Axen eben so stattfinden. Sind diese Axen zuerst den primitiven parallel, die Coordinaten ihres Durchschnittspunkts in Bezug auf die primitiven Axen a, b, so ist, wenn die neuen Coordinaten durch Indices von den primitiven unterschieden werden offenbar

$$x' = x - a,\ x_1' = x_1 - a;\ x'_2 = x_2 - a \dots$$
$$y' = y - b,\ y_1' = y_1 - b;\ y'_2 = y_2 - b \dots$$

wenn nur a, b immer mit den gehörigen Zeichen genommen werden. Nach der Voraussetzung ist aber

$$x - a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 \dots) - a$$
$$y - b = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) - b$$
$$x - a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots - na)$$
$$y - b = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots - nb)$$
$$x - a = \frac{1}{n}[(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \dots]$$
$$y - b = \frac{1}{n}[(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \dots]$$
$$x' = \frac{1}{n}(x_1' + x'_2 + x'_3 + \dots)$$
$$y' = \frac{1}{n}(y_1' + y'_2 + y'_3 + \dots)$$

so dafs unsere Gleichungen auch für das neue, dem primitiven parallele System gelten. Auch sind sie für jede zwei neue auf den primitiven senkrechte Axen richtig, weil man offenbar x und y vertauschen kann. Ist nun aber irgend ein anderes System gegeben, so kann man sich, weil unsere Gleichungen für alle parallelen Systeme gelten, wenn sie für eins gelten, dessen Axen durch den Anfang des primitiven Systems gehend denken. Auch lassen sich, wie sogleich in die Augen fällt, diese beiden Systeme in immer paralleler Lage jederzeit so weit fortrücken, dafs das gegebene Vieleck ganz zwischen die Schenkel des Winkels $\alpha'Ay$ und man also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, nur die beiden in der Figur dargestellten Fälle je nachdem der $\angle \alpha <$ oder $> 90°$ ist, zu betrachten braucht.

P ist irgend eine Spitze des gegebenen Vielecks. In Fig. 926, a ist $AB = x$, $PB = y$, $AB' = x'$, $PB' = y'$, $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$ d. i.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

Fig 926

In Fig. 926, b dagegen ist $AB = -x$, $PB = y$, $AB' = x'$, $PB' = -y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$ d. i.

$$-x = x' \cos(180° - \alpha) - (-y') \cos(\alpha - 90°)$$
$$y = x' \sin(180° - \alpha) + (-y') \sin(\alpha - 90°)$$

welche Gleichungen sich leicht ganz auf dieselbe Form wie die obigen bringen lassen. Mittelst Elimination erhält man leicht aus ihnen

$$x' = y \sin\alpha + x \cos\alpha;\ y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$y \sin\alpha = \frac{1}{n}(y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha + y_3 \sin\alpha + \dots)$$
$$x \cos\alpha = \frac{1}{n}(x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 \cos\alpha + \dots)$$
$$y \cos\alpha = \frac{1}{n}(y_1 \cos\alpha + y_2 \cos\alpha + y_3 \cos\alpha + \dots)$$
$$x \sin\alpha = \frac{1}{n}(a_1 \sin\alpha + x_2 \sin\alpha + x_3 \sin\alpha + \dots)$$
$$y \sin\alpha + x \cos\alpha = \frac{1}{n}[(y_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha) + (y_2 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) + \dots]$$
$$y \cos\alpha + x \sin\alpha = \frac{1}{n}[(y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha) + (y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha) + \dots]$$

d. i. nach dem so eben bewiesenen

$$x' = \frac{1}{n}(x_1' + x'_2 + x'_3 + \ldots)$$

$$y' = \frac{1}{n}(y_1' + y'_2 + y'_3 + \ldots)$$

die beiden Ausdrücke für x, y gelten also für jedes System, und der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt ist also der Punkt der mittleren Entfernung des Vielecks.

3. Legt man durch den Punkt der mittleren Entfernung irgend eine gerade Linie als Axe der y; so ist $y = 0$ und folglich an

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$$

d. h. die Summe der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von jeder durch den Punkt der mittleren Entfernungen gehende gerade Linie = 0. Eine solche Linie heifst eine **Axe der mittleren Entfernungen**, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$$

ist, durch **einen** Punkt, nämlich durch den Punkt der mittleren Entfernungen. Denn man erhält denselben durch die Coordinaten

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

Ist nun $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$, so ist auch $y = 0$, und der Punkt der mittleren Entfernungen mufs also in **der** Axe liegen, auf welcher die y senkrecht sind, d. i. in der gegebenen.

4. Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung erhellt augenblicklich, dafs im Dreieck für jede von einer Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogene gerade Linie als Axe

$$y_1 + y_2 + \ldots = 0 \text{ ist.}$$

Daher sind diese drei geraden Linien Axen der mittleren Entfernungen und schneiden sich in **einem** Punkt, nämlich in dem Punkt der mittleren Entfernungen des Dreiecks.

Eben so leicht erhellt, dafs der Punkt der mittleren Entfernungen eines Parallelogramms der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen ist.

5. Zieht man von dem Punkt der mittleren Entfernungen nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien s_1; s_2; s_3 … und bezeichnet die Winkel, welche diese Linien mit irgend einer durch den Punkt der mittleren Entfernungen gezogenen geraden Linie, die man als Axe, den Punkt der mittleren Entfernungen als Anfang der x annehmen mag, einschliefsen, diese Winkel immer nach **einer** Seite hin, von 0 bis 360° gezählt, durch α_1; α_2; α_3 … so ist:

$$x_1 = s_1 \cos\alpha_1;\ x_2 = s_2 \cos\alpha_2;\ x_3 = s_3 \cos\alpha_3$$

$$y_1 = s_1 \sin\alpha_1,\ y_2 = s_2 \sin\alpha_2;\ y_3 = s_3 \sin\alpha_3$$

folglich da hier $x = y = 0$ ist

$$0 = \frac{1}{n}(s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_3 + \ldots)$$

$$0 = \frac{1}{n}(s_1 \sin\alpha_1 + s_2 \sin\alpha_2 + s_3 \sin\alpha_3 + \ldots)$$

und demnach, wie auch die Transversale durch den Punkt der mittleren Entfernungen gelegt sein mag

$$0 = s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + s_3 \cos\alpha_2 + \ldots.$$

$$0 = s_1 \sin\alpha_1 + s_2 \sin\alpha_2 + s_3 \sin\alpha_2 + \ldots.$$

6. Zieht man nun von irgend einem anderen Punkt in der vorher durch den Punkt der mittleren Entfernungen willkührlich gelegten Axe nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien s_1'; s'_2; s'_3 … und bezeichnet die Entfernung des angenommenen Punktes vom Punkte der mittleren Entfernungen durch a, so bilden a; s_1; s_1'; a_1; s_2; s'_2 … Dreiecke, auf deren Grundlinie a die Perpendikel y_1; y_2; y_3 … von ihren Spitzen gefällt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a und des x gehörig Rücksicht, so folgt aus den Elementen und No. 5 sogleich, dafs immer

$$s'^2_1 = s_1^2 + a^2 - 2ax_1 = s_1^2 + a^2 - 2as_1 \cos\alpha_1$$

$$s'^2_2 = s_2^2 + a^2 - 2ax_2 = s_2^2 + a^2 - 2as_2 \cos\alpha_2$$

$$s'^2_3 = s_3^2 + a^2 - 2ax_3 = s_3^2 + a^2 - 2as_3 \cos\alpha_3$$

u. s. w.

folglich durch Addition

$$s_1^2 + s'^2_2 + s'^2_2 + \ldots = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + na^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punkts in der Ebene eines $n$ecks von dessen n Winkelspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittleren Entfernungen von den n Winkelspitzen nebst dem $n$fachen Quadrat der Entfernung des ersten Punkts von dem Punkt der mittleren Entfernungen gleich. Mittelst No. 4 ergeben sich hieraus leicht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Parallelogramm.

7. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, dafs die Entfernungen des Punkts der mittleren Entfernungen von des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratsumme geben.

8. Beschreibt man aus dem Punkt der mittleren Entfernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis, so ist für jeden Punkt der Peripherie dieses Krei-

ses die Snmme der Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Gröfse nämlich

$$= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + nr^2$$

9. Setzt man letztere Gröfse $= 9^2$, so erhält man

$$r = \sqrt{\frac{1}{n}(9^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 + \ldots)}$$

Die Peripherie des ans dem Pnnkt der mittleren Entfernnngen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also der geometrische Ort der Pnnkte, für welche dia Snmme der Qnadrate der Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Gröfse, nämlich $= 9^2$ ist, wie schen Appolonins beweist. Appolonins ebene Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übersetzt von Camerer. Ein ähnlicher Sata läfst sich anf ganz analoge Art ven der Kugel beweisen. Man sehe Klügel's Lehrbnch der Statik.

10. Von jeder der n Spitzen aiehe man jetzt an alie diesa n Spitzen gerade Linien $s_1'; s_2'; s_3' + \ldots; s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \ldots; s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \ldots; s_1^n; s_2^n; s_3^n + \ldots,$ beseichne die von dem Pnnkt der mittleren Entfernnngen an die n Spitzen gesogenen geraden Linien dnrch $a'; a^2; a^3; \ldots$ und setze

$$(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + \ldots \quad = S$$

so ist nach No. 6

$$(s_1')^2 + (s_2')^2 + (s_3')^2 + \ldots = S + n(a^1)^2$$
$$(s_1^2)^2 + (s_2^2)^2 + (s_3^2)^2 + \ldots = S + n(a^2)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(s_1^n)^2 + (s_2^n)^2 + (s_3^n)^2 + \ldots = S + n(a^n)^2$$

Es ist sber offenbar $s_1' = s_2^2 = s_3^3 = \ldots = 0$ und allgemein $s^k_m = s^m_k$. Folglich ist das Aggregat aller Grëfsen anf der linken Seite die doppelte Summe der Quadrate aller dle n Spitzen des Vielecks zu zweien mit ainander verbindenden geraden Linien. Bezeichnet msn nnn diese doppelte Summe durch 2Σ, so erhält man durch beiderseitige Addition leicht $2\Sigma = 2nS$, $\Sigma = nS$, so dsfs also die Snmme der Quadrate aller dia Spitzen des Vielecks au zweien mit einander verbindenden Linien der $n$fachen Summe der Qnadrate der von dem Pnnkt der mittleren Entfernung sn die Spitzen gesogenen geraden Linien gleich ist. Im Dreieck ist also die Snmme der Qnadrate der drei Seiten dar dreifachen Summe der Qnadrate der drei geraden Linien gleich, welche von dem gemeinschaftlichan Dnrchschnittspnnkt der die Spitzen mit den Mitten der Gegenseiten verbindender geraden Linien nach den Spitzan des Dreiecks gezogen warden (s. No. 4).

11. Im Parallelogramm $ABCD$ ist nsch No. 4 nnd 9

Fig. 927

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2$$
$$= 4(AE^2 + BF^2 + CE^2 + DE^2)$$
$$= 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2),$$
$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2,$$

die Summe der Qnadrate der vier Seiten gleich der Snmme der Quadrate der beiden Diagonalen.

12. Ist Σ die Summe der Qnadrate der Entfernnngen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen und K der Punkt der mittleren Entfernungen, so ist wenn S, Σ ihre voriga Bedentnng behalten

$$\Sigma = nS \text{ (No. 8)}; \quad \Sigma = S + n\,AK^2 \text{ (6)}$$

worans dnrch Elimlnation von

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma - \Sigma)}$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitse von dem Punkt der mittleren Entfernungen berechnet werden kann.

13. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwsi verbindendsn geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittlersn Entfernungen. Die Coordinsten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1),\ \tfrac{1}{2}(x_3 + x) + \ldots;$$
$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_3),\ \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3),\ \tfrac{1}{2}(x_3 + x_3) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_n),\ \tfrac{1}{2}(x_2 + x_n),\ \tfrac{1}{2}(x_3 + x_n) + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),\ \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1),\ \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_n),\ \tfrac{1}{2}(y_2 + y_n),\ \tfrac{1}{2}(y_3 + y_n) + \ldots$$

wobsi wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, se dafs jeds Coordlnste in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$mal vorkemmt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittslpnnkte sind also

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$
$$\tfrac{1}{2}(n-1)(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

nnd folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinie, also eben so viele Mittelpunkte derselben gibt, wenn die Coordinaten des Punkts der mittleren Entfernnngen dieser Mittelpunkte durch (x), (y) bezeichnet werden

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$(y) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

oder

$$(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$(y) = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

d. i. $(x) = x$, $(y) = y$ (2), folglich der Punkt der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte aller Verbindnngslinien derselben.

Sind (x), (y) die Coordinaten des Punkts der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines $n$ecks, so ist

$$(x) = \frac{1}{n}\left[\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3) + \ldots + \tfrac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) + \tfrac{1}{2}(x_n + x_1)\right]$$

$$= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n)$$

d. i. $(x) = x$ und ebenso $(y) = y$. Also ist anch der Pnnkt der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines $n$ecks mit dem Punkte der mittleren Entfernung der Spitzen einerlei, und man findet demnach z. B. den Punkt der mittleren Entfernnngen irgend eines Vierecks, wenn man die Mittelpunkte seiner Gegenseiten verbindet, da diese Mittelpunkte die Spitzen eines Parallelogramms sind.

14. Sind A_1, A_2 irgend zwei Spitzen des Vielecks, K der Punkt der mittleren Entfernungen, K'_2 der Mittelpunkt von A_1, A_2, so erhellt, wenn man sich das Dreieck KA_1A_2 denkt, leicht, dafs $A_1K^2 + A_2K^2 = 2A_1K_2^2 + 2K'K_2^2 = \frac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K'K_2^2$ ist. Denkt man sich von A_1 nach allen den übrigen $n-1$ Spitzen gerade Linien gezogen

$$A_1K^2 + A_2K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K'K_2^2$$

$$A_1K^2 + A_3K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_3^2 + 2K'K_3^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_1K^2 + A_nK^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_n^2 + 2KK_n^2$$

$$(n-1)A_1K^2 + A_2k^2 + A_3K^2 + \ldots A_nK^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2)$$

$$+ 2(K'K_2^2 + K'K_3^2 + \ldots + K'K_n)^2$$

$$= (n-2)A_1K^2 + S,$$

wenn S die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punkts der mittleren Entfernnngen von den n Spitzen bezeichnet. Denkt man sich nun für jede der n Spitzen eine ähnliche Gleichung entwickelt, setzt die Summe der Quadrate aller die n Spitzen zu zweien verbindenden Linien $= \Sigma$, die Summe der Quadrate der Entfernnngen der Mittelpunkte derselben vom Pnnkt der mittleren Entfernungen aber $= S'$, so erhält man durch Addition aller Gleichungen, da offenbar jede Verbindungslinie, also auch jede Entfernnug eines Mittelpunkts vom Punkte der mittleren Entfernungen zweimal vorkommt, leicht

$$\tfrac{1}{2}2\Sigma + 2 \cdot 2S' = (n-2)S + nS$$

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'$$

Aber $\Sigma = nS$ (10). Also dnrch Substitution $(n-2)S = 4S'$;

$S' = \frac{1}{4}(n-2)S$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpnnkte aller die n Spitzen des Vielecks verbindenden geraden Linien vom Pnnkt der mittleren Entfernnngen der Spitzen von jenem Pnnkte gleich.

15. Die Anzahl der Mittelpunkte der verbindenden Linien ist $= \frac{1}{n}(n-1)$. Setzen wir nnn die Summe der Qnadrate aller diese Mittelpnnkte verbindenden Linien $= \Sigma$, so ist $\Sigma = \frac{1}{2}n(n=1)S'$ (10) die drei Gleichungen

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'$$

$$\Sigma = nS,\ \Sigma = \tfrac{1}{2}n(n-1)S'$$

dienen zur Bestimmnng der vier Gröfsen S, Σ, S', Σ dnrch einander. So erhält man z. B.

$$(n-1)(n-2)\Sigma = 8\Sigma'$$

$$n(n-1)(n-2)S = 8\Sigma \text{ n. s. w.,}$$

woraus sich wieder merkwürdige Sätze ergeben würden.

16. In jedem Viereck $ABCD$, welches bei B und C rechtwinklig ist, ist, wenn wir den Winkel $BAC = A$ setzen, immer

$$ABCD - 2\triangle ABC = -\tfrac{1}{4}AD^2 \sin 2A.$$

Sei $AB = b$, $AC = c$, so ist

$$AD = b \sec \varphi = c \sec (A - \varphi)$$

$$b \cos (A - \varphi) = c \cos \varphi$$

$$tg\, \varphi = \frac{c - b \cos A}{b \sin A}$$

folglich, wenn man zugleich b_1 c vertauscht

Fig 928.

$$BD = \frac{c - b\cos A}{\sin A},\quad CD = \frac{b - c\cos A}{\sin A}$$

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin A^2}$$

durch Substitution der gefundenen Werthe für BD, CD erhält man nun leicht

$$ABCD = \tfrac{1}{2}b \cdot BD + \tfrac{1}{2}c \cdot CD$$
$$= \frac{2bc\sin^2 A - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A}{2\sin A}$$

wenn man nur $2bc(\sin^2 A^2 + \cos^2 A)$ für $2bc$ setzt

$$ABCD = bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{2\sin A}$$

wenn man nur $2bc(\sin^2 A + \cos^2 A)$ für $2bc$ setzt.

Aber $2\triangle ABC = bc\sin A$

folglich
$$ABCD = bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{4\sin^2 A}$$
$$= 2\triangle ABC - \tfrac{1}{4}AD^2 \cdot \sin 2A$$

woraus die zu beweisende Gleichung unmittelbar folgt.

17. Sei nun $ABCD\ldots$ ein willkührliches Vieleck, dessen Inhalt wir durch J bezeichnen wollen. Von irgend einem Punkt K' in der Ebene des Vielecks fälle man auf die Seite Lothe, und verbinde deren Fußpunkte durch gerade Linien, wodurch ein neues Vieleck $A'B'C'D'\ldots$ von gleicher Seitenanzahl entsteht, dessen Inhalt wir J' setzen wollen, so hat man nach No 16

$$K'BA'B' - 2\triangle K'A'B' = -\tfrac{1}{4}K'B^2 \cdot \sin 2B$$
$$K'CB'C' - 2\triangle K'B'C' = -\tfrac{1}{4}K'C^2 \cdot \sin 2C$$
$$K'DC'D' - 2\triangle K'C'D' = -\tfrac{1}{4}K'D^2 \cdot \sin 2D$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$K'AN'A' - 2\triangle K'N'A' = -\tfrac{1}{4}KA^2 \cdot \sin 2A$$

wenn N die letzte Spitze des gegebenen Vielecks ist. Die Summe der Vierecke ist offenbar $= J$, die der Dreiecke $= J'$. Also

$$J - 2J' = -\tfrac{1}{4}(K'A^2 \cdot \sin 2A + K'B^2 \cdot \sin 2B + K'C^2 \cdot \sin 2C + \ldots)$$

und wenn das Viereck gleichwinklig ist

$$J - 2J' = -\tfrac{1}{4}(K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots)\sin 2A.$$

Soll nun, indem A und J constant bleiben, J' constant bleiben, so muſs $K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots$ constant bleiben. Diese Quadratensumme bleibt aber nach No. 8 constant, wenn K' in der Peripherie eines aus dem Punkte der mittleren Entfernungen des Vielecks beschriebenen Kreises liegt. Dies gibt folgenden Satz. Fället man aus irgend einem Punkt der Peripherie eines aus dem Punkt der mittleren Entfernungen eines gleichwinkligen Vielecks beschriebenen Kreises auf dessen Seiten Perpendikel und verbindet deren Fuſspunkte durch gerade Linien, so ist der Inhalt des dadurch entstehenden eingeschriebenen Vielecks eine constante Gröſse.

Punkte kleinster Entfernung.

18. Man habe irgend zwei Punkte M, M' in der Ebene eines Vielecks. Die durch M und M' gehende gerade Linie nehme man als Axe der X an, M sei der Anfang der Coordinaten, die Entfernungen der Spitzen von M sollen durch $r_1, r_2, r_3 \ldots$ ihre Entfernungen von M' durch r_1'; r'_2; $r'_3 \ldots$, die Coordinaten wie vorher, die Entfernung des Punkts M' von M durch k bezeichnet werden, so ist nach No. 6

$$r_1' = \sqrt{(r_1^2 + k^2 - 2kx_1)} = r_1\sqrt{(1 - c_1)}$$
$$r'_2 = \sqrt{(r_2^2 + k^2 - 2kx_2)} = r_2\sqrt{(1 - c_2)}$$
$$r'_3 = \sqrt{(r_3^2 + k^2 - 2kx_3)} = r_3\sqrt{(1 - c_3)}$$

Für $c_1 = \frac{k(2x_1 - k)}{r_1^2}$; $c_2 = \frac{k(2x_2 - k)}{r_2^2} \ldots$

Entwickelt man die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und ordnet nach Potenzen von k, so wird

$$r_1' = r_1 - k\frac{x_1}{r_1} + k^2\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)\frac{1}{2r_1} + \ldots$$

$$r_2' = r_2 - k\frac{x_2}{r_2} + k^2\left(1 - \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)\frac{1}{2r_2} + \ldots$$

$$r_3' = r_3 - k\frac{x_3}{r_3} + k^2\left(1 - \frac{x_3^2}{r_3^2}\right)\frac{1}{2r_3} + \ldots$$

u. s. f.

Folglich weil

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + \ldots$$

$$1 - \frac{x_1^2}{r_1^2} = \frac{y_1^2}{r_1^2};\; 1 - \frac{x_2^2}{r_2^2} = \frac{y_2^2}{r_2^2} + \ldots$$

wenn man auf beiden Seiten addirt

$$\Sigma r' = \Sigma r - k\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$

$$+ k^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots\right)$$

wo die Bezeichnung Σ, $\Sigma r'$ leicht verständlich sein wird. Man kann den Punkt M nun einer solchen Bedingung unterwerfen, dafs für ihn Σr, d. i. die Summe seiner Entfernungen von allen Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller anderen in seiner Nähe liegenden Punkte von den Spitzen des Vielecks. Zu dem Ende mufs also für kleine k, $\Sigma r' > \Sigma r$ sein. Man kann nun aber k so klein nehmen, dafs das erste Glied

$$-k\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$

obiger Reihe rücksichtlich seines absoluten Werths gröfser ist, als die Summe aller übrigen, so dafs also für so kleine k das Zeichen der zu Σr addirten Gröfse blofs von diesem ersten Gliede abhängt, also positiv oder negativ ist, je nach dem

$$-\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$

es ist. Soll demnach für kleine k immer $\Sigma r' > \Sigma r$ sein, so mufs nothwendig

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

sein. Das zweite Glied

$$k^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots\right)$$

ist offenbar immer positiv und man kann wieder k^2 so klein nehmen, dafs der absolute Werth jenes Gliedes die Summe aller folgenden übertrifft, so dafs also für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ ist. Folglich gibt es in der Ebene jedes Vielecks Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller in ihrer Nähe liegenden Punkte von diesen Spitzen. Jene Punkte nennt man **Punkte kleinster Entfernung** und sie sind, da man offenbar auch x mit y vertauschen kann, der Bedingung unterworfen, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0$$

19. Man denke sich nun die Coordinatenaxen durch den Punkt M kleinster Entfernung gelegt, schneide von ihm an auf den von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Stücke ϱ ab, und bezeichne die Coordinaten der Endpunkte $\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{A}_3$ .. dieser Stücke durch ξ, v_1; ξ_2, v_2; ξ_3, v_3; ... so erhellt auch ohne Figur augenblicklich, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\xi_1}{\varrho},\; \frac{x_2}{r_2} = \frac{\xi_2}{\varrho},\; \frac{x_3}{r_3} = \frac{\xi_3}{\varrho} \ldots$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{v_1}{\varrho},\; \frac{y_2}{r_2} = \frac{v_2}{\varrho},\; \frac{y_3}{r_3} = \frac{v_3}{\varrho} \ldots$$

und folglich wegen der Bedingungsgleichungen nach No. 18, wenn man zugleich mit ϱ multiplicirt:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0$$

dies sind aber die Bedingungsgleichungen für den Punkt der mittleren Entfernungen der Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ... folglich ist jeder Punkt der kleinsten Entfernung eines Vielecks der Mittelpunkt der Entfernungen der Punkte, welche man erhält, wenn man auf den von dem Punkt kleinster Entfernung nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von diesem Punkte aus willkührliche aber gleiche Stücke abschneidet.

20. Ist umgekehrt ein Punkt M in der Ebene eines Vielecks der Punkt mittlerer Entfernungen der gleich weit von ihm entfernten Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ... so ist, wenn man sich die Coordinatenaxen wieder durch M gelegt denkt, und die vorige Bezeichnung No. 3 beibehält

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0$$

woraus wie vorher folgt, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0$$

M also ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks, der vorige Satz also auch umgekehrt richtig ist.

Im Viereck ist also der Durchschnittspunkt der Diagonalen ein Punkt kleinster Entfernung, weil, wenn man von

den Diagonalen gleiche Stücke abschneidet und deren Endpunkte verbindet, ein Parallelogramm entsteht, dessen Punkt der mittleren Entfernungen besagter Durchschnittspunkt ist.

21. Gibt es in der Ebene eines Vielecks einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, dafs die von ihm nach den Spitzen gezogenen Linien lauter gleiche Winkel einschliefsen, so ist M ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks. Schneidet man nämlich auf den von M nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von M aus gleiche willkührliche Stücke ab und verbindet deren Endpunkte durch gerade Linien, so entsteht offenbar ein reguläres Vieleck, dessen Mittelpunkt M ist. Also ist M der Punkt der mittleren Entfernungen dieses regulären Vielecks, folglich der Punkt kleinster Entfernung des gegebenen Vielecks.

22. Sind alle Winkel eines Dreiecks $< \frac{4}{3}R$, so gibt es innerhalb desselben immer einen Punkt von solcher Beschaffenheit, dafs die von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Winkel (jeder $= \frac{4}{3}R$) einschliefsen und nur einen. Wären alle drei Winkel eines Dreiecks $< \frac{2}{3}R$, so wäre die Summe aller $< 2R$. Folglich mufs es wenigstens einen geben, welcher $\geqq \frac{2}{3}R$. Dieser Winkel sei BAC. Ueber AB und AC beschreibe man zwei Kreisabschnitte, deren jeder einen Winkel $= \frac{4}{3}R$ fafst, so müssen die Bogen dieser Segmente sich nothwendig zwischen den Schenkeln des Winkels BAC schneiden, weil dieser Winkel $< \frac{4}{3}R \geqq \frac{2}{3}R$ ist

Fig. 929.

und jede der beiden durch A an die Bogen gezogenen berührenden mit AB und AC einen Winkel gleich $\frac{2}{3}R$ einschliefst, indem jeder dieser beiden Winkel dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt gleich also die Ergänzung von $\frac{4}{3}R$ zu $2R$, d. i. $= \frac{2}{3}R$ ist. Da nun der Durchschnittspunkt M der beiden Bogen zwischen den Schenkeln von BAC liegt, so mufs M nothwendig innerhalb des Dreiecks liegen, weil der der Spitze A zugekehrte Winkel $BMC = \frac{4}{3}R$, ein convexer Winkel ist, welches nicht möglich wäre, wenn M aufserhalb des Dreiecks läge. Da nun $AMB = AMC = \frac{4}{3}R$ ist, so ist auch $BMC = \frac{4}{3}R$ und folglich die drei von AM, BM, CM eingeschlossenen Winkel einander gleich. Da die beiden Bogen der Kreisabschnitte, welche $\frac{4}{3}R$ fassen, sich nur in einem Punkt schneiden können, so gibt es auch nur einen Punkt wie M.

23. Da es in jedem Dreieck, dessen Winkel alle $< \frac{4}{3}R$ sind, innerhalb immer einen Punkt gibt, für welchen die von ihm an die Spitzen gezogenen Linien gleiche Winkel einschliefsen, so gibt es für jedes solche Dreieck immer auch einen Punkt kleinster Entfernung nach No. 21 innerhalb. Auch gibt es nur einen Punkt kleinster Entfernung. Gäbe es nämlich zwei M, M' so müfsten wenigstens zwei der von AB', BM', CM' gebildeten Winkel ungleich sein, weil es nach No. 22 nur einen Punkt gibt, wo diese Winkel gleich sind. Der Punkt M' wäre aber nach No. 10 der Punkt der mittleren Entfernungen auf AM', BM', CM' von M' gleich weit entfernter Punkte. Folglich mufsten, wenn man die den beiden ungleichen Winkeln zugleich als Schenkel angehörende Linie unter AM', BM', CM' als Axe annähme, die Ordinaten der auf den beiden anderen Linien gleichweit von M' entfernten Punkte nach No. 3 einander gleich sein, welches jedoch wegen der Ungleichheit der Winkel offenbar unmöglich ist.

24. Hat nun ein Dreieck einen Winkel BAC, welcher $\geqq \frac{4}{3}R$ ist so kann der Punkt kleinster Entfernung nicht innerhalb liegen, weil sonst $AMB = AMC = \frac{4}{3}R$ (No. 23), also nothwendig $MAB < \frac{2}{3}R$, $MAC < \frac{2}{3}R$, $BAC < \frac{4}{3}R$ sein müfste.

Fig. 930.

In einer Seite des Dreiecks kann aber

der Punkt kleinster Entfernung überhaupt eben so wenig liegen als aufserhalb des Dreiecks, weil sich von einem solchen Punkt nie nach den Spitzen drei gleiche Winkel mit einander einschliefsende gerade Linien ziehen lassen, wie es doch in vorliegendem Fall möglich sein müfste (23). Daher mufs der Punkt kleinster Entfernung in zwei Seiten zugleich, d. h. in einer Spitze des Dreiecks liegen. Da aber offenbar $BA + BC > AB + AC$, $CA + CB > AB + AC$ ist, so mufs der Punkt kleinster Entfernung in der Spitze C des stumpfen Winkels liegen.

Pyramide ist ein Körper, der von einer drei- oder mehrseitigen Figur als Grundfläche und von so vielen Dreiecken als diese Grundfläche Seiten hat als Seitenflächen, die alle in einem Punkt der Spitze zusammen treffen, begrenzt wird; der Abstand der Spitze von der Grundfläche ist die Höhe der Pyramide.

2. **Wird eine Pyramide mit Ebenen parallel ihrer Grundfläche geschnitten, so sind die Durchschnitte der Grundfläche ähnlich und ihre Flächen verhalten sich zur Grundfläche wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze zu dem Quadrat des Abstandes der Grundfläche von der Spitze.**

Denn ist EFG eine der Grundfläche BCD parallele Durchschnittsebene, dann sind die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Seitenflächen der Pyramide den Seiten der Grundfläche parallel, nämlich $EF \mathrel{\#} CD$, $EG \mathrel{\#} BD$, $FG \mathrel{\#} BC$. Deshalb $\angle EFG = \angle BCD$ u. s. w.

Fig. 931.

Die Durchschnittsfigur und die Grundfläche sind also in einerlei Folge gleichwinklig, weil $FG \mathrel{\#} BC$, und so ist

$$FG : BC = AF : AC$$

und weil $EF \mathrel{\#} CD$

$$EF : CD = AF : AC$$

daher $FG : BC = EF : CD$

Schliefst man so fort, so folgt, dafs die Seiten beider Ebenen, die an gleichen homologen Winkeln liegen, je zwei und zwei einander proportional sind, mithin sind Durchschnitt und Grundfläche einander ähnlich.

AH sei ein Loth auf die Grundfläche aus der Spitze gefällt. Dieses schneide die Durchschnittsebene in J, ziehe BH, GJ, so sind diese parallel. Daher

$$AH : AJ = AB : AG = BC : FG$$

daher ist $AH^2 : AJ^2 = BC^2 : FG^2$.

Aehnliche Figuren verhalten sich aber wie die Quadrate homologer Linien, also Grundfläche BCD : Durchschnittsfläche $EFG = BC^2 : FG^2 = AH^2 : AJ^2$.

2. **Der Inhalt einer Pyramide ist das Product aus dem Drittheil der Höhe und dem Inhalt der Grundfläche.**

Denn es sei g der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe der Pyramide. Diese Höhe theile man in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, lege durch die Theilpunkte Ebenen parallel zur Grundfläche, so zerlegen diese die Pyramide in n Theile, deren Inhalte, von der Spitze abgezählt, der Reihe nach mit $p, p_2 \ldots p_n$ bezeichnet seien. Zwischen je zwei nächsten Durchschnitten denke man sich Prismen construirt, deren eine Seitenkante mit einer Seitenkante der Pyramide zusammenfällt und wovon das eine den oberen, das andere den unteren Durchschnitt zu Endflächen, beide aber den Abstand der beiden Durchschnitte, also $\frac{1}{n} h$ zur Höhe haben; so erhält man zwei Reihen von Prismen; die Prismen der einen Reihe sind Theile der zwischen dieselben Durchschnitte fallenden Pyramidentheile, also kleiner als diese Theile, die Summe ihrer Inhalte also kleiner als der der Pyramide. Dagegen sind von den Prismen der anderen Reihe die zwischen denselben Durchschnitten liegenden Pyramidenstücke nur Theile, die Prismenstücke also gröfser als die zugehörigen Pyramidenstücke. Die Summe ihrer Inhalte also gröfser. Die Prismen der ersten Reihe sind also inwendige Prismen, die Durchschnitte, welche durch den $(m-1)$ und den $m$ten Theilpunkt der Höhe von der Spitze abgezählt gehen, haben die Abstände $\frac{m-1}{n} h$ und $\frac{m}{n} h$ von dieser Spitze. Bezeichnet man diese Durchschnitte mit g_{m-1} und g_m, so hat man nach dem vorigen Satz

$$g : g_{m-1} = h^2 : \left(\frac{m-1}{n}h\right)^2 = h^2 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 h^2 = 1 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2$$

Also ist $g_{m-1} = \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 g$

Eben so folgt $g_m = \left(\frac{m}{n}\right)^2 g$.

Der Inhalt des inwendigen Prisma zwischen diesen beiden Durchschnitten ist daher

$$\frac{1}{n}\, h\, g_{m-1} = \frac{(m-1)^2}{n^3}\, hg$$

der Inhalt des auswendigen Prisma

$$= \frac{1}{n}\, h\, g_m = \frac{m^2}{n^3}\, hg.$$

Zwischen diesen beiden Inhalten ist nun der Inhalt p_m des zwischen denselben Durchschnitten liegenden Pyramidenstücks begriffen, man hat also

$$\frac{(m-1)^2}{n^3}\, hg < p_m < \frac{m^2}{n^3}\, hg.$$

Setzt man in diese Vergleichung für m die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, so erhält man eine Reihe von n Vergleichungen für alle einzelnen Pyramidenstücke:

$$\frac{0}{n^3}\, hg < p_1 < \frac{1^2}{n^3}\, hg$$

$$\frac{1}{n^3}\, hg < p_2 < \frac{2^2}{n^3}\, hg$$

$$\frac{2}{n^3}\, hg < p_3 < \frac{3^2}{n^3}\, hg$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{(m-1)^2}{n^3}\, hg < p_n < \frac{m^2}{n^3}\, hg$$

bezeichnet man den Inhalt der ganzen Pyramide mit p, so ist

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . p_n$$

und wenn man die n Vergleichungen addirt, so erhält man

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2}{n^3}\, hg < p < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2}{n^3}\, hg$$

Nun ist aber

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2}{n^3}\, hg < \tfrac{1}{3}\, hg < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2}{n^3}\, hg$$

Mithin fällt p und $\frac{1}{3}hg$ zwischen einerlei einschliefsende Gröfsen, deren Unterschied $= \frac{n^2}{n^3}\, hg = \frac{1}{n}\, hg$, der also, weil n beliebig grofs genommen werden kann, sich beliebig klein machen läfst. Folglich müssen die zwischen begriffenen Gröfsen einander gleich sein.

Anmerk. gh ist der Inhalt eines Prisma von der Grundfläche g und der Höhe h, folglich ist eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Sind G und H dasselbe für eine Pyramide P, was g und h für die Pyramide p sind, so hat man $p : P = gh : GH$, d. h. Pyramiden verhalten sich wie die Producte aus Grundflächen und Höhen. Sind also die Grundflächen zweier Pyramiden gleich und die Höhen gleich, so sind auch die Pyramiden gleich.

3. Der Theil einer Pyramide, begriffen zwischen den Grundflächen und einem damit parallel geführten Durchschnitt; d. h. der Inhalt einer abgekürzten Pyramide ist dreien Pyramiden zusammengenommen gleich von einerlei Höhe mit der abgekürzten, deren Grundflächen aber der Reihe nach die untere Endfläche, die obere Endfläche der abgekürzten und das geometrische Mittel derselben sind.

Denn es sei $ABCDEF$ eine dreiseitige abgekürzte Pyramide. Man lege sowohl durch die Punkte A, C, E als durch C, E, F eine Ebene, so wird dadurch die abgekürzte Pyramide in drei vollständige Pyramiden $ABCE$, $DEFC$ und $ACFE$ zerlegt. Betrachtet man von den beiden ersten die Dreiecke ABC und DEF als Grundflächen, so haben diese einerlei Höhe mit der abgekürzten und sind also die beiden zuerst genannten Pyramiden. Zieht man durch E in $ABEF$ mit der Kante AF die Parallele EG und verbindet C mit G, so ist CG parallel der Ebene des Dreiecks ACF. Betrachtet man also bei der dritten Pyramide $ACFE$ jenes Dreieck als Grundfläche, so ist sie auch gleich einer Pyramide über derselben Grundfläche, die ihre Spitze in G hat. Die Eckpunkte dieser zweiten Pyramide sind aber bei diesen A, C, G, F. Man kann also das $\triangle ACG$ als ihre Grundfläche betrachten, wo dann F ihre Spitze, wo sie dann einerlei Höhe mit der ab-

Fig. 932.

gekürzten Pyramide hat: es ist also nur noch zu zeigen, dafs das $\triangle ACG$ das geometrische Mittel zwischen den Endflächen ABC und DEF.

Nun ist

$$\triangle ABC : \triangle ACG = AB : AG = AB : EF = AC : DF = \triangle ACG : \triangle DEF$$

weil $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, und bei Dreiecken, die einen gleichen Winkel haben, die Inhalte sich wie die Producte der den gleichen Winkel einschliefsenden Seiten oder wie je zwei dieser Seiten sich verhalten, wenn die beiden anderen Seiten, wie hier AG und EF einander gleich sind. Mithin ist $\triangle ACG$ das geometrische Mittel zwischen den Dreiecken ABC und DEF. Man hat demnach $\triangle ACG = \sqrt{\triangle ABC \times \triangle DEF}$.

4. Es sei $ABCDEF$ eine mehrseitige abgekürzte Pyramide, die zu der vollständigen $ABCDH$ gehört, $HJKL$ sei eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche JKL der Grundfläche ABD gleich

Fig. 933.

ist und mit dieser in einerlei Ebene liegt; alsdann haben beide vollständige Pyramiden auch, weil sie eine gemeinschaftliche Spitze H haben, eine gemeinschaftliche Höhe, und wenn man die Ebene EFG erweitert, bis sie die dreiseitige Pyramide im $\triangle NMO$ schneidet, so haben auch die Pyramiden $EFGH$ und $MNOH$ einerlei Höhe. Da Durchschnitte parallel den Grundflächen der Pyramide in dem Verhältnifs der Quadrate ihrer Abstände von der Spitze stehen, in den beiden hier betrachteten Pyramiden aber diese Abstände gleich sind, so verhält sich die Grundfläche ABD : Durchschnitt $EFG = \triangle JKL : \triangle MNO$.

Aber Grundfläche $ABD = \triangle JKL$,
folglich Durchschnitt $EFG = \triangle MNO$,
folglich haben die Pyramiden $EFGH$ und $MNOH$ gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, wie die zugehörigen ganzen Pyramiden ADH und $JKLH$, sie sind also je zwei gleich grofs, und wenn man Gleiches von Gleichem hinweg nimmt, so bleibt die abgekürzte Pyramide

$$ABCDEFG = JKLMNO.$$

D. h. Eine mehrseitige abgekürzte Pyramide ist so grofs als eine abgekürzte dreiseitige Pyramide von gleicher Höhe und gleich grofsen Endflächen, folglich gilt von der mehrseitigen der Satz wie von den dreiseitigen.

5. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen und ähnliche homologe Seitenflächen und unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt sind.

Denn es seien $ABCDEF$ und $abcdef$ zwei Pyramiden, deren Grundflächen einander ähnlich, so wie die Seitenflächen ABF und abf u. s. w., die überdies gleiche Neigungswinkel gegen die Grundflächen haben. Wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen ist $\angle ABF = \angle abf$, daher sind in den beiden Ecken B und b zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel der einen eben den Stücken der anderen gleich, folglich sind diese Ecken congruent und also auch die übrigen Seiten und Winkel gleich. Man hat also $\angle CBF = \angle cbf$ und aufserdem sind die Seitenflächen CBF und cbf wegen des gleichen Winkels der Ecken an BC und bc gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt. Aus der Aehnlichkeit der Grundflächen folgt

$$AB : ab = BC : bc$$

und wegen der Aehnlichkeit der Seitenflächen ABF und abf hat man

$$AB : ab = BF : bf.$$

Daher ist auch

$$BC : bc = BF : bf.$$

Mithin sind die Seitenflächen BCF und bcf nach zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ähnlich. Man kann also von diesen Seitenflächen wie von den zuerst betrachteten ausgehend auf die Aehnlichkeit der übrigen homologen Seitenflächen und auf deren gleiche Neigung gegen die Grundflächen schliefsen, und so folgt dann, dafs in beiden Pyramiden alle Winkel und Ecken gleich und alle homologen Längenabmessungen proportional sind.

6. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Cubi homologer Längenabmessungen.

Denn fällt man von den Spitzen der Pyramiden Lothe auf ihre Grundflächen, so folgt wie früher bei den Prismen, dafs die homologen Seitenkanten diese Lothe und die Projectionen jener Seitenkanten auf den Grundflächen ähnliche Dreiecke bilden. Bezeichnen H und h die Höhen der beiden Pyramiden, deren Inhalte P und p sein mögen, und sind A und a homologe Seitenkanten und G und g die Grundflächen der Pyramiden, so hat man

$$P = \tfrac{1}{3}HG \text{ und } p = \tfrac{1}{3}hg.$$

Daher $P : p = HG : hg$

und $A : a = H : h$

Nun sind die homologen Seitenkanten den Grundkanten proportional, folglich verhalten sich die Quadrate der homologen Seitenkanten wie die Quadrate der homologen Grundkanten, die letzten verhalten sich aber wie die Grundflächen. Man hat hat also

$$A^2 : a^2 = G : g.$$

Setzt man diese Proportion mit der obigen

$$A : a = H : h$$

zusammen, so ergibt sich

$$A^3 : a^3 = HG : hg = P : p.$$

Da nun in ähnlichen Pyramiden alle homologen Längenabmessungen also auch ihre Cuben proportional sind, so verhalten sich allgemein die Inhalte der Pyramiden wie die Cuben homologer Längenabmessungen.

Die Oberfläche einer regulären Pyramide wird trigonometrisch leicht gefunden. Jede der Seitenflächen ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie die Seite eines regulären Vielecks der Grundfläche und die Höhe der Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck ist, dessen Cathete die Höhe der Pyramide und die Senkrechte aus dem Mittelpunkt auf die Seite der Grundfläche sind.

Der Halbmesser der Grundfläche sei r, die Höhe $= h$, der halbe Centriwinkel $= \varphi$, so ist der Inhalt eines der Dreiecke $= r \sin \varphi \sqrt{(r^2 \cos^2\varphi + h^2)}$, und die Summe aller Seitenflächen $= nr \sin \varphi \sqrt{(r^2 \cos^2\varphi + h^2)}$ wo n die Anzahl derselben ist. Die Grundfläche ist $= nr^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$.

Die Seitenflächen einer gleichförmigen Pyramide sind gegen die Grundfläche unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente $= \frac{h}{r \cos \varphi}$.

Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche einen Winkel, dessen Tangente = ist

$$\frac{\sqrt{(r^2 \cos^2\varphi + h^2)}}{r \sin \varphi}.$$

Der Neigungswinkel der Seitenflächen sei $= \alpha$,

so ist $$\sqrt{(r^2 \cos^2\varphi + h^2)} = r \cos \varphi \sqrt{(1 + tg^2\alpha)} = r \cos \varphi \cdot \sec \alpha = \frac{r \cos \varphi}{\cos \alpha}$$

daher die Summe aller Seitenflächen

$$= \frac{nr^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos \alpha} = \frac{nr^2 \sin 2\varphi}{2 \cos \alpha}.$$

Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche den Winkel, dessen Tangente = ist $\frac{\cot \varphi}{\cos \alpha}$.

7. Es sei $CABEDFG$ ein abgekürztes Pyramidenstück, dessen Grundflächen CAB, FDE parallel sind, es soll der Inhalt gefunden werden aus dem was an dem Stück gemessen werden kann.

Dieses sind die Seitenlinien der beiden parallelen Flächen und die Winkel ihrer Seiten, woraus der Inhalt derselben ge-

Fig 934.

funden wird. Wenn die Höhe nicht durch Ablothung gemessen werden kann, so mufs sie aus den Winkaln, welche eine der Seitenlinien AD mit den Seiten AB und AC macht und dam $\angle BAC$ hergeleitet werden. Denn daraus ergibt sich (spärische Trigonometrie) der Neigungswinkel dar Linia AD gegen die Grundfläche und dann dla Höha, welche dem Prodnkt aus AD in den Sinns des Neigungswinkels gleich ist. Diese Höhe sei h, die Höhe dar gansen Pyramide $= x$, der weggenommenan y, so ist $x - y = h$.

Ferner sei $AB = a$, $DE = b$, so ist

$$a : b = x : y \text{ und } y = \frac{bx}{a}.$$

Da $a : a - b = x : x - y = x : h$ ist

so ist $x = \frac{ah}{a-b}$, $y = \frac{bh}{a-b}$.

Ferner sei die nntere Grundfläche A, die obere B, so ist

$$A : B = a^2 : b^2.$$

Nun ist das Pyramidenstück

$$= \tfrac{1}{3}Ax - \tfrac{1}{3}By.$$

Setzt man für x, y, B ihre Werthe, so wird das Pyramidenstück

$$= \tfrac{1}{3}AB \cdot \frac{a^3 - b^3}{(a-b)\,a^2} = \tfrac{1}{3}Ah \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} = \tfrac{1}{3}Ah\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Die dreiseitige Pyramide ist unter den Körpern mit ebenen Seitenflächen, was das Dreieck unter den ebenen geradlinigen Figuren ist.

Fig. 935.

8. Es sei $DACB$ eine dreiseitige Pyramide, deren Grnndfläche ABC. Der Winkel der Seitenlinie DC mit AC sei $= \alpha$, der Winkel derselben mit BC sei $= \beta$, der Winkel $ACB = \gamma$. Ferner sei $AC = a$, $BC = b$, $CD = d$. Es ist der Inhalt der Pyramide =

$$\tfrac{1}{3}abd\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Der Beweis ist derselbe wie für den Inhalt eines Parallelepiped, nur dafs hier die Grnndfläche $= \tfrac{1}{2}b \sin\gamma$ ist, und dafs diese mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt werden mufs.

Durch einige Substitutionen aus der Goniometrie wird diese Formel in folgende verwandelt. Inhalt der Pyramide

$$= \tfrac{1}{6}abd\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}$$

9. Die dritte Seite der Grundfläche AB sei $= c$, die Seitenlinie $AD = e$, $BD = f$. Es ist der Inhalt dar Pyramide durch die sechs Seitenlinien ansgedrückt

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{[a^2f^2(-a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-f^2) + b^2c^2(a^2-b^2+c^2+d^2-c^2+f^2) + c^2d^2(a^2+b^2-c^2-d^2+e^2+f^2)]}.$$

Diese sehr symmetrische Formel wird erhalten, wenn für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe durch die Seiten der Dreiecke eingeführt werden.

Es ist

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-c^2}{2ad};$$

$$\cos\beta = \frac{b^2+d^2-f^2}{2bd};$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Die Rechnnng ist etwas langwierig, übrigens eina blofs mechanische Multiplication.

Man kann die Combination in der Formel noch auf andere Art symmetrisch ordnen: als

$$- a^2b^2c^2 + a^2b^2(e^2+f^2) + o^2c^2(d^2+f^2) + a^2d^2(f^2-e^2) + a^2e^2f^2 - a^2f^2(a^2+f^2)$$
$$+ b^2c^2(d^2+e^2) + b^2d^2(e^2-f^2) - b^2e^2(b^2+c^2) + b^2e^2f^2 - c^2d^2(c^2+d^2)$$
$$+ c^2d^2(e^2+f^2) - c^2e^2f^2.$$

10. Es sei Fig. 935 die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide *ADBC* gegeben, nebst den Neigungswinkeln der Seitenlinien *DA*, *DB*, *DC* gegen die Grundfläche, man soll die Höhe der Pyramide *DE* und die Lage des Grundpunkts *E* bestimmen.

Man ziehe an den Grundpunkt *E* die geraden *AE*, *BE*, *CE*. Diese verhalten sich wie die Tangenten der Winkel *ADE*, *BDE*, *CDE*, oder wie die Cotangenten der Neigungswinkel *EAD*, *EBD*, *ECD*. Nun ist der Kreis der geometrische Ort für alle Dreiecke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gegebenes Verhältnifs der Seiten haben. Man beschreibe also über zweien der drei Seiten der Grundfläche *AB*, *AC*, als Chorden Kreisbogen, deren jeder der Ort des Punkts *E* sei, so giht ihr Durchschnitt diesen Punkt, also auch die Längen *AE*, *BE*, *CE*. Aus jeder dieser und dem zugehörigen Winkel wird dann die Höhe der Pyramide *ED* bestimmt. Die Berechnung ist etwas mühsam und mufs trigonometrisch ausgeführt werden.

11. Wenn an einer Pyramide eine Seite *AB* der Grundfläche, der gegenüberliegende Winkel an der Spitze *ADB* und der Neigungswinkel der Seitenlinien *AD*, *BD* gegen die Grundfläche gegeben werden, so ist die Höhe und der Grundpunkt dadurch bestimmt. Denn aus den Neigungswinkeln ist erstlich das Verhältnifs der Linien *AE*, *BE*, die nach dem Grundpunkt gehen, gegeben; ferner ist durch den Winkel *ADB* mit den Neigungswinkeln der Winkel *AEB* der auf *DE* Senkrechten *AE*, *BE* gegeben.

Die Aufgabe wird nun diese, erstlich über *AB* als Chorde einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel fasse und in diesem zwei geraden *AE*, *BE* zu ziehen, die ein gegebenes Verhältnifs hahen. Bei Höhenmessungen ist dies anwendbar.

12. Die drei ebenen Winkel der Ecke *A* an der dreiseitigen Pyramide *ABCD* seien alle rechte, so dafs die drei Ebenen *BAC*, *DAC*, *BAD* senkrecht auf einander stehen. Es ist

$$(\triangle ABD)^2 = (ABC)^2 + (ADC)^2 + (ABD)^2$$

wo die Flächen der Dreiecke in Zahlen ausgedrückt zu verstehen sind.

Der Inhalt des $\triangle BCD$ werde durch seine drei Seiten ausgedrückt. Es sei $BD = a$, $BC = b$, $CD = c$, so ist der Inhalt des Drelecks

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Die anderen Dreiecke drücke man durch das halbe Product ihrer Catheten aus.

Fig. 936.

Das Product unter dem Wurzelzeichen entwickele man Es ist erstlich ein Product aus den Factoren $(b^2+c^2)-a^2$ und $a^2-(b^2-c^2)$ und dieses ist

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Nun ist $a^2 = AB^2 + AD^2$

$$b^2 = AB^2 + AC^2$$
$$c^2 = AC^2 + AD^2$$

Setzt man diese Werthe für a^2, b^2, c^2 in jenes Product, so wird es =

$$4AB^2 \cdot AC^2 + 4AB^2 \cdot AD^2 + AC^2 \cdot AD^2$$

Die Summe der Dreiecke ist

$$\tfrac{1}{2} AB \cdot AD + \tfrac{1}{2} AB \cdot AC + \tfrac{1}{2} AC \cdot AD$$

und die Summe der Quadrate von denselben der sechszehnte Theil jener Summe. Das Quadrat des Dreiecks *BCD* ist ebenfalls der sechzehnte Theil derselben und der Satz ist erwiesen.

13. La Grange hat in den neuen Memoiren von Berlin für 1773 analytische Auflösungen einiger Aufgaben über die dreiseitigen Pyramiden gegeben. Sie setzen gar keine Construction voraus und beruhen auf Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten, deren ja drei zu einem Punkt im Raum gehören.

Aus diesen Coordinaten oder gewissen daraus zusammengesetzten Ausdrücken bestehen die Werthe der Gröfsen, die für eine Pyramide gesucht werden. So findet la Grange zuerst Ausdrücke für die Seitenflächen, leichte zwar für die am Scheitelpunkt zusammenlaufenden, aber für die Grundfläche in der That einen zu zusammengesetzten nur durch die Form einfachen. Der Scheitelpunkt wird zu dem Anfangspunkt der Coordinaten genommen. Wenn s, t, u die Coordinaten zu der Grundfläche sind und die Gleichung für dieselbe ist $u = l + ms + nt$, so

ist die Höhe der Pyramide

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+mm+nn)}}.$$

Der Inhalt der Pyramide wird durch eine symmetrische Formel mittelst der Coordinaten zu den drei Winkelpunkten der Grundfläche angegeben. Diese seien $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$, so ist der Inhalt der Pyramide =

$$\tfrac{1}{6}(xy'z''+yz'x''+zx'y''+xz'y''-yxz''-zy'x'').$$

Der Inhalt durch die sechs Seitenlinien ist oben angegeben. Merkwürdig ist die Aufgabe, in einer dreiseitigen Pyramide denjenigen Punkt zu finden, von welchem aus die nach den Ecken gezogenen geraden die Pyramide in vier Theile theilen, deren Verhältnisse gegeben sind. Dadurch gelangt der Verfasser auch zu Formeln zur Bestimmung einer Kugel, welche zwar sehr symmetrisch, im Grunde aber sehr zusammengesetzt ist. Ein schöner Satz ist folgender über den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide. Er ist einerlei mit dem Schwerpunkt vier gleicher (mit ihren Schwerpunkten) auf die vier Ecken der Pyramide gestellten Körper.

Eine geometrische Kleinigkeit ist noch diese. Eine dreiseitige Pyramide werde parallel mit zwei Seitenlinien geschnitten, die nicht in derselben Ebene liegen. Der Schnitt ist ein Parallelogramm.

Das Netz einer Pyramide ist die in einer Ebene ausgebreitete Oberfläche. Es ist leicht gezeichnet, wenn nur die Seiten und Winkel der Seitenflächen (mit Inbegriff der Grundfläche) bekannt sind. Die drei um den Scheitelpunkt werden nach der Reihe an einander gelegt, an eine derselben wird die Grundfläche über der beiden gemeinschaftlichen Seite gefügt.

Pyramide (Kryst.) quadratische, s. v. w. „quadratisches Octaeder".

Pyramidales Krystallisationssystem ist das zweite System, das zwei und einaxige System, bei welchem drei Axen unter einander rechtwinkel sich schneidon, von denen zwei gleichartig sind, die dritte gegen diese ungleichartig ist (s. Axensystem), indem man sich die dritte halbe ungleiche Axe als Höhe und die beiden gleichen Axen als die Durchmesser einer vierseitigen Pyramide vorstellt.

Pyramidalzahlen, s. u. „figurirte Zahlen."

Pyramidenwürfel (Kryst.) (tetrakishexaeder, Viermalsechsflächner), so genannt von der Art, wie je vier Flächen um die sechs Octaedsrecken gruppirt sind, wodurch diese Formen das Ansehen von Hexaedern erhalten, auf deren Flächen vierseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Es gibt mehrere Formen dieser Art; sie haben 24 Flächen, 36 Kanten und 14 Ecken.

Fig. 937.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke, die Kanten sind zweierlei, 12 längere F, die eine gleiche Lage haben, wie die Kanten des Hexaeders und in denen immer zwei Flächen mit den Grundlinien an einander stofsen. 24 kürzere G, die eine ähnliche Lage haben wie die Kanten des Dodekaeders und in denen immer zwei Flächen mit den gleichen Schenkeln an einander stofsen.

Die Ecken sind zweierlei, acht sechsflächige symmetrische, die wie die Ecken des Hexaeders liegen und sechs sechsflächige reguläre A, die wie die Ecken des Octaeder liegen.

Fig. 938.

Jede Fläche des Tetrakishexaeders ist wie beim Dodekaeder einer der drei Octaederaxen parallel, während sie die anderen nicht gleich wie beim Dodekaeder sondern verschieden schneidet.

Pyramidenoctaeder (Dreimalachtflächner, Triakisoctaeder) haben ihre Namen erhalten von der Art, wie je drei Flächen um die acht Hexaederecken gruppirt sind, wodurch sie im Allgemeinen das Ansehen eines Octaeders erhalten, auf dessen Flächen dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Es gibt ebenfalls mehrere Formen dieser Art: Sie haben 24 Flächen, 36 Kanten, 14 Ecken.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Die Kanten sind zweierlei: 12 längere und schärfere *D*, die eine gleiche Lage haben wie die Kanten des Octaeders und in denen immer zwei Flächen mit den Grundlinien an einander stofsen, und 24 kürzere und stumpfere *G*, die eine ähnliche Lage haben wie die Kanten des Dodekaeders und in denen immer zwei Flächen mit den gleichen Schenkeln an einander stofsen.

Die Ecken sind auch zweierlei, 6 achtflächige, symmetrische Ecken *A*, die wie die Ecken des Octaeders liegen und 8 dreiflächige reguläre *O*, die wie die Ecken des Hexaeders liegen. Man kennt zwei Arten von Triakisoctaedern.

Pyramide, rhomboedische, Skalenoeder, hat 12 congruente ungleichseitige Dreiecke, achtzehn (6 kürzere schärfere, 6 längere stumpfere Scheitel, 6 im Zickzack auf und ablaufende Rand-) Kanten,

Fig. 939.

acht (2 symmetrisch vierkantige Rand-) Ecken. Die Nebenaxen verbinden die Mittelpunkte je zwei gegenüberliegender Randkanten.

Pyramidentetraeder, Hemiicositetraeder, Halbvierundzwanzigflächner, haben 12 Flächen, 18 Kanten und 8 Ecken.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke. Die Kanten sind zweierlei: 6 schärfere und längere *X*, die eine gleiche Lage haben wie die Kanten des Hemioctaeders und in welchen die Flächen mit ihren Grundlinien zusammenstofsen. 12 stumpfere und kürzere *F*, die eine ähnliche

Fig. 940.

Lage haben, wie Linien, die auf den Flächen des Hemioktaeders von den Mittelpunkten der Flächen nach den Ecken gezogen werden, in welchen die Flächen mit den Schenkeln an einander stofsen.

Die Ecken sind zweierlei. Vier sechsflächige symmetrische *J*, die eine gleiche Lage haben wie die Ecken des Hemioctaeders, vier dreiflächige gleichkantige *O*, die in ihrer Lage den Flächen des Hemioctaeders entsprechen.

Die drei octaedrischen Axen verbinden die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender längeren Kanten *X*.

Die vier hexaedrischen Axen verbinden die sechsflächigen Ecken mit den ihnen gegenüberliegenden dreiflächigen Ecken.

Die Hemiicositetraeder sind die hemiedrischen Formen der Icositetraeder und entstehen aus denselben, wenn die Flächen, welche um ihre abwechselnden Hexaederecken liegen, so an Gröfse zunehmen, dafs die dazwischen liegenden ganz verdrängt werden. Je nachdem nun die einen oder die anderen Flächengruppen fortfallen, entstehen aus jedem Icositetraeder, 2 Körper, die sich gegen einander verhalten wie die zwei Hemioctaeder, die aus dem Octaeder entstehen und wie jene in rechte und linke unterschieden werden.

Pyramidales Krystallisationssystem ist das zweite System.

Pyrgoidalzahl (thurmförmige Zahl) ist die Summe einer Columnarzahl und Pyramidalzahl von einerlei Gattung, wenn in der letzteren die Seite oder Wurzel um 1 kleiner ist als in jener. Eine Columnarzahl ist aber das Product aus einer Polygonalzahl in ihre Wurzel. Bloss zur Uebung im Rechnen folgt hier die Form einer solchen Zahl

$\frac{2}{3}(m-2)\,r^3 - \frac{1}{2}\,(2m-7)\,r^2 + \frac{1}{6}\,(2m-7)\,r.$

Pyritoeder enthält 12 gleiche fünfseitige Flächen, dreissig (6 längere, 24 kürzere) Kanten und 20 dreikantige (8 gleichkantige und 12 ungleichkantige) Ecken. Die Axen verbinden die Mittelpunkte der sechs längeren Kanten.

Fig, 941.

Fig. 942.

Fig. 943.

Pyrometer ein Instrument der Physik für Messung von starken Hitzegraden.

Pyrophor eine Materie, welche Kohlen enthaltend bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft sich entzündet.

Pythagorischer Lehrsatz ist der bekannte Lehrsatz, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse so gross ist als die Summe der Quadrate der Katheten.

Pythagorische Rechentafel ist das Einmaleins in die Fächer eines Quadrats vertheilt. Man schreibt die Einrichtung dem Pythagoras zu, vermuthlich aus einem Missverstande. Der Abacus der Pythagoraer, welchen Böotius aufbewahrt hat, ist kein Einmaleins.

Inhaltsverzeichniss.

K.

P.

Druck von J. F. Starcke in Berlin